

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre [illegible].

[illegible]

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1912.

Von der
Akademie der Wissenschaften, Göttingen
genehmigter Nachdruck
KRAUS REPRINT LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1967

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1912.

Seite

Über die beiden Grenzvolumen von Flüssigkeiten beim absoluten Nullpunkt der Temperatur und bei unendlich hohem Druck.

Von

Friedrich Körber.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Dezember 1911 von G. Tammann.

Um die Grenzvolumen der Flüssigkeiten, deren Volumenisothermen E. H. Amagat[1]) bis zu 3000 Atm. experimentell festgelegt hat, beim absoluten Nullpunkt der Temperatur und bei unendlich hohem Druck mit einander vergleichen zu können, waren zwei Aufgaben zu lösen:

1. Es waren die Volumenisobaren bei $p = 1$ Atm. zu tieferen Temperaturen zu verfolgen; denn bisher waren sie nur vom Siedepunkt abwärts bis 0°, bei einigen, nach Beobachtungen von Pierre, bis -30° oder -40° bestimmt; eine Extrapolation der Volumenwerte für $T = 0$ aus diesen Stücken der Isobaren, d. h. eine Extrapolation über mehr als 200° hin, hätte nur äußerst unsichere Werte liefern können.

2. Es waren aus den Bestimmungen von Amagat möglichst genaue Werte des Grenzvolumens für $p = \infty$ zu berechnen.

Die experimentelle Lösung der ersten Aufgabe und die rechnerische der zweiten im Anschluß an die Zustandsgleichung von G. Tammann[2]) $(v - v_{p=\infty}) . (K + p) = C . T$ ist im folgenden mitgeteilt.

---

1) Ann. de Chim. et de Phys. (6) 29, 505.

2) Nachr. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen 1911, math.-phys. Klasse.

1. Die Bestimmung der Volumen bei tiefen Temperaturen.

Die Bestimmungen wurden bis zum Schmelzpunkt, bei einigen Flüssigkeiten mit geringem spontanen Kristallisationsvermögen auch noch unter den Schmelzpunkt hinunter bis -130^0 oder -140^0 nach der dilatometrischen Methode ausgeführt.

Die Dilatometer wurden aus Jenaer Glas 16^{III} hergestellt, dessen linearer Ausdehnungskoeffizient nach Kamerlingh Onnes und Clay durch die Gleichung bestimmt ist:

$$l_t = l_0 . \left[1 + \left\{789,4 \frac{t}{100} + 39,5\left(\frac{t}{100}\right)^2 - 28,8\left(\frac{t}{100}\right)^3\right\} 10^{-6}\right]^{1)} .$$

Zur Berechnung der Volumenänderungen des Dilatometers mit sinkender Temperatur wurde der kubische Ausdehnungskoeffizient gleich dem dreifachen Werte des linearen gesetzt.

Da mit sinkender Temperatur die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten und amorphen Stoffen stark abnimmt, mußte die Oberfläche des Gefäßes des Dilatometers möglichst groß gewählt werden, damit Fehler infolge des verlangsamten Wärmeaustausches nach Möglichkeit vermieden wurden. Die Dilatometergefäße von 2—2,5 ccm Inhalt wurden deshalb aus Glasrohr von der mittleren Wandstärke von 0,2 mm und einem Durchmesser von 3—4 mm in der ungewöhnlichen Länge von etwa 15 cm hergestellt. Um zu lange Bäder zu vermeiden, in denen nur sehr schwer durch Rühren Temperaturkonstanz erreicht worden wäre, wurden die Dilatometergefäße mehrfach im Zickzack hin- und hergebogen.

Die Kapillare des Dilatometers hatte einen inneren Durchmesser von etwa 2 mm. Die Verwendung engerer Kapillaren verbot sich wegen der mit sinkender Temperatur zunehmenden Zähigkeit der Flüssigkeiten, besonders im unterkühlten Zustande. Im ganzen Temperaturgebiet, auf das sich die unten mitgeteilten Versuchsresultate beziehen, zeigte der Flüssigkeitsmeniskus keine wahrnehmbaren Formänderungen. Erst bei tieferen Temperaturen und zwar nur im unterkühlten Zustande wurden die Flüssigkeiten für eine genaue Bestimmung im Dilatometer zu dickflüssig; ein großer Teil der Flüssigkeit adhärierte hier an der Wand und der Meniskus nahm eine für die Ablesung ungeeignete Form an, indem er sich in der Mitte trichterförmig vertiefte. Auf die Kapillaren wurde eine Millimeterteilung geätzt. Die Kalibrierung geschah durch

---

1) Communications from the Physical Laboratory at the University of Leiden No. 95.

Auswiegen mit luftfreiem Wasser; das Auswiegen wurde bei den etwa 12—13 cm langen Kapillaren für etwa 8—10 Stellungen des Wassermeniskus vorgenommen; es ergaben sich keine Abweichungen von der zylindrischen Gestalt, die Fehler bedingt hätten, die gegen die sonstigen Versuchsfehler nicht unbedingt zu vernachlässigen wären. Zur Erleichterung des Einfüllens der Flüssigkeiten war am Ende der Kapillaren ein weiteres Rohr vom Durchmesser von etwa 8—10 mm angeschmolzen.

Bei den gewählten Dimensionen von Dilatometergefäß und Kapillarenweite entsprach einem Fehler in der Bestimmung der Stellung des Meniskus in der Kapillaren von 1 mm ein Fehler in der Volumenbestimmung von etwa 0.001. Da die Ablesungsfehler aber kaum jemals mehr als 0,2 mm betrugen, so belaufen sich die durch die Unsicherheit der Ablesung bedingten Fehler im Maximum auf 0,0002.

Die Bestimmungen wurden zunächst zwischen Zimmertemperatur und -80^0 in einem Äther-Kohlensäure-Bad ausgeführt, das zur Erreichung möglichst gleichmäßiger Temperatur ständig kräftig gerührt wurde. Um ein Beschlagen des als Badgefäß dienenden Dewargefäßes zu verhindern, wurde dieses mit Hülfe einer Pappscheibe und eines Gummiringes in ein Gefäß gesetzt, dessen Boden mit Phosphorpentoxyd bedeckt war. Vor dem Füllen wurden die Dilatometer mehrmals mit den sorgfältig gereinigten Substanzen ausgespült. Vor dem Einfüllen in die Dilatometer ließ ich die Flüssigkeiten einmal kräftig aufsieden, um möglichst alle Luft auszutreiben. Die gefüllten Dilatometer wurden dann jedesmal längere Zeit in ein Bad von der Siedetemperatur der zu untersuchenden Flüssigkeit gebracht, um etwa beim Einfüllen aufgenommene Luft wieder auszutreiben.

Von -80^0 ausgehend wurde für verschiedene Temperaturen $-80{,}0^0$, $-50{,}0^0$, $-30{,}0^0$, $0{,}0^0$, $+20{,}0^0$ die Stellung des Flüssigkeitsmeniskus in der Kapillaren bestimmt. Diese für die angegebenen Temperaturen direkt beobachteten Stellungen des Meniskus wurden noch dadurch kontrolliert, daß ich den Wert für die betreffende Temperatur aus mehreren für wenig höhere und tiefere Temperaturen beobachteten Stellungen interpolierte. Fielen direkt beobachteter und interpolierter Wert mehr als 0,2 mm auseinander, so wurde die Bestimmung wiederholt. Unter Berücksichtigung der Volumenänderungen des Dilatometers wurden für die angegebenen Temperaturen die Volumen der Flüssigkeit berechnet und durch Division durch das Volumen bei 0^0 auf dieses als Einheit bezogen. Zur Kontrolle wurde dieselbe Flüssigkeit stets gleichzeitig in zwei

Dilatometern untersucht. Wenn die berechneten Volumen, bezogen auf das bei 0°, bei einer Temperatur um mehr als 0,001 von einander abwichen, wurden die Messungen wiederholt.

Um mich zu überzeugen, daß infolge der schlechten Wärmeleitung die Erwärmung der untersuchten Stoffe nicht merklich zurückblieb gegen die des ständig stark gerührten Bades, nahm ich mehrmals auch eine Bestimmung der Volumen bei sinkender Temperatur vor, die aber stets zu Resultaten führte, die nur innerhalb der Fehlergrenzen von den bei steigender Temperatur ermittelten abwichen.

Die Temperaturbestimmung geschah mit Hülfe eines in 0,5 Grade geteilten Pentanthermometers, dessen Angaben nach der Korrektionstabelle der physikalisch-technischen Reichsanstalt korrigiert wurden, und zwar wurden stets sofort die korrigierten Temperaturen abgelesen. Der maximale Fehler bei der Ablesung des Thermometers betrug 0,2°; da die stärksten beobachteten Dilatationen weniger als 0,0015 pro Grad Temperaturänderung betrugen, übersteigen die durch die Ungenauigkeit der Temperaturablesung möglichen Fehler in keinem Falle den Betrag von 0,0003. Daß es zuweilen vorkam, daß die Abweichungen der gleichzeitig in zwei verschiedenen Dilatometern bestimmten Volumen untereinander stärker waren, ist zurückzuführen auf auch bei kräftigem Rühren nicht gänzlich zu vermeidende Temperaturdifferenzen zwischen den beiden Dilatometern, die den Betrag von 0,2° überschritten und die Fehler der Ablesung auf den Dilatometerskalen. Nach den Resultaten der gleichzeitig in 2 Dilatometern ausgeführten Untersuchungen übersteigen die Fehler der unten mitgeteilten Werte in keinem Falle den Betrag von 0,0008; bei der Mehrzahl der Stoffe sind sie kleiner als 0,0005.

Am Schlusse einer Beobachtungsreihe wurde das gut abgetrocknete Dilatometer gewogen, um das Gewicht der untersuchten Flüssigkeit zu ermitteln. Aus diesem und dem Volumen bei 0° wurde das spezifische Gewicht bei 0° berechnet.

Die ermittelten Werte der Volumen bei 0,0°, −30,0°, −50,0° und −80,0° gelang es, innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler durch einen Ausdruck der Form: $v_T = v_0 + aT + b \,.\, T^2$ darzustellen. Die drei Konstanten v_0, a und b wurden aus den Volumenwerten für $T = 273$, 223 und 193 berechnet.

Die Bestimmungen bei Temperaturen unterhalb −80° wurden in einem Pentanbad ausgeführt. Das von Kahlbaum bezogene „Pentan aus Petroleum“ blieb bei den tiefen Temperaturen genügend klar, so daß eine genaue Ablesung von Thermometer und

Dilatometerskala möglich war. Zur Abkühlung wurde unterhalb -80° flüssige Luft benutzt. Ein weites Messingrohr wurde in das Pentanbad geführt und mit flüssiger Luft gefüllt; dieses Rohr konnte gleichzeitig als Rührer benutzt werden. Es wurde solange flüssige Luft nachgefüllt, bis das Pentan genügend tief abgekühlt war. Die Beobachtung geschah dann bei steigender Temperatur. Der Anschluß der Volumen unter -80° an die früher über -80° bestimmten war stets ein befriedigender. Bei -80° wichen die Volumen aus beiden Beobachtungsreihen nur innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler von einander ab.

Bei den gut kristallisierenden Flüssigkeiten wurde außerdem noch die Volumenänderung beim Schmelzen ermittelt. Es war bei diesen Bestimmungen erforderlich, daß die Flüssigkeit von unten herauf sehr langsam kristallisierte, damit bei der Kristallisation nach Möglichkeit keine leeren Räume entstanden. Diese Bestimmungen der Volumenänderungen beim Schmelzen sind erheblich unsicherer als die anderen Messungen, da einerseits die Volumenänderung der kristallisierten Masse mit der Temperatur vernachlässigt werden mußte, und andererseits die Annahme gemacht wurde, daß die kristallisierte Masse das Dilatometer lückenlos erfüllte. Bei den Stoffen, für die eine Angabe des Schmelzpunktes in der Literatur nicht gegeben war, wurde er durch Aufnahme einer Abkühlungs- und Erwärmungskurve bestimmt.

Für die gut unterkühlbaren Alkohole wurde noch eine Dichtebestimmung bei etwa -190° nach der Methode des Schwebens eines Tropfens in einer Flüssigkeit gleicher Dichte ausgeführt. Die Ergebnisse dieser Versuche stehen an Genauigkeit allerdings weit zurück hinter den dilatometrischen Messungen. U. Behn und F. Kiebitz[1]) haben für die verschiedenen Temperaturen die spezifischen Gewichte der flüssigen Luft ermittelt; sie liegen zwischen 0,791 bei $-195{,}7^\circ$ und 1,131 bei $-182{,}4^\circ$.

Nach den Volumenwerten der Alkohole bei höheren Temperaturen war zu erwarten, daß bei etwa -190° ihre Dichten innerhalb dieser Grenzen der Dichte der flüssigen Luft liegen. Ein unterkühlter Alkoholtropfen muß also in der flüssigen Luft bei einer bestimmten Temperatur schweben. Es tritt dies ein bei der Temperatur des Schnittpunktes der Dichteisobaren von Alkohol und flüssiger Luft. Bei so tiefen Temperaturen können die durch die Formel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ dargestellten Volumenisobaren und entsprechend die Dichteisobaren als geradlinig betrachtet werden,

1) Ann. d. Phys. 12, 421 (1903).

da das Glied bT^2 noch keinen merklichen Einfluß auf die Gestalt der Kurve ausübt.

Die Beobachtungen wurden in folgender Weise ausgeführt: In möglichst frische flüssige Luft vom Siedepunkte $-192,5^\circ$ in einem Dewargefäß, das oben mit einem Wattepfropfen geschlossen war, um störende Eisbildung in der flüssigen Luft nach Möglichkeit zu vermeiden, wurden aus einer sehr fein ausgezogenen Pipette einige Tropfen Alkohol getropft. Bei der Abkühlung wurden sie glashart und blieben vollkommen klar durchsichtig. Sobald sie sich genügend abgekühlt hatten, sanken sie in der flüssigen Luft unter. Von einer Auflösung des Alkohols in der flüssigen Luft war auch nach längerer Zeit nichts zu bemerken. Mit steigender Temperatur, die mit dem Pentanthermometer verfolgt wurde, beobachtete man von einer bestimmten Temperatur an, daß die Kugeln von den nicht gänzlich zu vermeidenden Konvektionsströmen etwas gehoben wurden; zunächst sanken sie aber immer wieder schnell zu Boden. Bei weiterer Steigerung der Temperatur trat dann ein Zustand ein, in dem eine Wirkung der Schwere auf die Alkoholkugeln nicht mehr mit Sicherheit zu erkennen war; in diesem Moment wurde die Temperatur abgelesen. Der Zustand des Schwebens dauerte einige Minuten innerhalb eines Temperaturintervalles von 0,3—0,4° an. Dann begannen die Kugeln zunächst kaum merklich entgegen den Konvektionsströmen an die Oberfläche zu steigen. Der Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur des Schwebens von 0,3—0,4° entspricht eine Unsicherheit der Dichtebestimmung von 0,005—0,010.

Versuchsergebnisse.

Es wurden nach der Dilatometermethode die Volumenisobaren von Äther, Äthylalkohol, Methylalkohol, Allylalkohol, Aceton, Äthylbromid, Äthyljodid, Schwefelkohlenstoff und Phosphortrichlorid [1]) zu tiefen Temperaturen untersucht, soweit sich der Anwendung dieser Methode keine Hindernisse in den Weg stellten, sei es daß die Flüssigkeiten beim Schmelzpunkt kristallisierten,

1) Propylalkohol und Äthylchlorid, für die Amagat ebenfalls Volumenisothermen bestimmt hat, wurden nicht untersucht. Die Wärmeausdehnungen des von Amagat untersuchten Propylalkohols lassen keine Entscheidung darüber zu, ob Amagat Normal- oder Isopropylalkohol benutzt hat. Aus seinen Volumenänderungen wäre zu schließen, daß sein Propylalkohol ein Gemisch nicht sicher festzustellender Konzentration jener beiden Alkohole gewesen ist. Äthylchlorid wurde nicht untersucht, weil die Isothermen von Amagat nicht zu genügend hohen Drucken verfolgt worden sind.

sei es daß die unterkühlten Flüssigkeiten dickflüssig wurden. Die größtenteils von Kahlbaum bezogenen Flüssigkeiten wurden, wenn erforderlich, durch fraktionierte Destillation und durch gründliches Trocknen von Beimengungen möglichst befreit. Die Siedepunkte waren fast alle recht konstant. Um die von mir untersuchten Präparate näher zu charakterisieren, sind in der folgenden Tabelle die Siedepunkte, reduziert auf den Normaldruck von 760 m/m, und die spezifischen Gewichte, bezogen auf Wasser von 4° als Einheit zusammengestellt.

Tabelle 1.

Stoff	Siedepunkt	Spezifisches Gewicht bei 0°
Äther	34,6°	0,7356
Äthylalkohol	78,1°	0,8065
Methylalkohol	64,8°—65,0°	0,8103
Allylalkohol	96,4°	0,8699
Aceton	56,2°—56,3°	0,8140
Äthylbromid	38,4°	1,4973
Äthyljodid	71,7°	1,9845
Schwefelkohlenstoff	46,2°	1,2918
Phosphortrichlorid	76,0°	1,6128

Ein Vergleich dieser Beobachtungen mit den in der Literatur[1]) angegebenen Werten zeigte, daß für die Mehrzahl die Übereinstimmung mit früheren Beobachtungen durchaus befriedigend ist. Bemerkenswerte Abweichungen finden sich bei folgenden Flüssigkeiten: 1) bei Methylalkohol: Der Siedepunkt ist von der Mehrzahl der früheren Beobachter um etwa 1° höher angegeben; der an meinem Präparat beobachtete Siedepunkt steht aber in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Kopp vom Jahre 1855[2]) und von Schiff[3]); das spezifische Gewicht ist etwas kleiner als nach den Messungen früherer Autoren; nur mit den Dichten nach Graham[4]) und Dittmar und Fawsitt[5]) stimmt es gut überein. 2) bei Äthylbromid: Die Dichte meines Präparates ist etwas größer, als nach den Angaben früherer Beobachter; dem von Weg-

1) Eine fast vollständige Angabe der von mir zum Vergleiche herangezogenen Bestimmungen früherer Beobachter findet sich im Landolt-Börnstein.

2) Lieb. Ann. **94**, 282 (1855).

3) Lieb. Ann. **220**, 100 (1883).

4) Lieb. Ann. **123**, 105.

5) Trans. Roy. Soc. of Edinb. **33** (II), 509 (1888).

mann[1]) angegebenen Werte kommt mein Wert aber sehr nahe. 3) bei Äthyljodid: Der Siedepunkt ist um 0,5—1,0° tiefer als der von früheren Beobachtern bestimmte, stieg aber, wenn der größere Teil der Flüssigkeit verdampft war, nicht unerheblich an; der von mir beobachtete Dichtewert ist etwas größer als die früher beobachteten. Bei der Abkühlung zeigte das Jodäthyl auch noch nach der Reinigung eine starke Trübung; dies läßt darauf schließen, daß das von mir benutzte Äthyljodid noch erhebliche Beimengungen enthielt; infolgedessen sind die Werte für Jodäthyl in einen Teil der folgenden Tabellen nicht aufgenommen.

Tabelle 2 enthält die Zusammenstellung der von mir bestimmten Volumenwerte, bezogen auf das Volumen bei 0° als Einheit.

Tabelle 2.

Temp.	Äther	Äthyl-alkohol	Methyl-alkohol	Allyl-alkohol	Aceton	Äthyl-bromid	Äthyl-jodid	Phosphor-trichlorid	Schwefel-kohlen-stoff
293.0	1.0316	1.0216	1.0225	1.0204	1.0284	1.0283	1.0236	1.0226	1.0234
273.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
243.0	0.9585	0.9703	0.9670	0.9712	0.9618	0.9635	0.9683	0.9674	0.9681
223.0	0.9327	0.9508	0.9456	0.9520	0.9381	0.9400	0.9480	0.9461	0.9482
193.0	0.8970	0.9223	0.9140	0.9239	0.9043	0.9077	0.9174	0.9163	0.9192
183.0	—	—	0.9036	—	—	—	—	—	—
163.0	0.8643	—	—	—	—	—	0.8877	—	0.8914
153.0	—	0.8860	—	0.8869	—	0.8679	—	—	—
133.0	—	0.8683	—	—	—	—	—	—	—

In Tabelle 3 sind die Werte der Konstanten v_0, a und b der Interpolationsformel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ angegeben, mit denen die Formel eine Berechnung der beobachteten Volumen innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler unterhalb 0° ermöglicht. Die Reihenfolge der Flüssigkeiten ist gegen Tabelle 3 geändert. Die Flüssigkeiten sind in Tabelle 4 nach der Stärke der Assoziation geordnet, indem zunächst die vier normalen Stoffe Äther, Äthylbromid, Phosphortrichlorid und Schwefelkohlenstoff angeführt sind. Die stark assoziierten Alkohole stehen am Ende, zwischen beiden Gruppen das nur schwach assoziierte Aceton.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 2, 234.

Tabelle 3.

Stoff	v_0	$a \cdot 10^6$	$b \cdot 10^8$
Äther	0.7512	379	195
Äthylbromid	0.7662	436	154
Phosphortrichlorid	0.7703	552	106
Schwefelkohlenstoff	0.7700	606	87
Aceton	0.7468	548	139
Allylalkohol	0.7557	815	292
Äthylalkohol	0.7581	770	425
Methylalkohol	0.7291	874	433

Während unterhalb 0° die Interpolationsformel mit vorstehenden Konstanten die wahren Volumen recht befriedigend wiederzugeben imstande ist, versagt die Formel oberhalb 0°. Bei ungeänderter Beibehaltung der Konstanten ergeben sich schon bei +20° fast durchweg Abweichungen von 0,0015—0,0020 zwischen beobachtetem und berechnetem Volumen. Da die berechneten Werte stets kleiner als die gemessenen sind, würde ein besserer Anschluß der Formel auch bei höheren Temperaturen bis in die Nähe des Siedepunktes durch Hinzufügung eines Gliedes cT^3 zu erwarten sein.

Ein Vergleich der von mir bestimmten Änderungen des Volumens mit der Temperatur mit früher beobachteten Werten lehrte, daß der Anschluß der Beobachtungsreihen aneinander ein befriedigender ist. Bei +20° überschreiten die Abweichungen nur bei der kleineren Zahl der untersuchten Flüssigkeiten den Wert 0.0005, den mittleren Fehler meiner Bestimmungen. Nur beim Methylalkohol kommen Abweichungen von etwa 0.0020 vor; doch gehen hier die Angaben der verschiedenen Beobachter weit auseinander, so daß auch hier die von mir beobachteten Werte sich mit einem Teile der früher bestimmten innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler decken. Die von Pierre [1]) ermittelten Werte weichen bei Phosphortrichlorid für −30° um 0.0010, bei Methylalkohol für −40°, Jodäthyl und Schwefelkohlenstoff für −30° um 0.0015 und bei Bromäthyl für −30° sogar um 0.0020 von meinen Resultaten ab. Nur bei Äthylalkohol stimmen meine Angaben mit denen Pierres überein. Volumenbestimmungen unter 0° herunter finden sich noch bei Methylalkohol; sie rühren her von Dittmar und Fawsitt [2]). An deren Bestimmungen zeigen meine Volumenwerte weit besseren Anschluß als an die Pierres.

1) Ann. de Chim. et de Phys. [3] **15**, 362; Lieb. Ann. **56**, 139 (1845); Ann. de Chim. et de Phys. [3] **20**, 10; Lieb. Ann. **64**, 168.

2) Trans. Roy. Soc. of Edinb. **33** (II), 509 (1888).

Im folgenden soll die Frage untersucht werden, ob die nach der Formel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ auf die Temperatur der flüssigen Luft extrapolierten Volumen- bezw. Dichtewerte den wahren Werten für diese Temperatur gleichgesetzt werden dürfen. Tabelle 4 enthält die durch Extrapolation ermittelten Volumen und Dichten der infolge der Unterkühlungsmöglichkeit für diese Untersuchungen allein in Frage kommenden Alkohole, Tabelle 5 die experimentell ermittelten Temperaturgrenzen des Intervalles des Schwebens der Alkoholtropfen in der flüssigen Luft.

Tabelle 4.

Stoff	$v_T = v_0 + aT + bT^2$		Dichte	
	$T = 93$	$T = 83$	$T = 93$	$T = 83$
Äthylalkohol	0.8334	0.8249	0.9677	0.9777
Methylalkohol	0.8141	0.8046	0.9953	1.0071
Allylalkohol	0.8340	0.8253	1.0440	1.0550

Tabelle 5.

Stoff	Temperatur des Beginnens des Schwebens	Temperatur des Endes des Schwebens
Äthylalkohol	— 191.7°	— 191.3°
Methylalkohol	— 190.7°	— 190.3°
Allylalkohol	— 189.0°	— 188.6°

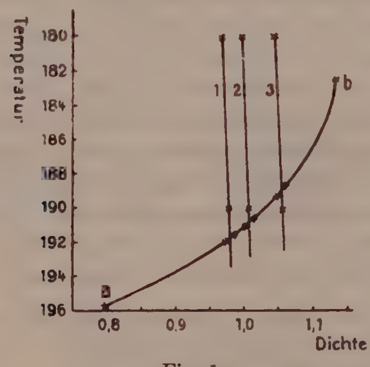


Fig. 1.

Figur 1 läßt erkennen, daß die nach der Formel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ berechneten Dichteisobaren des Äthylalkohols (1), des Methylalkohols (2) und des Allylalkohols (3) die Dichte-Temperaturkurve (ab) der flüssigen Luft nach Behn und Kiebitz bei Temperaturen schneiden, die innerhalb der durch die Punkte auf ab angegebenen Grenzen der Intervalle des Schwebens der Alkoholtropfen liegen. Mit großer Wahrscheinlichkeit ist also eine Extrapolation der Volumenwerte nach der Formel bis hinunter zur Temperatur der flüssigen Luft gestattet.

Nachdem so festgestellt ist, daß eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der zwischen 0° und −80° aufgestellten Interpolationsformel

$$v = v_0 + aT + bT^2$$

zu tieferen Temperaturen gestattet ist, da sich bei −190° noch keine Anzeichen finden, daß unsere Formel nicht mehr gilt, entsteht die Frage, ob man berechtigt ist, das Gültigkeitsgebiet der Formel bis zum absoluten Nullpunkt auszudehnen, daß heißt, ob v_0 als Wert des Volumens bei $T = 0$ unter Atmosphärendruck aufgefaßt werden darf. Auf diese Frage werde ich im 3. Kapitel näher eingehen.

Die Zusammenstellung der Konstanten der Interpolationsformeln für die Isobaren der verschiedenen untersuchten Flüssigkeiten in Tabelle 3 läßt einen beachtenswerten Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Formel und der molekularen Beschaffenheit der Flüssigkeiten erkennen.

Die ersten 5 Stoffe unterscheiden sich in der Größe der Koeffizienten, besonders der b-Werte sehr deutlich von den letzten drei Flüssigkeiten. Die ersten 5 Stoffe sind, nach der Temperaturabhängigkeit der Eötvösschen Konstanten zu urteilen als normal oder nur schwach assoziiert zu betrachten, während wir es bei den Alkoholen mit recht erheblich assoziierten Flüssigkeiten zu tun haben. Die b-Werte sind ein Maß für die Krümmung der Volumenisobaren:

$$\frac{d^2 v}{dT^2} = 2b;$$

es zeigt sich also, daß die Isobaren der assoziierten Flüssigkeiten viel schwächer gekrümmt sind, als die der normalen Stoffe. Diese Erscheinung hat ihren Grund wohl darin, daß die in den bisher untersuchten Fällen[1]) mit einer Volumenkontraktion verbundene

1) v. Laar. Z. f. phys, Chem. **31**, 12 (1899).

Aufspaltung der Polymolekel mit steigender Temperatur weiter fortschreitet. Die dadurch bedingte, infolge der eintretenden Verarmung an Polymolekeln mit steigender Temperatur stets kleiner werdende Volumenkontraktion kann leicht zur Folge haben, daß die stark positive Krümmung der Isobaren, wie wir sie bei den normalen Flüssigkeiten beobachten, geschwächt erscheint.

Die folgende Tabelle enthält die auf die Temperatur des Schmelzpunktes extrapolierten Volumen der Flüssigkeit (v_{fl}), die Volumenwerte der kristallisierten Masse (v_{kr}) und die Volumenänderungen beim Kristallisieren, einmal bezogen auf das Volumen der Flüssigkeit bei 0° als Einheit ($v_{fl} - v_{kr}$), dann bezogen auf 1 gr Substanz ($v_{fl} - v_{kr}$) gr. In der ersten Spalte finden sich die Schmelzpunkte nach Landolt-Börnstein. Sofern sich dort keine oder nur unsichere Werte des Schmelzpunktes fanden, wurde er durch Aufnahme einer Abkühlungs- und Erwärmungskurve bestimmt: Aceton, Phosphortrichlorid und Schwefelkohlenstoff. Bei Allylalkohol scheiterte die Bestimmung des Schmelzpunktes und der Volumenänderung beim Schmelzen daran, daß bei der Abkühlung bis $-190°$ keine Kristallisation eintrat; bei Äthylalkohol gelang es nicht, v_{kr} zu bestimmen, da die Kristallisationsgeschwindigkeit zu klein war.

Tabelle 6.

Stoff	Schmelzpunkt	v_{fl}	v_{kr}	$(v_{fl}-v_{kr})$	$(v_{fl}-v_{kr})\,gr$
Äther	— 117.6°	0.8572	0.7985	0.0587	0.0798
Methylalkohol	— 94.9°	0.8984	0.8377	0.0607	0.0749
Aceton	— 99.0°	0.8850	0.8404	0.0446	0.0548
Äthylbromid	— 125.5°	0.8660	0.7951	0.0709	0.0474
Äthyljodid	— 118.0°	0.8793	0.8253	0.0540	0.0272
Phosphortrichlorid	— 95.1°	0.9022	0.8472	0.0550	0.0341
Schwefelkohlenstoff	— 115.7°	0.8866	0.8313	0.0553	0.0428

2. Die Gleichung der Volumenfläche und die Berechnung ihrer Konstanten.

G. Tammann[1]) hat für einige der von Amagat untersuchten Stoffe den Nachweis geführt, daß es möglich ist, unter Verzicht

1) Göttinger Nachr. 1911. Math.-phys. Klasse.

auf einen guten Anschluß bei kleinen Drucken, mit Hülfe dreier Konstanten die von Amagat bestimmten Volumen von 500 Atm. an mit durchaus befriedigendem Anschluß an die Beobachtungen zu berechnen, und zwar nach der Gleichung:

1) $$(v - v_{p=\infty}) \cdot (K+p) = C \cdot T.$$

Die der Berechnung zu Grunde liegenden Beziehungen leiten sich sehr einfach aus dieser Gleichung ab. Die Gleichung der Schnittkurven parallel den Koordinatenebenen lauten:

1. Isotherme:

a) $$(v - v_{p=\infty}) \cdot (K+p) = (C \cdot T)_{T=\text{const}} = A \cdot K.$$

A bedeutet das freie Volumen für den Druck $p = 0$: $A = v_{p=0} - v_{p=\infty}$.

2. Isobare:

b) $$(v - v_{p=\infty}) = \left(\frac{C}{K+p}\right)_{p=\text{const}} \cdot T = a_p \cdot T.$$

3. Isometrische Linien:

c) $$K+p = \left(\frac{C}{v - v_{p=\infty}}\right)_{v=\text{const}} \cdot T = B_v \cdot T.$$

Gleichung a) ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, während b) und c) geraden Linien entsprechen. Deren Steigung ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen b) und c):

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = a_p \text{ und } \left(\frac{dp}{dT}\right)_v = B_v.$$

Gleichung c) geht also für $p = 0$ über in

2) $$K = B_v \cdot T_{p=0}.$$

$T_{p=0}$ ist die Temperatur, bei der die betreffende isometrische Linie $v = \text{const}$ die v, T-Ebene schneidet.

A und a_p stehen in dem Zusammenhange, daß für $p = 0$ die Beziehung gilt:

3) $$A = a_{p=0} \cdot T;$$

also gilt auch

4) $$C = \frac{AK}{T} = a_{p=0} \cdot K.$$

Die Berechnung der Konstanten der Gleichung 1) aus den von Amagat bestimmten Isothermen nach Gleichung a) führt nur zu recht unsicheren Werten von K und damit auch von $v_{p=\infty}$ und von C. Es hat dies seinen Grund darin, daß K nur in der Ver-

bindung $\frac{K}{K+p}$ in der Gleichung a) auftritt. Mit viel größerer Sicherheit ist die Berechnung von K nach der aus der Gleichung der isometrischen Linie abgeleiteten Beziehung $K = B_v . T_{p=1} - 1$ möglich. In den Tabellen Amagats sind die $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ = Werte für verschiedene Volumen bei einigen der untersuchten Flüssigkeiten angegeben. Sofern das nicht der Fall ist, können sie aus den Isothermen leicht berechnet werden. Die Berechnung von $T_{p=1}$ ist durch die im Vorhergehenden mitgeteilten Bestimmungen der Volumenisobaren bei Atmosphärendruck bis zu tiefen Temperaturen ermöglicht. G. Tammann[1]) hat nach dieser Methode folgende Werte von K berechnet:

Stoff	K
Äthyläther	2792 Atm
Äthylalkohol	2911 „
Methylalkohol	3050 „
Schwefelkohlenstoff	3691 „

Nach dem gleichen Verfahren habe ich für die übrigen Stoffe, die Amagat untersucht hat, bis auf Propylalkohol und Äthylchlorid die Werte des Binnendrucks ermittelt. p bedeutet in Tabelle 7 den aus Amagats Volumenisothermen für ein bestimmtes Volumen v bei der betreffenden Temperatur durch Interpolation ermittelten Druck in Atm.

Tabelle 7.

Allylalkohol:

v	p 9.6°	p 35.45°	B_v	$T_{p=1}$	K
0.98	413	764	13.6	252.4	3433
0.96	776	1154	14.6	231.4	3378
0.94	1230	1641	15.9	210.2	3342
0.92	1776	2229	17.5	188.8	3304
					K = 3364

1) Göttinger Nachrichten 1911, math.-phys. Klasse.

Aceton:

v	p 0.00°	p 35.05°	B_v	$T_{p=1}$	K
0,98	222	713	14.0	257.4	3604
0.96	490	1016	15.0	241.3	3620
0.94	826	1388	16.0	224.6	3594
0.92	1241	1841	17.1	207.1	3541
0.90	1739	2391	18.6	188.9	3513

$K = 3574$

Äthylbromid:

v	p 10.10°	p 42.25°	B_v	$T_{p=1}$	K
0.98	351	779	13.3	257.0	3418
0.96	622	1085	14.4	240.4	3462
0.94	958	1437	14.9	223.0	3323
0.92	1364	1883	16.1	204.7	3296

$K = 3375$

Äthyljodid:

v	p 10.60°	p 42.55°	B_v	$T_{p=1}$	K
0.98	417	848	13.5	253.9	3328
0.96	756	1216	14.4	234.6	3378
0.94	1154	1653	15.6	215.2	3357
0.92	1646	2179	16.7	195.6	3267

$K = 3333$

Phosphortrichlorid:

v	p 10.10°	p 42.10°	B_v	$T_{p=1}$	K
0.98	426	868	13.8	255.0	3519
0.96	771	1244	14.8	236.4	3499
0.94	1191	1691	15.4	217.0	3342
0.92	1689	2233	17.0	197.6	3359

$K = 3427$

Es bestätigte sich allgemein das schon von G. Tammann[1]) beobachtete Kleinerwerden der Werte des Produktes $B_v \cdot T_{p=1}$, wenn $T_{p=1}$ klein wird. Diese Abweichungen sind durch die Annahme zu erklären, daß bei tiefen Temperaturen die wahre Volumenfläche über der durch die Gleichung 1) dargestellten Fläche liegt (vergl. Kap. 3).

Mit den so gewonnenen K-Werten berechnete ich die Werte von $v_{p=\infty}$ und C nach einem Verfahren, das von dem von G. Tammann angewandten etwas abweicht. G. Tammann wollte unter Zugrundelegung einer möglichst kleinen Anzahl von Werten des Volumens die ganze Volumenfläche berechnen. Infolgedessen benutzte er zur Berechnung der Werte von $v_{p=\infty}$ und $a_{p=0}$ nur die Volumenwerte für $p = 1000$, 2000 und 3000 Atm. auf einer einzigen Isothermen, der für 0°. Ich legte dagegen Wert auf eine möglichst sichere Berechnung der $v_{p=\infty}$-Werte. Dazu hätte ich eigentlich alle Werte von Amagat benutzen und aus der Gesamtheit der berechneten $v_{p=\infty}$-Werte den Mittelwert ableiten müssen. Diese sehr zeitraubende Arbeit glaubte ich verringern zu dürfen, da ich annahm, daß man einen genügend sicheren Wert von $v_{p=\infty}$ erhält, wenn man nur für jede Isotherme aus zwei Volumenwerten, für $p = 1500$ und 3000 Atm., nach Gleichung a) den Wert von $v_{p=\infty}$ berechnet und aus diesen Werten für die verschiedenen Isothermen das Mittel bildet. $a_{p=0}$ wurde für jede Isotherme nach Gleichung 3) berechnet und dann der Mittelwert gebildet.

Die Abweichungen meiner Werte von den $v_{p=\infty}$-Werten G. Tammanns liegen bei Äther bei 0.0038, bei den Alkoholen bei 0.0025—0.0035, bei Schwefelkohlenstoff bei 0.0045.

Tabelle 8 enthält die für die verschiedenen Isothermen auf dem beschriebenen Wege berechneten Werte von A, $v_{p=\infty}$ und $a_{p=0}$, von den letzten beiden außerdem die Mittelwerte. Unter den Mittelwerten von $v_{p=\infty}$ ist noch der Wert der mittleren Abweichung der für die einzelnen Temperaturen berechneten $v_{p=\infty}$-Werte gegen den Mittelwert angegeben.

1) Göttinger Nachrichten 1911; math.-phys. Klasse.

Tabelle 8.

Äthyläther:

Temp.	A	$v_{p=\infty}$	$a_{p=0}$
0.00°	0.2955	0.6963	0.001082
10.80°	0.3069	0.6960	0.001082
20.20°	0.3175	0.6955	0.001083
30.35°	0.3317	0.6931	0.001093
40.45°	0.3454	0.6914	0.001102
49.95°	0.3573	0.6907	0.001106
	Mittel:	0.6938	0.001091
		± 21	

Äthylalkohol:

Temp.	A	$v_{p=\infty}$	$a_{p=0}$
0.00°	0.2694	0.7352	0.000987
9.60°	0.2790	0.7346	0.000987
19.80°	0.2861	0.7362	0.000977
30.65°	0.2981	0.7348	0.000982
40.35°	0.3041	0.7365	0.000978
	Mittel:	0.7355	0.000982
		± 7	

Methylalkohol:

Temp.	A	$v_{p=\infty}$	$a_{p=0}$
0.00°	0.2800	0.7228	0.001025
9.20°	0.2912	0.7209	0.001032
23.85°	0.3039	0.7220	0.001024
39.05°	0.3183	0.7222	0.001020
	Mittel:	0.7220	0.001025
		± 5	

Allylalkohol:

9.60°	0.2646	0.7466	0.000936
35.45°	0.2850	0.7483	0.000924
	Mittel:	0.7475	0.000930
		± 9	

Aceton:

Temp.	A	$v_{p=\infty}$	$a_{p=0}$
0.00°	0.2943	0.7018	0.001078
35.05°	0.3323	0.7005	0.001079
	Mittel:	0.7012	0.001079
		± 7	

Äthylbromid:

10.10°	0.3022	0.7050	0.001068
42.25°	0.3387	0.7023	0.001074
	Mittel:	0.7037	0.001071
		± 14	

Äthyljodid:

10.60°	0.2878	0.7271	0.001015
42.55°	0.3178	0.7274	0.001007
	Mittel:	0.7273	0.001011
		± 2	

Phosphortrichlorid:

10.10°	0.2802	0.7322	0.000990
42.10°	0.3159	0.7284	0.001003
	Mittel:	0.7298	0.000997
		± 14	

Schwefelkohlenstoff.

0.00°	0.2804	0.7221	0.001027
9.15°	0 2886	0.7221	0.001023
19.35°	0.3005	0.7206	0.001028
29.95°	0.3117	0.7200	0.001029
41.25°	0.3250	0.7185	0.001034
49.15°	0.3345	0 7173	0.001038
	Mittel:	0.7201	0.001038
		± 15	

Die Übereinstimmung der $v_{p=\infty}$-Werte für die verschiedenen Temperaturen ist befriedigend. Die stärksten Abweichungen vom Mittel finden sich bei Äther und Schwefelkohlenstoff. Hier beobachten wir auch einen deutlichen Gang der Werte von $v_{p=\infty}$ mit der Temperatur, dessen Grund wahrscheinlich in Fehlern der K-Werte zu suchen ist.

Es war zu erwarten, daß die Zustandsgleichung 1) bei Einführung der aus allen bekannten Isothermen gewonnenen Mittelwerte aus den angeführten Gründen einen besseren Anschluß an die beobachteten Volumen geben würde, als ihn G. Tammann mit seinen Konstanten erhalten konnte. Diese Erwartung hat sich, wie Tabelle 9 zu entnehmen ist, bestätigt; besonders beim Schwefelkohlenstoff kommen die berechneten Volumenwerte den wahren Werten viel näher. Die Tabelle enthält die Werte der Konstanten K, $v_{p=\infty}$ und C für die einzelnen Flüssigkeiten und von 500 zu 500 Atm. die Volumen nach Amagat (v_{am}) und die mit 10000 multiplizierten Differenzen der berechneten Volumen gegen die beobachteten: $\Delta v \,.\, 10^4$; Δv ist der Wert: Volumen nach Amagat minus berechnetes Volumen. Unter der Spalte der Δv-Werte ist noch der mittlere Fehler der berechneten Volumen gegen die beobachteten angegeben. Bei dieser Mittelbildung sind die bei einem Teile der Flüssigkeiten bei kleinen Drucken besonders bei hohen Temperaturen auftretenden positiven Abweichungen unberücksichtigt gelassen; diese Werte sind in der Tabelle eingeklammert.

Tabelle 9.

Äthyläther: $K = 2792$, $v_{p=\infty} = 0.6938$, $C = a_{p=0} \,.\, K = 3.0461$

p	0.00° $A = 0.2978$		10.80° $A = 0.3096$		20.20° $A = 0.3199$		30.35° $A = 0.3310$	
	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$
1	1.0000	(+ 84)	1.0166	(+132)	1.0320	(+183)	1.0495	(+247)
500	0.9465	+ 1	0.9575	+11	0.9674	(+ 21)	0.9782	(+ 37)
1000	0.9130	− 1	0.9219	+ 1	0.9295	+ 2	0.9380	+ 5
1500	0.8885	+10	0.8956	+ 4	0.9020	+ 1	0.9089	− 2
2000	0.8684	+11	0.8750	+ 8	0.8805	+ 3	0.8870	+ 4
2500	0.8522	+13	0.8580	+ 9	0.8631	+ 5	0.8686	+ 2
3000	0.8387	+14	0.8439	+ 9	0.8485	+ 5	0.8530	− 3
		+ 8		+ 7		+ 3		+ 1

p	40.45°	$\Delta = 0.3420$	49.95°	$\Delta = 0.3523$
	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$
1	1.0680	(+322)	—	—
500	0.9889	(+ 50)	0.9995	(+ 69)
1000	0.9464	+ 9	0.9545	+13
1500	0.9160	— 3	0.9231	+ 1
2000	0.8928	— 2	0.8988	— 2
2500	0.8740	— 2	0.8790	— 7
3000	0.8578	— 8	0.8629	— 7
		— 1		0

Äthylalkohol: $K = 2911$. $v_{p=\infty} = 0.7355$. $C = 2.8586$.

p	0.00° $\Delta = 0.2681$		9.60° $\Delta = 0.2775$		19.80° $\Delta = 0.2875$		30.65° $\Delta = 0.2981$		40.35° $\Delta = 0.$	
	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	Δv
1	1.0000	—36	1.0103	—27	1.0213	—17	1.0334	— 2	1.0446	+
500	0.9616	—27	0.9689	—34	0.9775	—34	0.9863	—35	0.9950	—
1000	0.9344	— 6	0.9409	—11	0.9477	—18	0.9552	—22	0.9618	—
1500	0.9130	+ 6	0.9187	+ 1	0.9250	— 2	0.9315	— 7	0.9372	—
2000	0.8954	+10	0.9008	+ 5	0.9062	+ 2	0.9121	— 1	0.9174	—
2500	0.8806	+ 9	0.8854	+ 6	0.8904	+ 2	0.8958	— 1	0.9006	—
3000	0.8679	+ 4	0.8720	— 2	0.8771	0	0.8816	— 7	0.8863	—
		— 6		— 9		—10		—11		—

Methylalkohol: $K = 3050$. $v_{p=\infty} = 0.7220$. $C = 3.1263$.

p	0.00° $\Delta = 0.2800$		9.20° $\Delta = 0.2893$		23.85° $\Delta = 0.3043$		39.05° $\Delta = 0.3199$	
	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\Delta v \cdot 10^4$
1	1.0000	—20	1.0101	—12	1.0268	+ 5	1.0438	+19
500	0.9604	—22	0.9685	—20	0.9813	—21	0.9943	—25
1000	0.9324	— 5	0.9391	— 7	0.9499	—12	0.9610	—18
1500	0.9105	+ 8	0.9161	+ 1	0.9257	— 3	0.9356	— 8
2000	0.8923	+12	0.8976	+ 8	0.9060	+ 2	0.9148	— 4
2500	0.8769	+ 9	0.8816	+ 5	0.8893	— 1	0.8974	— 6
3000	0.8640	+ 9	0.8677	— 1	0.8752	— 2	0.8827	— 6
		— 1		— 4		— 5		— 7

Allylalkohol: $K = 3364$, $v_{p=\infty} = 0{,}7475$, $C = 3{,}1285$.

p	9.60° v_{am}	$A = 0.2628$ $\varDelta v \cdot 10^4$	35.45° v_{am}	$A = 0.2869$ $\varDelta v \cdot 10^4$
1	1.0097	− 6	1.0371	+27
500	0.9748	−15	0.9962	−11
1000	0.9499	− 2	0.9674	−12
1500	0.9296	+ 3	0.9454	− 5
2000	0.9128	+ 5	0.9273	− 1
2500	0.8984	+ 1	0.9118	− 3
3000	—	—	—	—
		− 2		− 1

Aceton: $K = 3574$, $v_{p=\infty} = 0.7012$, $C = 3.8563$.

p	0.00° v_{am}	$A = 0.2946$ $\varDelta v \cdot 10^4$	35.05° v_{am}	$A = 0.3323$ $\varDelta v \cdot 10^4$
1	1.0000	(+42)	1.0503	(+168)
500	0.9593	− 4	0.9967	(+ 40)
1000	0.9311	− 5	0.9609	− 2
1500	0.9091	+ 4	0.9346	− 7
2000	0.8909	+ 8	0.9139	− 4
2500	0.8753	+ 8	0.8964	− 3
3000	—	—	0.8812	− 7
		+ 2		− 5

Äthylbromid: $K = 3375$, $v_{p=\infty} = 0.7037$, $C = 3.6146$.

p	10.10° v_{am}	$A = 0.3032$ $\varDelta v \cdot 10^4$	42.25° v_{am}	$A = 0.3376$ $\varDelta v \cdot 10^4$
1	1.0137	(+68)	1.0617	(+204)
500	0.9684	+ 6	1.0017	(+40)
1000	0.9377	+ 1	0.9653	+12
1500	0.9142	+ 6	0.9368	− 6
2000	0.8949	+ 8	0.9154	− 3
2500	0.8786	+ 7	0.8969	− 8
3000	—	—	—	—
		+ 6		− 1

Äthyljodid: $K = 3333$, $v_{p=\infty} = 0.7273$, $C = 3.3697$.

p	10.60°	$A = 0.2867$	42.55°	$A = 0.3190$
	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$
1	1.0120	−10	1.0518	(+55)
500	0.9747	−19	1.0037	−10
1000	0.9473	− 5	0.9713	−14
1500	0.9255	+ 5	0.9466	− 7
2000	0.9077	+12	0.9262	− 5
2500	0.8921	+10	0.9095	− 1
3000	0.8785	+ 3	0.8947	− 5
		− 1		− 7

Phosphortrichlorid: $K = 3427$, $v_{p=\infty} = 0.7298$, $C = 3.4167$.

p	10.10°	$A = 0.2823$	42.10°	$A = 0.3142$
	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$	v_{am}	$\Delta v \,.\, 10^4$
1	1.0117	− 4	1.0509	(+69)
500	0.9752	−10	1.0044	+ 4
1000	0.9487	+ 4	0.9725	− 5
1500	0.9271	+ 9	0.9482	− 2
2000	0.9093	+12	0.9279	− 3
2500	0.8944	+14	0.9115	0
3000	0.8816	+13	0.8965	− 4
		+ 5		− 2

Schwefelkohlenstoff: $K = 3691$, $v_{p=\infty} = 0.7201$, $C = 3.8017$.

p	0.00° $\varDelta = 0.2812$		9.15° $\varDelta = 0.2906$		19.35° $\varDelta = 0.3011$		29.95° $\varDelta = 0.3120$		41.25° $\varDelta = 0.3238$		49.15° $\varDelta = 0.3318$	
	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$	v_{am}	$\varDelta v \cdot 10^4$
1	1.0000	—13	1.0104	— 3	1.0225	+13	1.0355	(+34)	1.0500	(+62)	1.0605	(+86)
500	0.9672	— 6	0.9748	—31	0.9840	—13	0.9940	— 9	—	—	—	—
1000	0.9417	+ 4	0.9485	— 2	0.9564	— 6	0.9647	— 9	0.9738	—11	0.9802	—10
1500	0.9215	+15	0.9273	+ 6	0.9343	+ 1	0.9416	— 3	0.9495	— 8	0.9551	— 9
2000	0.9046	+21	0.9101	+15	0.9160	+ 6	0.9226	+ 1	0.9293	— 8	0.9343	—10
2500	0.8897	+19	0.8948	+14	0.9003	+ 7	0.9061	0	0.9122	— 9	0.9167	—12
3000	0.8768	+16	0.8813	+ 9	0.8864	+ 2	0.8919	— 3	0.8977	—10	—	—
		+ 8		+ 1		+ 1		— 4		— 9		—10

Nach den Schätzungen von G. Tammann [1]) beträgt der mittlere Fehler der Bestimmungen Amagats wenigstens 0.0006. Der Mittelwert der sämtlichen Abweichungen Δv für die einzelnen Flüssigkeiten beträgt nach Tabelle 9 nur in einem Falle, beim Äthylalkohol 0.0009; bei den übrigen Stoffen liegt er zwischen 0.0002 und 0.0004, also unterhalb des Wertes des mittleren Fehlers.

Damit ist die von G. Tammann bisher nur für 4 Flüssigkeiten, Äther, Äthylalkohol, Methylalkohol und Schwefelkohlenstoff, nachgewiesene Gültigkeit der Zustandsgleichung 1) für 5 weitere Flüssigkeiten erwiesen worden; bei den schon von G. Tammann berechneten Flüssigkeiten, besonders beim Schwefelkohlenstoff hat sich ein noch besserer Anschluß der berechneten Werte an die beobachteten bei genauerer Berechnung der Konstanten ergeben.

Besonders starke Differenzen Δv beobachtet man bei kleinen Drucken — unterhalb 1000 Atm. —, die meist mit steigender Temperatur größer werden. Diese Abweichungen sind bei der Berechnung des mittleren Fehlers nicht berücksichtigt worden. Da in diesen Fällen Δv positiv ist, sind also hier die wahren Volumen größer als die berechneten. Je höher die Temperatur ist, um so höher liegt die Volumenfläche Amagats über der durch Gleichung 1) dargestellten Fläche. Daß das wahre Verhalten der Flüssigkeitsvolumen bei kleinen Drucken der Gleichung 1) nicht gehorcht, geht schon hervor aus der Gestalt der Isobaren für $p = 1$ Atm. Gleichung 1) fordert für die Isobaren geradlinigen Verlauf, während die Isobaren bei $p = 1$ Atm. durchweg eine beträchtliche positive Krümmung zeigen. Der verstärkte Anstieg der Volumenfläche im Gebiete kleiner Drucke bei höheren Temperaturen kommt auch in der Volumenisobaren für $p = 1$ Atm. zum Ausdruck. Eine Interpolationsformel der Form $v_T = v_0 + aT + bT^2$ genügt hier nicht mehr zur Wiedergabe der Isobaren; erst die Zufügung eines Gliedes cT^3 würde wohl wieder einen befriedigenden Anschluß ermöglichen. Diese weit über die Versuchsfehler reichenden Abweichungen der Volumenfläche von der durch Gleichung 1) dargestellten bei kleinen Drucken machen für das Gültigkeitsgebiet der Gleichung 1) besonders bei höheren Temperaturen eine Abgrenzung gegen das Gebiet kleiner Drucke notwendig.

Die Hochbiegung der wahren Volumenfläche gegen die berechnete tritt stark hervor nur bei den normalen Flüssigkeiten: Äther, Aceton, Äthylbromid, Äthyljodid, Phosphortrichlorid und Schwefelkohlenstoff. Bei den assoziierten Alkoholen sind bei den

1) Göttinger Nachrichten 1911, math.-phys. Klasse.

entsprechenden Drucken und Temperaturen die Differenzen Δv viel kleiner, z. T. sogar negativ; der Anstieg zu größeren positiven Δv-Werten mit steigender Temperatur ist zwar ebenfalls deutlich zu erkennen, jedoch viel schwächer als bei den normalen Flüssigkeiten.

3. Die Gestalt der Volumenfläche bei tiefen Temperaturen.

Schon bei der Berechnung der K-Werte nach Gleichung 2) haben wir erkannt, daß bei tiefen Temperaturen die Zustandsgleichung nicht mehr geeignet sein wird, die wahre Volumenfläche wiederzugeben. Welcher Art wir uns die hier auftretenden Abweichungen vorzustellen haben, soll jetzt näher untersucht werden.

Gleichung 1) fordert die Gleichheit der Grenzvolumen für unendlich hohen Druck und für den absoluten Nullpunkt der Temperatur. Es soll nun geprüft werden, ob für die untersuchten Flüssigkeiten nach unseren Kenntnissen über ihre Volumen in Abhängigkeit von Druck und Temperatur die Gleichung $v_{T=0} = v_{p=\infty}$ als erfüllt anzunehmen ist.

Ich möchte zunächst die Betrachtungen durchführen unter Verzicht auf die Nernst-Plancksche Forderung, daß

$$\lim_{T=0} \left(\frac{dv}{dT}\right)_p = 0,$$

daß also alle Isobaren senkrecht auf die vp-Ebene auftreffen. Die von mir bis tiefstens $T = 130$ verfolgten Isobaren lassen eine stärkere Abnahme des Ausdehnungskoeffizienten als sie der Formel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ entspricht, bei tieferen Temperaturen nicht erkennen, jedenfalls noch nicht bei den tiefsten Temperaturen, bei denen ich gemessen habe. Die Frage, ob die für diese Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen zu erwartende Abnahme der spezifischen Wärme einer entsprechenden Änderung des Ausdehnungskoeffizienten parallel geht, beabsichtige ich weiter zu verfolgen.

Ließe man eine Erweiterung des Gültigkeitsgebietes der Interpolationsformel $v_T = v_0 + aT + bT^2$ bis zum absoluten Nullpunkt zu, so würde v_0 direkt das Volumen bei $T = 0$ und $p = 1$ Atm. messen. Entsprechend der aus Tabelle 8 zu entnehmenden mittleren Unsicherheit der $v_{p=\infty}$-Werte für die einzelnen Flüssigkeiten von 0.001—0.002 sind in der folgenden Tabelle die Volumen nur auf 3 Dezimalstellen angegeben.

Tabelle 10.

Stoff	$v_{T=0,\,p=1}$	$v_{p=\infty}$	$(v_{T=0,\,p=1} - v_{p=\infty}) \cdot 10^3$
Äthyläther	0.751	0.694	57
Äthylbromid	0.766	0.704	62
Phosphortrichlorid	0.770	0.730	40
Schwefelkohlenstoff	0.770	0.720	50
Aceton	0.747	0.701	46
Allylalkohol	0.756	0.748	8
Äthylalkohol	0.758	0.730	22
Methylalkohol	0.729	0.722	7

Vergleicht man die beiden Grenzvolumen bei $p = \infty$ und $T = 0$, $p = 1$ miteinander, so findet man, daß das Volumen beim absoluten Nullpunkt unter Atmosphärendruck sich für alle untersuchten Stoffe merklich größer ergibt als das Volumen bei unendlich hohem Druck. Auffällig ist der auch hier hervortretende Unterschied der normalen und assoziierten Flüssigkeiten. Bei den ersten fünf Stoffen, den normalen, beträgt der Wert $(v_{T=0,\,p=1} - v_{p=\infty})$ im Durchschnitt 17 % des freien Volumens A bei 0°, bei den drei anormalen Alkoholen dagegen nur 4.5 %.

Wir wollen uns jetzt ein Bild davon machen, welche Änderungen wir an der durch Gleichung 1) gegebenen Volumenfläche auf Grund der Tatsache der Kompressibilität der Flüssigkeiten beim absoluten Nullpunkt anbringen müßten.

Wir müßten eine Hochbiegung der Volumenfläche für tiefe Temperaturen und endliche Drucke in der in Fig. 2 veranschaulichten Weise annehmen. Das Volumen bei $p = 0$ und $T = 0$ nach Gleichung 1), dargestellt durch den Punkt a, ginge dabei über in das größere dem Punkte b entsprechende. Ob die Volumenisothermen beim absoluten Nullpunkt noch dem für höhere Temperaturen gültigen Isothermengesetze a) gehorchen würden, ist eine offene Frage.

Die Isobaren sind im Gebiete der Gültigkeit von Gleichung 1) gerade Linien. Die Isobare für $p = 1$ Atm. würde, die Gültigkeit von Gleichung 1) für kleine Drucke vorausgesetzt, durch die Gerade ac dargestellt (Fig. 2). Wegen der für Atmosphärendruck festgestellten Krümmung der Isobaren kann die Isobare für $p = 1$ Atm. nicht mit der Geraden ac zusammenfallen. Die Beobachtung, daß die Isobare für Atmosphärendruck bei tieferen Tem-

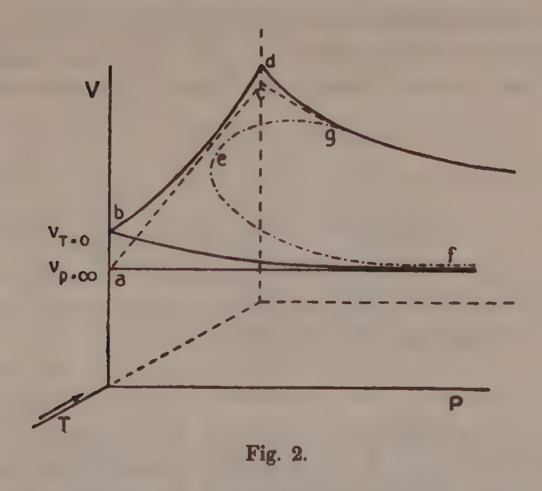


Fig. 2.

peraturen stets geradliniger wird, ist nicht in dem Sinne zu deuten, daß bei tieferen Temperaturen die Isobare der Gleichung 1) gehorcht. Diese Deutung wäre zulässig, wenn die Extrapolation der Isobaren beim absoluten Nullpunkt zum Werte $v_{p=\infty}$ führen würde. Da das nicht der Fall ist, müssen wir folgern, daß die wahre Volumenisobare für $p = 1$ Atm. *bd* in ihrem ganzen Verlaufe über der Geraden *ac* liegt. Eine entsprechende Abweichung vom geradlinigen Verlaufe würden alle Isobaren bei tiefen Temperaturen zeigen, nur würde mit steigendem Druck die Abweichung erst bei tieferen Temperaturen einsetzen, entsprechend der in Figur 2 durch die Kurve *ef* angedeutete Abnahme der Breite des Gebietes, in dem wir die Hochbiegung der realen Volumenfläche gegen die Fläche der Gleichung 1) anzunehmen hätten.

Die in Figur 2 für höhere Temperaturen bei kleinen Drucken in der Umgebung des Punktes *c* gezeichnete Hochbiegung der Fläche soll den im vorigen Kapitel in jenem Druck-Temperaturgebiet festgestellten Differenzen der nach Gleichung 1) berechneten Volumen gegen die von Amagat bestimmten Rechnung tragen. Das Gebiet, in dem Gleichung 1) versagt, ist auf der Volumenfläche durch die Kurve *g e* begrenzt.

Vom Verlauf der isometrischen Linien müßte man sich folgendes Bild auf Grund der nach den Extrapolationen anzunehmenden Hochbiegung der Volumenfläche machen. Bei unbegrenzter Gültigkeit der Gleichung 1) würden die Verlängerungen sämtlicher geradlinigen isometrischen Linien eine in der *pv*-Ebene im Abstande $p = -K$ liegende Parallele zur *v*-Achse schneiden. Die Ablen-

kungen, die diese Linien durch die Hochbiegung der Volumenfläche bei tiefen Temperaturen erfahren würden, sind am klarsten in der Projektion auf die pT-Ebene, wie sie in Fig. 3 gegeben ist, zu

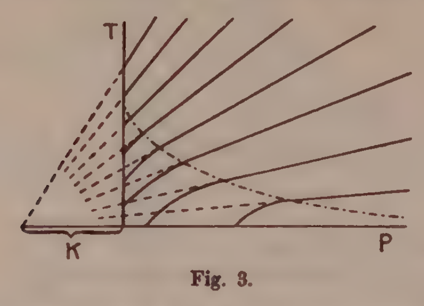


Fig. 3.

erkennen. Die geradlinigen Stücke der hier gezeichneten Kurven mit ihren gestrichelten Verlängerungen verdeutlichen den Verlauf im Falle, daß der Gültigkeitsbereich der Gleichung 1) nach tieferen Temperaturen hin keine Begrenzung zeigen würde. Für $T = 0$ würde nach der Gleichung der isometrischen Linie c) $B_v = \infty$ werden. Auf die Bedenken, die dem Unendlichwerden des Differentialquotienten $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ entgegenstehen, hat schon G. Tammann [1]) hingewiesen. In Figur 3 ist nun angedeutet worden, wie wir uns die Beeinflussung der Gestalt der isometrischen Linien infolge der Hochbiegung der Volumenfläche bei tiefen Temperaturen vorzustellen hätten. Innerhalb des durch die gestrichelte Kurve abgegrenzten Gebietes der pT-Ebene, in dem allein die Deformation einträte, würden wir ein Umbiegen der isometrischen Linien in der Richtung nach der pv-Fläche beobachten. Mit abnehmendem Volumen würden die Abweichungen gegen den geradlinigen Verlauf stärker, und es würde der Fall eintreten, daß die Projektionen der isometrischen Linien die p-Achse bei positiven Drucken treffen. Ob die p-Achse mit abnehmendem Volumen unter weiter wachsendem Winkel von den Projektionen der isometrischen Linien geschnitten würde, oder ob die Winkel wieder abnehmen würden, spielt für unsere Betrachtungen keine Rolle. Soviel ist zu erkennen, daß für endliche Drucke infolge der Hochbiegung der Fläche ein Unendlichwerden des Differentialquotienten $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ nicht eintreten würde. Mehr Interesse hat die Erörterung der $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$-Werte an den Stellen

1) Göttinger Nachrichten 1911; math.-phys. Klasse.

$T_{p=0}$, also an den Schnittpunkten der Projektionen der isometrischen Linien mit der T-Achse. Hier würde sich mit kleiner werdendem Volumen, solange wir uns im Gebiete des normalen Verlaufes befinden, ein ständiges Wachsen der $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=0}$-Werte zeigen, sobald wir aber in das Gebiet der Abweichungen eintreten, würden die $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=0}$-Werte wieder abnehmen. Es ist hiernach einleuchtend, daß die isometrischen Schnitte nicht mehr unter dem der Gleichung 2) entsprechenden Winkel auf die T-Achse auftreffen würden, sondern unter viel kleineren. Die isometrischen Linien würden also die T-Achse bei tieferen Temperaturen treffen, als es beim geradlinigen Verlauf derselben, d. h. bei Gültigkeit von Gleichung 2) der Fall wäre. Auch die Abnahme des Produktes $B_v \cdot T_{p=1}$ bei kleinen Werten von $T_{p=1}$ findet durch die beschriebene Aufbiegung der realen Volumenfläche ihre Erklärung.

Wie verhält sich die Hochbiegung der Volumenfläche bei tiefen Temperaturen gegenüber den Folgerungen des Nernstschen Wärmetheorems? Planck [1]) hat aus diesem gefolgert, daß der Ausdehnungskoeffizient des Volumens bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt sich dem Werte Null nähern müßte. Mit Planck käme man also zu dem Schluß, daß bei sehr tiefen Temperaturen unsere Interpolationsformel für die Volumenisobare ihre Brauchbarkeit verlieren müßte, da das Volumen sehr viel langsamer abnähme, als die Formel verlangen würde. Die Konstante v_0 der Interpolationsformel würde nur einen unteren Grenzwert des Volumens beim absoluten Nullpunkt darstellen. Wenn also auch die Forderung von Planck zuträfe, so bliebe die Folgerung, daß

$$v_{T=0,\, p=1} > v_{p=\infty}$$

wäre, doch noch bestehen. Denn durch den von Planck geforderten Verlauf der Volumenisobaren würde das Volumen $v_{T=0,\, p=1}$ noch größer ausfallen als nach meiner Interpolationsformel. Man kommt also unabhängig von den beiden diskutierten Annahmen über die Größe der Wärmeausdehnung bei $T = 0$ zu dem Resultate, daß beim absoluten Nullpunkt die Kompressibilität der amorphen Stoffe noch merklich ist.

Betreffs des Verlaufes der isometrischen Linien würde sich, wenn die Wärmeausdehnung bei $T = 0$ Null wäre, eine bestimmte Richtung ergeben, mit der sie auf die pv-Ebene aufträfen. Es gilt

1) Planck, Thermodynamik. 3. Aufl. Leipzig 1911, 271.

allgemein die Beziehung:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = -\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)_p}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_T}.$$

Da nun beim absoluten Nullpunkt für die Kompressibilität ein endlicher, für die Wärmeausdehnung ein verschwindender Wert anzunehmen wäre, ergäbe sich die Forderung

$$\lim_{T=0}\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = 0.$$

Alle isometrischen Linien träfen dann normal auf die *vp*-Ebene auf.

Zum Schluß möchte ich Herrn G. Tammann für die Anregungen bei Ausführung dieser Arbeit auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

Zur astronomischen Ortsbestimmung auf See- und Luftschiffen.

Von

C. Runge.

Mit 4 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Oktober 1911.

Die Beobachtung der Höhe eines Gestirns liefert mit Hilfe eines Chronometers bekanntlich einen geometrischen Ort für den Standort des Beobachters eine „Standlinie“, und innerhalb eines hinreichend kleinen Teils der Erdoberfläche kann diese Standlinie als eine Gerade angesehen werden. Aus zwei zu gleicher Zeit beobachteten Höhen zweier Gestirne ergibt sich der Standort des Beobachters als Schnittpunkt der beiden Standlinien. Sind die beiden Höhen nicht zu gleicher Zeit beobachtet worden und ist der Beobachtungsort inzwischen gewechselt, so kann er immer noch als Schnittpunkt zweier Standlinien bestimmt werden, indem man die beiden beobachteten Standlinien auf denselben Zeitpunkt reduziert. Dazu ist aber erforderlich, daß man weiß, wie der Beobachter inzwischen seinen Ort geändert hat. Man braucht dann nur jeden Punkt der Standlinie von dem Augenblick der Beobachtung an gleichzeitig dieselben Veränderungen des Orts mitmachen zu lassen, die der Beobachter macht, so erhält man in jedem Augenblick eine Standlinie auf der er sich zu der betreffenden Zeit befunden haben muß. Handelt es sich um einen hinreichend kleinen Teil der Erdoberfläche, so kann man sagen, daß die Standlinie bei diesen Verschiebungen grade und sich selbst parallel bleibt. Wir können uns auch so ausdrücken: Es werde ein Koordinatensystem eingeführt, das sich über den Teil der

Erdoberfläche, um den es sich handelt, parallel mit sich in der Art bewegt, daß der Anfangspunkt in derselben Zeit dieselben Veränderungen des Orts macht wie der Beobachter d. h. sich parallel dem Beobachter und um die gleichen Strecken fortbewegt; relativ zu einem solchen System bleibt die Standlinie unverändert. Man braucht daher nur beide Standlinien in dieses System einzutragen, so liefert der Schnittpunkt den Standort des Beobachters zu jeder beliebigen Zeit.

Das ist grade das Verfahren, dessen sich die Seeleute bedienen, wenn sie die astronomisch bestimmten Standlinien relativ zu dem Schiffsort nehmen, der sich durch die Logge ergibt. Denn wenn auch der gegißte Schiffsort von dem wahren Schiffsort verschieden ist, so weichen doch seine Veränderungen in der Zeit zwischen den Beobachtungen (abgesehen von Versetzungen von denen sogleich die Rede sein soll) von den wahren nur unerheblich ab, und wir können ihn daher zum Anfangspunkt eines beweglichen Koordinatensystems machen relativ zu dem die beobachteten Standlinien festliegen. So verzeichnen z. B. die Seeleute das Resultat der Beobachtung einer Sonnenhöhe als 7′ W, wenn sie sagen wollen, daß die Standlinie dadurch erhalten wird, daß man eine durch den Schiffsort der Logge in der richtigen Richtung gezogene Grade 7′ nach Westen verschiebt. Der wahre Schiffsort braucht dann natürlich keineswegs 7′ westlich vom gegißten Schiffsort zu liegen; die mögliche wahre Lage wird relativ zum gegißten Schiffsort eben durch die ganze Standlinie ausgedrückt.

Dabei haben wir angenommen, daß keine unbekannten Versetzungen des Schiffes in der Zwischenzeit stattgefunden haben. Wenn das der Fall wäre, so würden die wahren Standlinien zwar in einem beweglichen Koordinatensystem, das die wahren Ortsveränderungen mitmacht, festliegen; in einem System aber, das die unbekannten Versetzungen nicht berücksichtigt, würden sie sich verschieben und zwar würden sie in diesem System grade die nicht berücksichtigten Verschiebungen ausführen.

Unter der Voraussetzung nun, daß es sich um eine Versetzung handelt, die während der Zeit zwischen den Beobachtungen das Schiff gleichmäßig verschiebt d. h. in gleichen Zeiten um das gleiche Stück und in derselben Richtung, kann man daran denken, die unbekannte Versetzung dadurch zu ermitteln, daß man mehr als zwei Standlinien bestimmt. Es ist die Aufgabe dieser Abhandlung zu zeigen, wie das zu machen ist.

Wir wollen zunächst annehmen, es seien zu drei verschiedenen Zeiten Standlinien beobachtet und relativ zu dem Schiffsort der

Logge, den wir zum Koordinatenanfangspunkt machen, graphisch in ein System eingetragen, dessen Abszissen und Ordinaten Breiten- und Längenunterschiede gegen den Schiffsort der Logge bedeuten. Wenn sich nun zeigt, daß die drei Standlinien nicht durch einen Punkt laufen, so kann unter der Voraussetzung fehlerfreier Beobachtungen zunächst geschlossen werden, daß eine Versetzung stattgefunden haben muß. Aber noch mehr, man kann aus den drei Standlinien und den zugehörigen Zeiten eine Standlinie für jede beliebige andere Zeit ableiten. Das geschieht in der folgenden Weise.

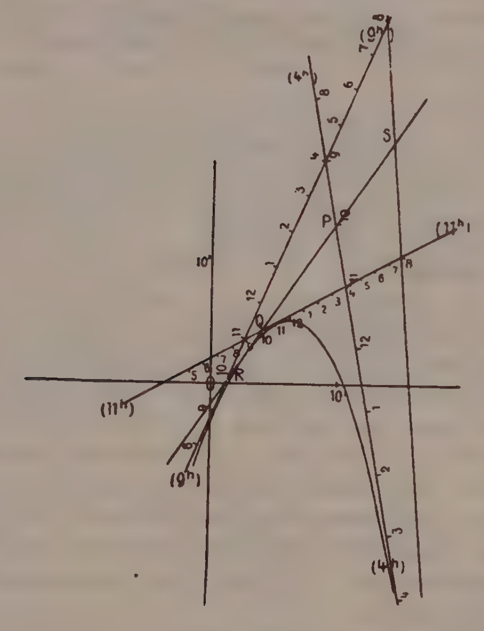


Fig. 1

Es sei z. B. die mit 9^h (Fig. 1) bezeichnete Grade eine um 9^h morgens ermittelte Standlinie und die mit 11^h und 4^h bezeichneten seien um 11^h vormittags und 4^h nachmittags gewonnen. Die um 9^h und 11^h vormittags gefundenen Standlinien laufen ziemlich nahe an dem Schiffsort der Logge vorbei, so daß sie ohne die dritte Standlinie die Vorstellung erwecken würden als sei keine wesentliche Abweichung vorhanden. Die dritte Standlinie läßt nun über eine Versetzung keinen Zweifel. Wir belegen nun die Standlinien mit je einer Zeitskala mit äquidistanten Intervallen. Auf der Strandlinie 9^h ist z. B. die Zeitskala so anzuordnen, daß

den Schnittpunkten mit den Standlinien 11^h und 4^h die Zeiten 11^h und 4^h zukommen, und analog auf den andern beiden. Wollen wir nun wissen, wo sich das Schiff z. B. um 8^h nachmittags befand, so brauchen wir nur auf den drei Zeitskalen die Punkte aufzusuchen die der Zeit 8^h nachmittags entsprechen. Sie liegen auf einer Graden und diese Grade ist eine Standlinie für die Zeit 8^h nachmittags.

Der Beweis liegt in dem bekannten Satze, daß die Verbindungslinien der gleichnamigen Punkte zweier auf zwei beliebigen Graden angeordneten äquidistanten Skalen die Tangenten einer Parabel bilden und daß alle diese Tangenten auf jeder von ihnen und auf keiner andern Graden wieder eine äquidistante Skala abschneiden.

Die Bahn des wahren Schiffsortes muß nämlich die drei Standlinien zu den ihnen entsprechenden Zeiten schneiden und da er sich nach Voraussetzung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so müssen sich die Abschnitte zwischen den Standlinien wie die betreffenden Zeitintervalle verhalten. So verhält sich z. B. in Fig. 1 $RQ : QP$ wie $2 : 5$. Jede Grade, die diese Bedingung erfüllt, stellt eine mögliche Bahn des Schiffsortes dar. Alle diese Graden sind nun offenbar Tangenten der Parabel und auf jeder von ihnen können wir eine äquidistante Skala konstruieren. Alle gleichnamigen Skalenpunkte liegen dann wieder auf einer Parabeltangente, die dann die Standlinie für den betreffenden Zeitpunkt darstellt. Für die Grade RQP z. B. muß der Schiffsort sich um 9^h in R um 11^h in Q, um 4^h in P befunden haben und um 8^h nachmittags muß er sich demnach in dem Punkte S der Graden RQP befinden, der dieser Zeit entspricht mithin auf der Graden, die wir als Verbindungslinie der dieser Zeit entsprechenden Skalenpunkte erhalten hatten.

Wenn also drei ein Dreieck bildende Standlinien in dem sich mit dem gegißten Schiffsort bewegenden Koordinatensystem gezeichnet sind, die drei gewissen Zeiten entsprechen, so können wir in der beschriebenen Weise ohne Schwierigkeit für jeden beliebigen andern Zeitpunkt eine Standlinie finden, ohne die Versetzung des Schiffes zu kennen. Dabei ist nur vorausgesetzt, daß die Versetzung während der in Betracht kommenden Zeit gleichmäßig ist d. h. in gleichen Zeiten von gleicher Größe und Richtung.

Gesetzt nun es wäre zu irgend einer Zeit noch eine vierte Standlinie durch Beobachtung gefunden worden, so brauchten wir diese nur zum Schnitt zu bringen mit der für dieselbe Zeit aus den

drei andern abgeleiteten Standlinie, um den wahren Standort zu erhalten. In derselben Weise wie wir in dem eben besprochenen Falle durch den Punkt P die Grade PQR legten, können wir dann durch den Standort eine Grade ziehen, die uns die Versetzung d. h. die Bewegung des wahren Standorts relativ zu dem gegißten Standort darstellt. Der wahre Standort bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit durch die gezeichneten Standlinien hindurch, indem er jede Standlinie zu der ihr entsprechenden Zeit durchkreuzt. Diese Bahn des wahren Standorts ist selbst ebenfalls eine Tangente der Parabel und wird als solche als Verbindungslinie gleichnamiger Skalenpunkte erhalten.

Bei den Zeitangaben, die zur Konstruktion der Standlinien erfordert werden, kommt es offenbar nur auf Verhältnisse von Zeitdifferenzen an. Es ist daher zulässig, die Ortszeit irgend eines beliebigen Ortes der Erdoberfläche zu benutzen. Ja selbst eine Uhr die einen beliebig großen aber konstanten Gang hätte, würde richtige Resultate liefern. In der Regel wird es sich empfehlen, die Zeitangaben nach der Schiffsuhr zu machen, die jeden Tag auf die Ortszeit des um Mittag erreichten oder zu erreichenden Punktes gestellt wird.

Zwei besondere Fälle können eintreten, bei denen die Tangentenschar der Parabel in ein Strahlenbüschel und eine Schar paralleler Graden ausartet. Diese beiden Fälle verdienen eine besondere Besprechung.

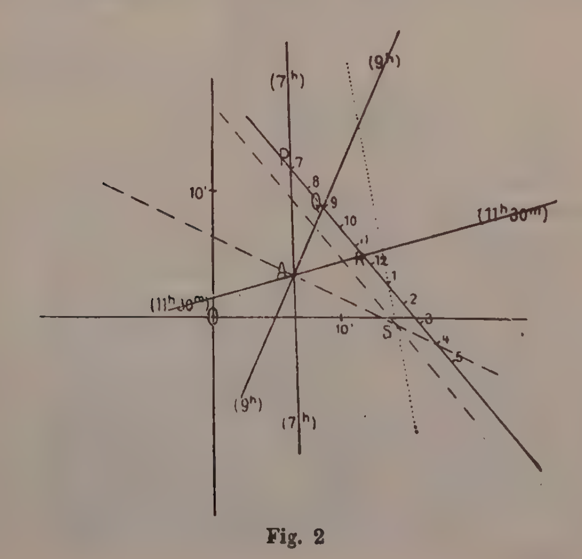


Fig. 2

Es möge sich beim Auftragen von drei zu verschiedenen Zeiten beobachteten Standlinien ergeben, daß sie alle drei durch einen Punkt laufen. Dann liegt es nahe anzunehmen, daß keine Versetzung stattgefunden hat. Aber das braucht keineswegs der Fall zu sein. Es kann dennoch eine Versetzung stattgefunden haben, nur ist sie an die Bedingung gebunden zu den drei gegebenen Zeiten die zugehörigen Standlinien zu kreuzen. Wenn wir eine Grade konstruieren können, die so die Standlinien in der Reihenfolge der zugehörigen Zeiten schneidet, daß die Abschnitte zwischen ihnen den Zeitintervallen proportional sind, so stellt sie eine mögliche Versetzung dar. In Fig. 2 z. B. wo drei um 7^h um 9^h und und um 11 30^m aus Sonnenhöhen ermittelte Standlinien gezeichnet sind, stellt die Grade *PQR* eine mögliche Bewegung des wahren Schiffsortes relativ zum Schiffsort der Logge dar, der $PQ : QR = (9-7) : (11{,}5-9)$. Jede zu *PQR* parallele Grade hat aber dieselbe Eigenschaft und stellt deshalb auch eine mögliche Bewegung des wahren Schiffsortes dar. Es ist auch unmittelbar klar, daß unter den gemachten Voraussetzungen keine anderen Linien als Bahnen des wahren Schiffsortes möglich sind.

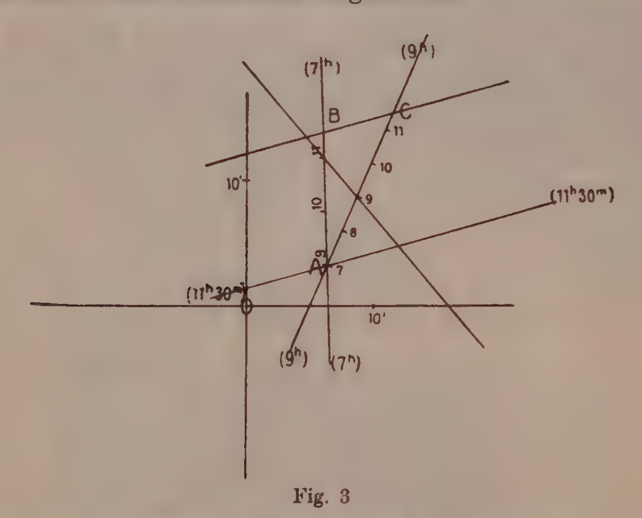


Fig. 3

Um eine der Graden zu finden können wir unsre frühere Konstruktion benutzen. Wir brauchen uns nur vorzustellen, daß die drei sich schneidenden Standlinien in Wahrheit doch ein sehr kleines Dreieck bilden, das aber bei dem gewählten Maßstabe der Zeichnung in einen Punkt zusammenläuft. Wir denken uns nun die Zeichnung in einem so großen Maßstab wiederholt (Fig. 3),

daß die drei Standlinien ein deutliches Dreieck ABC bilden. Sie bestimmen eine Parabel, deren Tangenten sie sind. Aber von dieser Parabel kommen nur diejenigen weiteren Tangenten in Betracht, deren Schnittpunkte mit den drei Standlinien von dem Dreieck sehr weit entfernt liegen. Denn ein Punkt, der nicht sehr weit von dem Dreieck entfernt ist, fällt wenn wir wieder zu der ursprünglichen unvergrößerten Figur zurückkehren mit dem Schnittpunkt der drei Standlinien zusammen. Die Parabeltangenten aber, die sehr weit von dem Dreieck entfernt sind, entsprechen als Standlinien betrachtet Zeitpunkten, die sehr viel früher oder sehr viel später liegen als die Beobachtungszeiten. Denken wir uns nun z. B. für einen sehr viel späteren Zeitpunkt die Skalenpunkte P und Q der Figur 2 auf den Standlinien AB und AC der Fig. 3 aufgetragen (in Figur 3 liegen P und Q des großen Maßstabes wegen weit außerhalb der Zeichnung), so muß der Abstand BP gemessen durch den Skalenteil $\frac{AB}{11,5^h - 9^h}$ gleich dem Zeitintervall sein, das seit 11^h verstrichen ist und dasselbe Zeitintervall muß der Abstand CQ gemessen durch den Skalenteil $\frac{AC}{11,5^h - 7^h}$ der Skala auf AC ergeben. Je weiter nun P und Q von B und C entfernt sind, um so kleiner sind AB und AC im Verhältnis zu BP und CQ und wir können ohne merklichen Fehler

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{AP}{AQ}$$

setzen und erhalten demnach

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB/(11,5^h - 9^h)}{AC/(11,5^h - 7^h)}.$$

D. h. wenn wir in Fig. 3 von A aus die Länge eines Skalenteils $AB/(11,5^h - 9^h)$ auf AB und die Länge eines Skalenteils $AC/(11,5^h - 7^h)$ auf AC abtragen, so gibt die Verbindungslinie ihrer Endpunkte eine Parallele zu PQ. Statt eines Skalenteils können natürlich auch mehrere Skalenteile beiderseits benutzt werden. Damit haben wir die Richtung vo PQR gefunden und können nun wieder zu der unvergrößerten Figur 2 zurückkehren. Um für irgend eine beliebige Zeit die entsprechende Standlinie zu finden, haben wir nur auf einer der Graden PQR (Fig. 2), die durch die drei beobachteten Standlinien bestimmte Zeitskala zu beachten und den betreffenden Punkt der Skala mit dem Schnittpunkt der drei Standlinien zu verbinden. So ist z. B. in Figur 2 die gestrichelte Linie AS die Standlinie für 4^h. Gesetzt um 4^h würde

nun abermals eine Sonnenhöhe genommen und damit als Standlinie relativ zu dem gegißten Schiffsort die punktierte Linie ermittelt, die jene in S schneidet, so ist S der wahre Schiffsort um 4^h und eine Parallele durch S zu PQR stellt die Bewegung des wahren Schiffsorts relativ zum Schiffsort der Logge dar (in der Figur ist diese Parallele mit —·—·— bezeichnet).

Der zweite Fall, der eine besondere Betrachtung verdient, ist der wo zwei von den drei beobachteten Standlinien einander parallel sind. In diesem Falle bestimmen diese beiden Standlinien auf der dritten eine Zeitskala und der Skalenpunkt, der der Zeit der Beobachtung der dritten Standlinie entspicht, muß der wahre Schiffsort zu der betreffenden Zeit sein. Hier genügen also drei Standlinien, um den wahren Schiffsort zu ermitteln; aber nur für den Zeitpunkt der dritten Standlinie. Die Versetzung bleibt unbekannt; denn jede durch den ermittelten Punkt gelegte Grade schneidet die drei Standlinien in der Reihenfolge ihrer Zeiten so, daß die Abschnitte zwischen den Standlinien den Zeitintervallen proportional sind. Jede dieser Graden stellt dann also eine mögliche Bahn des wahren Schiffsortes dar. Für jeden Zeitpunkt erhalten wir eine Standlinie, die den ersten beiden Standlinien parallel ist und durch den betreffenden Skalenpunkt der dritten Standlinie läuft. Kommt noch eine weitere Beobachtung hinzu, die uns für irgend einen Zeitpunkt eine vierte Standlinie liefert von anderer Richtung als die ersten beiden, so bestimmt diese mit der ihrem Zeitpunkt entsprechenden aus den ersten Beobachtungen abgeleiteten Standlinie den wahren Schiffsort zu dieser Zeit und damit ergibt sich dann auch die ganze Bahn des Schiffsortes als Verbindungslinie der beiden ermittelten Schiffsorte mit der Zeitskala wie sie durch die ersten beiden Standlinien auf ihr bestimmt wird.

Die Praxis würde also in dem allgemeinen Falle die sein, daß man die ersten drei beobachteten Standlinien in ein Koordinatensystem nach Breite und Länge einzeichnet, dessen Anfangspunkt in jedem Augenblick der gegißte Schiffsort ist. Auf diesen drei Standlinien (oder auch nur auf zweien von ihnen) werden Zeitskalen angebracht jede mit äquidistanten Intervallen derart, daß jede Standlinie die Zeitskalen der andern beiden in Punkten schneidet, denen die Zeit jener Standlinie entspricht. Alsdann wird die vierte beobachtete Standlinie eingetragen und zugleich für den ihr entsprechenden Zeitpunkt aus den drei ersten eine fünfte Standlinie als Verbindungslinie der dieser Zeit entsprechenden Skalenpunkte abgeleitet. Der Schnittpunkt der vierten und fünften

Standlinie ist der wahre Schiffsort für den ihnen entsprechenden Augenblick[1]).

Die Bahn, die der wahre Schiffsort in diesem Koordinatensystem (d. h. relativ zu dem gegißten Schiffsort) mit der Zeit beschreibt, erhält man dadurch, daß man auch auf der fünften Standlinie eine Zeitskala entwirft, die von den ersten Standlinien in den ihren Zeitpunkten entsprechenden Skalenpunkten geschnitten wird und auf dieser Skala die Zeit abliest, die dem Schnitt mit der vierten Standlinie zukommt. Alsdann bildet die Bahn des wahren Schiffsorts die Verbindungslinie der dieser Zeit entsprechenden Skalenpunkte der Standlinienskalen. In den beiden besonderen oben besprochenen Fällen ist die entsprechende Konstruktion dagegen auf die dort beschriebene Weise auszuführen.

Es empfiehlt sich ein ausführliches Beispiel anzugeben, genau in der Form, wie es in Wirklichkeit vorkommen kann, damit man sieht, daß keine erhebliche Arbeit zu den Rechnungen hinzukommt, die man ohnehin machen muß.

Auf einem Dampfschiffe seien aus einer Mittagshöhe und drei andern Sonnenhöhen vier Standlinien gefunden und zwar wollen wir bei den drei letzteren annehmen, daß wie üblich mit der gegißten Breite in die Rechnung eingegangen und die Ortszeit ermittelt ist, deren Differenz gegen die am Chronometer bestimmte Zeit die Länge ergibt. Zugleich ist ebenfalls wie üblich die Aenderung in Bogenminuten berechnet, die längs der Standlinie die Länge erleidet, wenn man die Breite um eine Minute vergrößert, d. h. der Differentialquotient der Länge nach der Breite. Die östliche Längenänderung und die nördliche Breitenänderung sollen dabei positiv, die westliche Längenänderung und südliche Breitenänderung negativ gerechnet sein. Im übrigen ist die folgende Tabelle ohne weiteres verständlich.

Schiffsuhr	Breite und Länge astronomisch	$\frac{d\lambda}{d\varphi}$	Breite und Länge der Loggerechnung	Differ. astron. — Logge
$6^h 50^m$ vorm.	49°15′ N; 13°35′ W	0	49°15′ N; 13°35′ W	0′
11^h vorm.	49°21′ N; 12°27′ W	3.7	49°21′ N; 12°32′ W	5′ Ost
12^h mittags	49°23′ N; —	∞	49°23′ N; 12°17′ W	—
$3^h 5^m$ nachm.	49°28′ N; 11°34′ W	−0.7	49°28′ N; 11°30′ W	4′ West

1) Zur Konstruktion der fünften Standlinie kann man sich die Einzeichnung der ganzen Skalen natürlich sparen und sich darauf beschränken, auf zwei der ersten drei Standlinien die Punkte zu ermitteln, die der Beobachtungszeit der vierten entsprechen.

Fig. 4 zeigt die vier Standlinien in einem Koordinatensystem, das den gegißten Ort zum Anfangspunkt hat. Auf der ersten und zweiten sind die Zeitskalen vermerkt. Die Punkte A und B auf der ersten und zweiten Standlinie entsprechen dem Zeitpunkt $3^h\,5^m$ der vierten Standlinie. Ihre Verbindungslinie AB liefert mit der vierten Standlinie den Schnittpunkt C. Die Zeitskala auf AB liefert für C den Zeitpunkt $1^h\,43^m$ vormittags. Die Verbindungslinie von C mit dem Punkte D, der diesem Zeitpunkte auf der Zeitskala der ersten Standlinie entspricht, stellt dann die Bahn

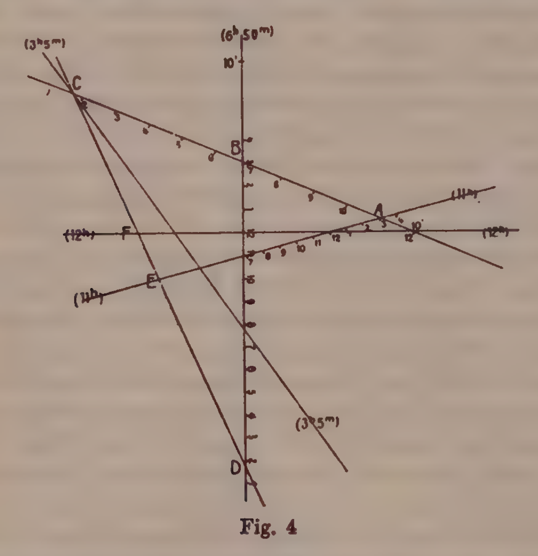


Fig. 4

des Schiffsortes relativ zum gegißten Schiffsort dar. Die Bahn schneidet die Standlinien in den Punkten D, E, F, C, die seine Lagen zu den Zeiten der Beobachtungen darstellen. Es findet also außer der durch die Loggerechnung angegebene Ortsveränderung noch eine beträchtliche Versetzung von etwa 2 Seemeilen in der Stunde in nordnordwestlicher Richtung statt.

Dabei sind die Beobachtungen als exakt vorausgesetzt. Wenn wir bei den Sonnenhöhen Beobachtungsfehler bis zu 2′ zulassen würden, so könnten wir sie so annehmen, daß alle vier Standlinien durch einen Punkt gingen und daher gar keine Versetzung herauskäme. Immerhin würde es für den Seefahrer von Bedeutung sein zu wissen, daß eine so große Versetzung mit seinen Beobachtungen vereinbar ist. Ob sie wirklich vorhanden oder ob sie nur durch Beobachtungsfehler vorgespiegelt wird, muß er dann durch weitere astronomische Beobachtungen feststellen.

Es wird sich im allgemeinen wohl empfehlen die Längeneinheit für die Breitenminuten im Verhältnis des Cosinus der Breite kleiner zu nehmen als die Längeneinheit für die Längenminuten ebenso wie bei Mercators Projektion. Dadurch lassen sich die Wirkungen der Beobachtungsfehler bequemer übersehn. Für jede Minute um die eine Sonnenhöhe zu groß oder zu klein gemessen wird, verschiebt sich die Standlinie um eine Seemeile also in der Zeichnung um die Längeneinheit der Breitenminute ohne ihre Richtung zu ändern auf die Sonne zu oder von der Sonne fort. Das Dreieck der ersten drei Standlinien bleibt dabei zu sich selbst ähnlich und ebenso bleibt die aus ihnen abgeleitete (oben als fünfte bezeichnete) Standlinie ähnlich zu dem Dreieck gelegen. Die vierte Standlinie dagegen behält zwar auch ihre Richtung, braucht aber bei einer Aenderung der Sonnenhöhen nicht mehr zu den andern Standlinien ähnlich zu liegen wie vorher, und die Bahn des Schiffsortes kann sogar auch ihre Richtung verändern. Für den Fall indessen, daß die vierte Standlinie sich so verschiebt, daß sie zu den andern ähnlich gelegen bleibt, muß auch die Bahn des Schiffsortes ähnlich gelegen bleiben. Jedenfalls gibt unsre graphische Darstellung auch das Mittel an die Hand zu überschlagen wie die Beobachtungsfehler wirken.

Für die Ortsbestimmung im Luftschiff gelten analoge Betrachtungen. Wenn man die Bewegung des Luftschiffs als völlig unbekannt voraussetzt und nur Grund hat anzunehmen, daß die Geschwindigkeit seiner Bewegung von konstanter Richtung und Größe sei, so hat man die Standlinien in einem ruhenden Koordinatensystem aufzutragen. Wenn man dagegen eine Vermutung über die Richtung und Größe der Bewegung besitzt, so wird man den Koordinatenanfangspunkt sich mit dieser Geschwindigkeit fortbewegen lassen.

Ein Motorluftschiff, daß nach dem Compaß gesteuert wird, muß geradeso wie ein Seeschiff eine Loggerechnung führen und wird den Koordinatenanfangspunkt mit dem Schiffsort der Logge sich bewegen lassen. Unter Umständen wird die Annahme kaum zulässig sein, daß während der Zwischenzeit der Beobachtungen die Abtrifft nach Richtung und Größe dieselbe bleibt zumal wenn das Luftschiff seine Höhe über dem Erdboden erheblich ändert. Dann bleibt für die astronomische Ortsbestimmung am Tage nichts anderes übrig als magnetische Beobachtungen mit heranzuziehn, so ungenau diese auch sein mögen.

Die Island-Expedition im Frühjahr 1910.

Von

Angenheister und **Ansel.**

Vorgelegt durch Herrn Wiechert in der Sitzung vom 10. Dezember 1910.

Erster Teil.

Die erdmagnetischen Beobachtungen.

Von **Angenheister.**

I.

Die Diskussion der Beziehung der Sonnenflecken zu Polarlicht und magnetischen Störungen.

Die Vermutung eines Zusammenhanges zwischen Sonnentätigkeit, erdmagnetischen Störungen und Polarlichtern stützt sich hauptsächlich auf die große Ähnlichkeit der Kurven der jährlichen Häufigkeit dieser Vorgänge. Alle drei besitzen eine gut ausgesprochene 11jährige Periode, die nahezu parallel verläuft; auch in vielen Einzelheiten der Kurven zeigen sich überraschende Ähnlichkeiten.

Besonders die Kurve der Sonnenflecken-Relativzahlen und der Jahresmittel der täglichen Schwankungen der Deklination und Horizontal-Intensität verlaufen recht ähnlich; beide zeigen deutlich den schnellen Anstieg zum Maximum und den langsameren Abfall zum Minimum.

Die magnetischen Vorgänge, die diese 11jährige Periode besitzen sind:

1) die Amplitude der täglichen Variation im Jahresmittel für alle 3 Elemente,
2) die Störungen,

3) auch der säculare und jährliche Gang scheint nach den neueren Untersuchungen von Leyst mit dem Fleckenstande der Sonne veränderlich zu sein.

Die Elemente der Sonnentätigkeit, die eine 11jährige Periode besitzen, sind:

1) die Flecken,
2) die Fackeln und Protuberanzen,
3) die Korona und Koronastrahlen.

Die Koronastrahlen scheinen von den Protuberanzen auszugehen und auch an der 11jährigen Periode teilzunehmen. Fackeln und Flecken haben gleichzeitig ihre Extremwerte. Protuberanzen merklich verspätet. Diese Verspätung verschwindet, wenn man nur eruptive Protuberanzen zählt.

Sonnenflecken sind wohl Vertiefungen in der Photosphäre.

Sonnenfackeln dagegen photosphärische Gebilde, die sich über das allgemeine Niveau der Photosphäre erheben. Flecken sind stets mit Fackeln umzogen. Fackeln treten aber auch isoliert auf an Orten, wo keine Tendenz zur Fleckenbildung zu bemerken ist.

Für einen Zusammenhang zwischen Sonnentätigkeit und erdmagnetischen Vorgängen spricht ferner der Umstand, daß zur Zeit, wo eine große Sonnenfleckengruppe sich in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne befindet, eine starke magnetische Störung einzutreten pflegt. E. W. Maunder hat dieses systematisch untersucht und findet, daß die 19 größten magnetischen Stürme, die zwischen 1875 und 1903 in Greenwich registriert wurden, zeitlich mit dem Auftreten großer Sonnenfleckengruppen in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne zusammenfallen. Durchschnittlich begannen die magnetischen Störungen 14 Stunden vor dem Passieren des Zentralmeridians und dauerten bis 68 Stunden. Danach treten nach Evershed bei Annahme einer geradlinien Ausbreitung die Erregungen von Sonnenfleck bis zu einem Winkel von 34° gegen die radiale Richtung aus und besitzen eine mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 1600 klm/sec. Ricco fand 1000 klm/sec Geschwindigkeit oder 42½ Stunde für den Weg von der Sonne bis zur Erde. Andere Beobachter fanden in einzelnen Fällen andere Werte. Andere wieder fanden momentane Coincidenz zwischen Veränderungen in den Flecken und magnetischen Störungen, so Wild und Young (am 3. und 5. August 1872) und vor allem Carrington und Hodgton (1. September 1859), die eine große Eruption am Rande eines Sonnenflecks und gleichzeitig eine große erdmagnetische Störung beobachteten. Meist wurden auch an denselben Tagen große Polarlichter beobachtet.

Ein glänzendes Beispiel hierfür lieferte der 25. Sept. 1909 wo die seit etwa 30 Jahren, größte magnetische Störung auftrat, eine große Eruption auf der Sonne in der Nähe des Zentralmeridians stattfand und abends auf der ganzen Erde, mit Ausnahme des Gebietes zwischen den Wendekreisen, ein prächtiges Polarlicht zu sehen war.

Maunder und Ricco vertreten die Ansicht, daß die Störung sich geradlinig von der Sonne fortpflanzt und das magnetische Gewitter auf der Erde einsetzt, wenn der Strahlenkegel von der Sonne, der durch die Sonnenrotation gedreht wird, die Erde erreicht.

Es sind nun einige Male Fälle beobachtet worden, wo ein Fleck den Zentralmeridian passierte, ohne daß eine magnetische Störung eintrat. Auch läßt sich nicht in den vielen Fällen, wo Fleck und Störung gleichzeitig sind, von der Fleckengröße auf die Größe der Störung schließen, und endlich treten Störungen auf bei ganz fleckenreiner Sonne.

Ich habe die täglichen Sonnenflecken Relativzahlen von 1907 und 1908 mit der „magnetischen Gestörtheit" der einzelnen Tage vom selben Zeitraum für Samoa verglichen und eine Parallelität nicht entdecken können. Ich habe ferner den Verlauf der Monatssummen der Relativzahlen für 1905 bis 1908 als Kurve gezeichnet und „die Abweichungen der Monatsmittel von den normalen Jahresmitteln" der einzelnen magnetischen Elemente für 1905 bis 1908 für Potsdam und Samoa gebildet und ihren Verlauf ebenfalls als Kurve gezeichnet und auch hierin keine ausgesprochene Parallelität gefunden. Parallelität scheint sich erst zu ergeben, wenn man über größere Zeiträume, über Jahre summiert; und doch sollte man vermuten, wenn die großen Flecken die Ursache der großen Störungen sind, daß sich dann auch ein durchgängiger Parallelismus bei den Flecken und Störungen im Einzelnen herausstellen müßte. Dieses ist aber sicherlich nicht der Fall.

Der Grund hierfür ist vielleicht der, daß die großen Flecken gar nicht die Ursache der magnetischen Störungen sind, sondern andere dynamische Vorgänge auf der Sonne, die in der Nähe der Flecken gleichzeitig auftreten, nämlich die Fackeln und Protuberanzen. Die 11jährige Periode, auf deren Realität sich ja vorzugsweise die Ansicht aufbaut, daß die Flecken die Ursache der Störungen sind, diese selbe Periode gilt auch für die Fackeln und Protuberanzen, überhaupt für alle Sonnenvorgänge, soweit wir sie kennen; auch für die Bildung der Koronastrahlen, die ja vielleicht nichts anderes als weit in den Raum fortgesetzte Protuberanzen

sind. Es liegt nicht allzufern, sich diese Strahlen bis in die Erdnähe verlängert vorzustellen. Die Flecken selbst sind eigentlich die am wenigsten aktiven Elemente der Sonnentätigkeit; sie sind kühler als ihre Umgebung, wenigstens deutet man heute die Verbreiterung der Absorptionslinien des Flecken-Spektrums dahin. Die Flecken sind vielleicht eine Folgeerscheinung von Fackeln und Protuberanzen, von explosionsartigen Ausbrüchen. Die Abkühlung im Fleck resultiert vielleicht aus der Expansion der Fackel. Die Fackeln und Protuberanzen sind die aktiven Elemente, sie entstehen und vergehen in wenigen Stunden, ja Minuten, schießen empor mit mehreren hundert klm Geschwindigkeit in der Sekunde und verändern sich dauernd.

Am wirksamsten für die Erde werden Fackeln und Protuberanzen naturgemäß dann sein, wenn ihre Bewegungsrichtung die Erde trifft. Wenn man annimmt, daß sie senkrecht zur Sonnenoberfläche hervorbrechen, wird dieses dann der Fall sein, wenn sie sich in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne befinden. Dann aber sind sie, gerade im Gegensatz zu den Flecken für Fernrohr und Auge am schlechtesten oder fast gar nicht zu sehen. Man sieht sie gut nur in der Nähe des Randes, wo die allgemeine Helligkeit stark abnimmt. Da nun Gruppen von Fackeln und Protuberanzen beobachtet wurden, die, solange man sie verfolgen konnte, keine Tendenz zur Fleckenbildung zeigten, und ganz ohne Fleckengefolge waren, so werden sicherlich öfters große Fackelgruppen die Mitte der Sonne passieren, ohne daß man sie mit Fernrohr und Auge wahrnimmt, weil keine Flecken in ihrer Nähe auftreten. Diesen Fackeln sind vielleicht diejenigen magnetischen Störungen zuzuordnen, bei welchen man keine Flecken in der Sonnenmitte wahrnehmen konnte.

Deslandres und Hale haben nun eine Methode der Fackelbeobachtung mittels eines Spektroheliographen ausgearbeitet, die es ermöglicht, die Fackeln auch auf der Sonnenmitte in außerordentlicher Vollkommenheit zu photographieren. Diese Photographien geben erst ein richtiges Bild der Sonnentätigkeit und mit ihrer Hülfe ist am ehesten eine Lösung unserer Frage zu hoffen.

Bei den ganz großen Fackelausbrüchen mag die Abkühlung der Gase wohl soweit fortschreiten, daß stets eine Verbreiterung der Absorptionslinien und eine Abnahme der Helligkeit, ein Fleck sichtbar wird; woraus sich dann erklärt, daß große Störungen und Flecken meist gleichzeitig beobachtet werden; nur darf man nicht die Zeit wo der Fleck sichtbar wird in Beziehung setzen zum Ausbruch der magnetischen Störung; sondern die Zeiten, die mit

einander verglichen werden müssen, sind die Zeit des Ausbruches der Fackel oder die Zeit, wo die Erde den von der Fackel ausgehenden Strahlenkegel erreicht, und die Zeit des Einsetzens der Störung. Dieser Ausbruch der Störung wird aber wohl nicht gerade mit der Zeit zusammenfallen, wo der Fleck den Zentralmeridian passiert. War die Ausbruchstelle der Fackel beim Ausbruch weit vom Zentralmeridian entfernt, so kann man, wenn geradlinige Fortpflanzung der Störungsursache senkrecht zur Sonnenoberfläche vorausgesetzt wird, keine erdmagnetische Wirkung erwarten. Diese wird erst dann zu erwarten sein, wenn die Sonnenrotation den Störungskegel bis zur Erde hin gedreht hat. D. h., wenn die störende Ursache die Sonnenmitte erreicht. Aber es ist nicht notwendig, daß die Störungsursache sich geradlinig fortbewegt. Wenn die störende Ursache aus einer ausgeschleuderten Wolke elektrischer Teilchen besteht, so kann eine Ablenkung dieser Teilchen aus ihrer gradlinigen Bahn durch einen Sonnenmagnetismus eintreten. Dabei ist zweierlei vorausgesetzt, erstens daß die Teilchen, die in den Protuberanzen und Fackeln emporgeschleudert werden, elektrische Ladungen tragen, und zweitens, daß eine magnetische Kraft auf der Sonne vorhanden ist, die diese Teilchen aus ihrer gradlinigen Bahn ablenkt. Beides ist sehr wohl möglich; freie Elektrizitätsmengen kommen ja auch sonst auf der Sonne vor; wenigstens deuten die Beobachtungen von Hale darauf hin. Er konnte durch die Beobachtung des inversen Zeemanneffektes Magnetfelder in den Sonnenflecken nachweisen. Aus der Anordnung der Flokuli um einen Sonnenfleck schloß er auf den Drehungssinn dieses Wirbels. Aus der magnetischen Wirkung folgte dann, daß das Magnetfeld im Fleck durch einen Wirbel negativer Ionen entstand. Die Größe des Zeemanneffektes ergab sich zu 3000 Gauß als magnetische Feldstärke des Flecks. So ist hier in einem konkreten Fall das Vorhandensein von negativen Ionen und von Magnetfeldern auf der Sonne nachgewiesen. Die direkte magnetische Wirkung dieser Magnetfelder der Sonne auf den Erdmagnetismus ist übrigens zu klein um gemessen werden zu können. Die hohe Temperatur an der Sonnenoberfläche erklärt ungezwungen die Entstehung von Ionen auf der Sonne. Glühende Metalle und glühende Kohle entsenden dauernd negative Ionen. Beide sind an der Sonnenoberfläche vorhanden. Allerdings bleiben bei den Laboratoriumsversuchen die Flammengase positiv zurück, während Hale doch auf negative Ladung seiner Flokuli schließen muß. Auch ultraviolettes Licht kann als Ionisator an der Sonnenoberfläche wirken.

Elektrische Teilchen und Magnetfelder sind also wohl auf der Sonne vorhanden und eine zeitliche Verschiebung erdmagnetischer Störungen gegenüber einer Eruption auf der Sonne oder dem Erscheinen des Eruptionszentrum im Zentralmeridian der Sonne, erhält so eine plausibele physikalische Erklärung in der Ablenkung der von der Sonne ausgesandten elektrischen Teilchen durch Magnetfelder auf der Sonne. Deslandres (Compt. R. N. 2. 1910) hat eine solche Erklärung der Verspätung erdmagnetischer Störungen versucht. Das Magnetfeld der Sonne hat er dabei durch Zirkulationsströme elektrischer Teilchen erklärt (positiver Teilchen, die im Rotationssinn in Äquatorbreite um die Sonne zirkulieren).

Einen permanenten Eigenmagnetismus der Sonne hat man ihrer hohen Temperatur wegen für unmöglich gehalten; allerdings weiß man nicht sicher, in wie weit der enorme Gravitationsdruck im Sonneninnern die Abnahme eines eventuell vorhandenen permanenten Magnetismus mit der Temperatur wieder rückgängig zu machen im Stande ist. Die elastischen Eigenschaften der Materie bei hoher Temperatur werden jedenfalls durch hohe Drucke stark beeinflußt. So wird die Scheerungselastizität weit oberhalb des Schmelzpunktes keineswegs Null, wenn starke Drucke vorhanden sind, wie das Studium der transversalen Erdbebenwellen im Erdinnern beweist. Die Materie verhält sich dort infolge des großen Druckes, trotzdem die Temperatur wohl sicher oberhalb des kritischen Punktes liegt, wie ein vollkommen elastischer fester Körper. Vielleicht bewirken große Drucke, daß die Körper trotz hoher Temperatur Magnetisierbarkeit und permanenten Magnetismus bewahren.

Bei der Temperaturzunahme wächst die molekulare Bewegungsenergie so sehr an, daß die richtenden Kräfte des Magnetismus nicht mehr ausreichen um eine Wirkung zu erzeugen. Verhindert aber der Druck die Ausdehnung, dann wird die molekulare Bewegung nicht in demselben Maße anwachsen und die richtende Kraft daher vielleicht wirksam bleiben können.

Allerdings steht im Gegensatz zu dieser Vermutung die von Tammann vorgenommene Deutung einiger Messungen der Volumänderung beim Übergang von magnetisierbarem α- in unmagnetisierbares β- und γ-Eisen. Da diese Volumänderungen reversibel sind, läßt sich auf sie die Clausius-Clapeyronsche Formel

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\Delta v \cdot T}{R_p}$$

anwenden.

T = absol. Umwandlungstemperatur.

Δv = Volumänderung bei der Umwandlung.

R_p = Umwandlungswärme bei konstantem Druck in mechanischem Maße.

Aus der Messung von Δv, R_p und T folgt nun, daß die Umwandlungstemperatur sich durch steigenden Druck erniedrigt. Es wird hiernach auf der Sonne also auch in größeren Tiefen wohl nur ganz schwach magnetisierbares γ-Eisen existieren können. Im Erdinnern würde ebenfalls schon in geringer Tiefe (bei $^1/_{10}$ Erdradius sind 16000 kg/cm² Druck und über 600° Celsius zu erwarten) nur γ-Eisen existieren können. Sinkende Temperatur könnte es unter Volumvergrößerung in den stärker magnetisierbaren Zustand überführen. Bidlingmaier sieht hierin einen Grund der Säkularvariation.

Man kann die Versuche, die erdmagnetischen Störungen zu erklären, in zwei Gruppen teilen. Der eine Versuch (A. Schuster) nimmt an, daß die ultravioletten Strahlen der Sonne die obere Erdatmosphäre ionisieren, und daß die stark leitende Luft der oberen Schichten (etwa 300 klm hoch) sich horizontal gegen das Kraftliniensystem des Erdmagneten verschiebt. Diese horizontalen Luftströmungen rühren von den täglichen Barometerschwankungen her und die durch diese Bewegung der leitenden Luft entstehenden Induktionsströme erzeugen magnetische Effekte auf der Erde. Den regelmäßigen Strömungen infolge der täglichen Barometeroscilation entsprechen die täglichen Variationen. Störungen entstehen dann durch plötzliche Änderungen der Leitfähigkeit der oberen Atmosphäre infolge von Änderungen in der Intensität des von der Sonne ausgesandten ultravioletten Lichtes. Für die Erklärung der täglichen Periode hat diese Theorie wohl viel Wahrscheinlichkeit. Dagegen macht es einige Schwierigkeit mit Hülfe dieser Theorie, das fast ganz simultane Auftreten der Störungen auf der ganzen Erde, auch auf der von der Sonne abgewandten und dem ultravioletten Licht nicht zugängigen Nachtseite zu erklären; und ferner die besondere Stärke der Störungen und Polarlichter in bestimmten Gebieten, den Polarlichtzonen.

Der andere Erklärungsversuch nimmt an, daß elektrische Teilchen von der Sonnne ausgehen. Birkeland und Deslandres nehmen an, daß Elektronen von der Sonne ausgehen, Arrhenius, daß negative Ionen unter Lichtdruck wandern.

Die Elektronen Birkelands erleiden bei ihrem Eintritt ins Magnetfeld der Erde eine magnetische Ablenkung. Sie können daher auch an die Nachtseite der Erde gelangen; vornehmlich

werden sie in die Polarlichtzonen eingesogen. Andererseits bildet sich auch ein Ring von Elektronen in der Äquatorebene. Hierdurch lassen sich manche Eigentümlichkeiten der Störungen erklären, so ihr fast ganz simultanes Auftreten auch an der Nachtseite der Erde und ihre besondere Stärke in den Polarlichtzonen, aber andererseits erscheint die in den Störungen zutage tretende Energie zu groß, als daß sie aus einem Elektrizitätszufluß von der Sonne herrühren könnte. Vielleicht kommt den von der Sonne kommenden im Erdfeld abgelenkten Elektronen nur eine auslösende Rolle zu, indem sie durch Stoß die obere Atmosphäre ionisieren; auch an der Nachtseite und besonders in der Polarlichtzone. Die erdmagnetische Störung selbst kommt dann durch Bewegung dieser stark ionisierten Luft gegen das Kraftliniensystem der Erde als eine elektromagnetische Induktionswirkung zustande.

Es treten also wohl im wesentlichen zwei Vorgänge bei erdmagnetischen Störungen auf, die den Zusammenhang der Störungen mit der Sonnentätigkeit und den Polarlichtern erklären, nämlich der Stoß elektrischer Teilchen, die von den Ausbrüchen auf der Sonne stammen; dieser Stoß ionisiert die obere Atmosphäre, und bringt sie zum Leuchten (Polarlicht) und zweitens Induktionsströme infolge der Bewegung leitender Gasmassen gegen das Kraftliniensystem des Erdmagneten. Wenn man diese Anschauungen zugrunde legt, wird man leicht zu der Vermutung geführt, daß beim Durchgang der Erde durch den Schweif des Halleyschen Kometen diese Vorgänge in besonderer Weise hervortreten mußten. Denn beide Vorgänge können sich auch in der Atmosphäre eines Kometenschweifes abspielen, Stoßionisation und Leuchten kann auch dort durch Elektronen von der Sonne hervorgerufen werden. Ebenso werden Induktionsströme auftreten können, wenn die magnetische Erde durch den Schweif hindurchtritt.

Die Frage nach der Geschwindigkeit der Ausbreitung der Störung von der Sonne zur Erde hin, die am ehesten Aufschluß über die Natur der Störung geben könnte läßt sich nun vielleicht auf folgende Weise untersuchen. Es ist öfters behauptet worden, daß die Kometen ihre größte Lichtstärke in Perioden starker Sonnenfleckentätigkeit zeigen, also gleichzeitig mit der Polarlichthäufigkeit. Ferner ist bekannt, daß die Kometen neben dem schwachen, kontinuierlichen Spektrum, das wahrscheinlich von reflektiertem Sonnenlicht herrührt, noch ein Bandenspektrum zeigen, welches von gasförmigem Kohlenwasserstoff-Cyan herrührt. Dieses Spektrum wurde im Swistschen Kometen 5 000 000 klm vom Kern entfernt beobachtet. Man kann nicht gut annehmen, daß

infolge hoher Temperatur leuchtende Gasmassen dieses Spektrum aussenden, denn es wurde bei Kometen beobachtet, die soweit von der Sonne entfernt waren, daß eine so hohe Temperatur höchst unwahrscheinlich ist. Man wird also wohl elektrische Vorgänge als Ursache annehmen müssen, wie wir sie auch in der Erdatmosphäre als Polarlicht beobachten können. Schon die oben erwähnte gemeinsame Abhängigkeit der Leuchterscheinungen in Kometen und in der Erdatmosphäre (Polarlicht) von der Sonnentätigkeit deutet darauf hin, daß wir es hier mit verwandten Phänomenen zu tun haben. Falls die Polarlichter der Erde durch Aufprallen von Elektronen, die von der Sonne kommend auf die Erdatmosphäre treffen, entstehen, so kann man wohl vermuten, daß auch Elektronen von der Sonne kommend die Gasteile des Kometenschweifes treffen und zum Leuchten bringen. Die Lichterscheinungen im Kometenschweif und in der Erdatmosphäre, und die magnetischen Stürme sollten daher einen parallelen Verlauf nehmen, wenn Komet und Erde sich gleichzeitig im Strahlungskegel der Sonnentätigkeit befinden. Wenn die Störung sich mit Lichtgeschwindigkeit und geradlinig fortpflanzt, sollten die Ereignisse nahezu gleichzeitig auftreten; auftretende Phasenverschiebungen könnten möglichenfalls Auskunft über die Natur der Strahlung geben.

Bewegt sich die Erde selbst durch den Kometenschweif hindurch, so kann man gleichfalls erwarten, daß die elektrischen Vorgänge, die das Gasspektrum im Kometenschweif veranlassen, einen Einfluß auf unsere Atmosphäre und auf den Erdmagnetismus gewinnen. Wie die Polarlichtstrahlen der Erde so müssen dann die elektrischen Strahlen im Kometenschweif der ablenkenden Wirkung des Erdmagneten unterliegen. Eine Änderung der Gestalt des Kometenschweifes, der die elektrischen Strahlen enthält, und auf der Erde ein Nordlicht, eine magnetische Störung könnte die Folge sein. Wenn die Gase des Kometenschweifes stark ionisiert sind, so müßte auch der Durchgang der magnetischen Erde elektrische Ströme in den elektrisch leitenden Schweifgasen induzieren, die ihrerseits wieder magnetische Wirkungen auf der Erde ausüben könnten. Vielleicht sind solche Wirkungen bei der äußerst dünnen Verteilung der Materie im Kometenschweif nur gering.

Genaue erdmagnetische und Polarlicht-Beobachtungen in den Hauptstörungsgebieten, den Polarlichtzonen, zur Zeit, wo ein naher Komet unter ständiger Beobachtung der Sternwarten steht, oder wo sogar die Erde durch den Schweif des Kometen hindurch tritt, können also sehr wohl einen Beitrag zur Lösung der Frage nach

der Natur erdmagnetischer Störungen und der Polarlichter und ihres Zusammenhanges mit der Sonnentätigkeit liefern.

II.

Reisebericht.

Diese Überlegungen und die Nachricht, daß von vielen Seiten, vor allem auch von Herrn Professor Birkeland aus Christiania am Nordkap für die Zeit des Durchgangs der Erde durch den Schweif des Halley'schen Kometen erdmagnetische und luftelektrische Beobachtungen angestellt werden würden, haben mich veranlaßt, die geophysikalische Kommission der Königlichen Gesellschaft zu Göttingen zu bitten, mir die Beobachtung der erdmagnetischen Vorgänge in der Polarlichtzone, wo ein Maximum der Wirkung zu erwarten war, für diese Zeit zu ermöglichen.

Durch die Vermittelung dieser Kommission, wurden mir vom Kultusministerium 2000 Mk. zur Ausführung des Planes zur Verfügung gestellt. Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gab aus eigenen Mitteln noch 500 Mk. hinzu um luftelektrische Beobachtungen zu ermöglichen. Der geophysikalischen Kommission der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen fühlen wir uns für ihre gütige Verwendung zu großem Dank verpflichtet.

Zur Ausführung des Planes wurde nach Verständigung mit Herrn Professor Birkeland als Beobachtungsstation Dyrafjord auf Island gewählt. Dort befand sich noch von der norwegischen Polarlichtexpedition vom Jahre 1902 her ein Haus für magnetische Registrierungen und eins für astronomische und absolute magnetische Messungen, eine meteorologische Hütte, ein Pfeiler zu Wolkenbeobachtungen und eine Mire; ferner stand dort eine verlassene Walfischfängerstation, in der eine Unterkunftsmöglichkeit war. Es schien mir besonders wertvoll, an diesen Platz zu gehen, weil dort schon einhalb Jahr lang magnetische Beobachtungen vorgenommen waren, sodaß also die Säkularvariation sich durch den Vergleich dieser Beobachtungen mit denen, die ich zu machen beabsichtigte, schon recht gut ergeben mußte. Leider habe ich bisher die hierzu nötigen Daten von der ehemaligen norwegischen Expedition noch nicht erhalten.

Es war überhaupt unser Bestreben, die Arbeiten in Dyrafjord und auf der Hin- und Rückreise so einzurichten, daß auch abgesehen von der speziellen Untersuchung des Kometeneinflusses,

Beobachtungen angestellt wurden, die wissenschaftlich wertvolle Resultate erwarten ließen. Das gilt besonders auch von den luftelektrischen Beobachtungen.

Unsere Reisevorbereitungen wurden im geophysik. Institut zu Göttingen getroffen; dem auch der größte Teil unserer Instrumente entstammte.

Unsere wissenschaftliche Ausrüstung bestand aus einem System Eschenhangen'scher Registrierinstrumente Deklinograph, Horizontal-Intensitäts-Variometer und einer von mir konstruierten Torsions-Wage, die ich unten näher beschreiben werde. Ferner ein Tesdorf'scher Theodolith für absolute Messungen und ein Inklinatorium von Sartorius. Leider war es ganz unmöglich, trotz vieler Anfragen, einen Erdinduktor geliehen zu erhalten.

Als Uhren dienten 2 Glashütter Uhren von Lange, Dresden und ein Schiffschronometer von Knoblich. (Geliehen von der Göttinger Sternwarte.)

Als astronomisches Instrument diente ein kleiner Theodolith und ein Sextant. Ferner war ein kleines Instrument vorhanden zur Bestimmung der Polarisation des Himmelslichtes, das von Herrn Jensen, Hamburg gütigst geliehen wurde. Über die luftelektrischen und meteorologischen Instrumente wird Herr Ansel im II. Teil berichten.

Die Reise wurde am 7. April von Göttingen aus angetreten und führte von Kopenhagen in 10 Tagen über Leith und Faröra nach Reykiavik; dort war ein 4tägiger Aufenthalt, der unter anderem dazu benutzt wurde, im Interesse und auf Wunsch der deutschen Mechaniker- und Optiker-Vereinigung Erkundigungen über Beschaffung von Isländer Doppelspat einzuziehen. Hierüber ist an anderer Stelle mehrfach von uns berichtet worden.

Von Reykiavik führte die Reise zu Schiff weiter nach Dyrafjord, das am 27. April erreicht wurde. Die ersten Tage wurden in Thingeiri verbracht, und die Erlaubnis zum Benutzen der Walfischstation als Wohnung bei dem norwegischen Besitzer telegraphisch eingeholt; nach Empfang dieser Erlaubnis wurde dorthin, an die andere Fjordseite, übergesiedelt; die Beobachtungshäuser von Schnee und Eis gereinigt und mit Brettern und Glasscheiben repariert. Am 4. Mai begann die regelmäßige erdmagnetische Registrierung, die bis zum 1. Juni ununterbrochen fortgesetzt wurde. Am 2/3 Juni wurde gepackt und am 4. die Heimreise angetreten, und am 20. Juni Göttingen wieder erreicht. Es wurden auf der Hin und Rückreise in den angelaufenen isländischen Hafenplätzen erdmagnetische Messungen gemacht.

III.

Die erdmagnetischen Messungen und Registrierungen in Dyrafjord.

Die Verarbeitung der erdmagnetischen Registrierungen geschah in derselben Weise wie die erdmagnetischen Beobachtungen des Samoa-Observatoriums verarbeitet worden sind. (Siehe hierüber Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Band IX, Nr. 1) Nur wurden wegen der größeren Unruhe der Kurve nicht Stundenmittel, wie für Samoa, sondern Halbstundenmittel gebildet. Die tägliche Periode und die Kurve der 24stündigen Mittel von 3 zu 3 Stunden wurde ebenso wie für Samoa (dort von 6 zu 6 Stunden) gebildet.

Die Basis wurde durch absolute Messungen kontrolliert.

1. Messungen der Horizontal-Intensität.

Die absoluten Messungen der Horizontal-Intensität erfolgten mittels des auch in Samoa benutzten „Anschluß-Theodolith" (siehe Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Bd. IX, Nr. 1).

In Dyrafjord wurden folgende absolute Horizontal-Intensitäts-Messungen vorgenommen und aus ihnen der Basiswert berechnet.

Datum	Ablenkung	Schwingung	Basiswert d. H. I.
8. Mai	„		
10. „	„	„	0.11263
12. „	„		
14. „	„		
18. „	„	„	0.11254
19. „	„		
21. „	„		
24. „	„	„ }	
28. „	„	}	0.11245
30. „	„	„ }	

Die Basis hat sich also für die provisorische Aufstellung recht gut gehalten. Und die Schlüsse, die man aus dem Verlauf der Kurven, speziel der Nachstörung ziehen kann, haben daher recht große Sicherheit.

Es scheint mir eine geringe Wanderung von etwa 1^{γ}/pro Tag vorhanden zu sein. Dieses macht für einen Tag etwa 0.3 mm auf der Registrierkurve und für die Gesammtdauer der Registrierzeit im Maximum 1 cm. Die Unsicherheit ist natürlich viel geringer,

da die oft wiederholten Ablenkungsbeobachtungen eine gute Kontrolle geben.

Die Rechnung wurde vollzogen nach der Formel:

$$\lg H = \lg C - \frac{1}{2} \lg \sin \varphi - \lg T - \frac{\text{mod}}{2} KH (1 + \sin \varphi)$$

$\sin \varphi$ wurde korrigiert auf gleiche Temperatur, Variation von D. und H. I., Ungleichheit der Ablenkungswinkel. T wurde korrigiert auf gleiche Temperatur, Variation von H. I. auf unendlich kleine Bögen, auf Torsion, Uhrgang.

2. Deklinationsmessungen.

Datum	Winkel zwischen Nadel und Mire, reduziert auf Basis D		Azimut der Mire	Basis D
8. Mai	31° 19′	Mittel 31°.21′	3° 3′.6	34° 24′.6
10. „	24			
12. „	20			
	Basisversetzung			
14. „	30° 53′	Mittel 30° 53′.5	3° 3′.6	33° 57′.1
16. „	52			
18. „	53			
19. „	55			
21. „	54			
24. „	54			
28. „	53			
30. „	54			

Die obigen Deklinationsmessungen wurden mit Fadenaufhängung vorgenommen; natürlich wurde der Torsionseinfluß des Coconfadens bestimmt, außerdem wurden noch zur Kontrolle 4 Messungen mit Pinne vorgenommen, die 3 mal einen um 2′—3′ größeren, einmal einen 1′.6 kleineren Deklinationswinkel ergaben. Eine Änderung der Basis schien mir nicht wahrscheinlich, ich habe daher die beiden Mittelwerte 34° 24′.6 für 4.—12. Mai und 33° 57′ für 12. Mai bis 1. Juni angenommen.

Die Azimutbestimmung der Mire geschah mit Hülfe der Sonne im ersten Vertikal, gerechnet wurde dabei nach den Napier'schen Analogien.

Meine Beobachtungen ergaben für Az = 3° 6′.0
= 2′.0
= 2′.3
= 4′.7
} 3° 3′.80 im Mittel

Ansels Beobachtungen ergaben für Az = 3° 3′.3 im Mittel
von ebenfalls 4 Messungen.

Zur Rechnung verwendet wurde Az = 3° 3′.6 im Mittel

3. Inklinationsmessungen.

Die Inklinationsmessungen erfolgten mit Hülfe eines Inklinatoriums von Sartorius. Leider ist es mir nicht gelungen, einen Erdinduktor geliehen zu erhalten. Ich habe Anfragen darüber an die Observatorien in Potsdam, Wilhelmshafen, Aachen und Christiania gerichtet, leider waren die Institute nicht in der Lage ein solches Instrument zu verleihen. Die Inklinationsmessungen lassen viel zu wünschen übrig, trotzdem die Nadel für die Expedition nochmals auf das Sorgfältigste in der Werkstätte von Sartorius (Göttingen) poliert und ausbalanziert worden war.

Die Genauigkeit der Vertikal-Intensitäts-Registrierung ist eine wesentlich größere als die der absoluten Inklinationsmessungen. Auf den Rat des Herrn Prof. Ad. Schmidt verfuhr ich folgendermaßen. Ich benutzte die eine der beiden Nadeln Nr. X zu relativen, die andere IX zu absoluten Messungen. Nadel X wurde während der ganzen Registrierzeit nicht ummagnetisiert, sondern nur zum Schluß der Registrierzeit zweimal hinter einander. IX dagegen wurde bei jeder Messung ummagnetisiert. Mit IX wurden nun wenige Messungen, über die ganze Registrierzeit verteilt, angestellt, mit X dagegen so oft wie möglich, fast täglich.

Datum	Nr. der Nadel	Werte für I X, (nicht reduziert)	
8. Mai	IX		
10. „	IX		
12. „	IX X	77° 43′.0	
13. „	X	39′.7	
15. „	IX X	41′.0	
17. „	X	39′.2	
18. „	IX X	28′.5	0.5083
19. „	X	38′.0	51
20. „	IX		
21. „	X	33′.2	58
22. „	X	41′.2	53
23. „	X	35′.7	78
24. „	X	36′.5	56
25. „	X	30′.5	70
26. „	X	33′.6	47
27. „	X	38′.6	
28. „	IX X	29′.5	81
29. „	X	39′.7	74
30. „	X	38′.6	66
31. „	IX X X X	32′.5, 32′.0, 36′.5	73

Da hier 1′ im Inklinationswinkel etwa 70$^{\gamma}$ in der Vertikal-Intensität ausmacht, ist es recht schade, daß nur so ungenaue Messungen zustande kommen konnten. Es hat daher keinen Sinn mit diesen absoluten Messungen von I. die Basis der Vertikal-Intensität zu verfolgen, denn die Sicherheit der Basis der Wageregistrierungen von Tag zu Tag ist eine weit größere als die der absoluten Messung von I. Man sieht aus dem Verlauf der Kurven, daß die Wanderungsbeträge der Wageregistrierung z. B. vom 22. V. bis 1. VI. nicht mehr als ein paar Millimeter betragen können. Da die Wage trotz erheblicher Schwankungen von 5—10 cm und einer Empfindlichkeit von etwa $\frac{4^{\gamma}-5^{\gamma}}{\text{mm}}$ doch stets zur selben Tageszeit, wenn einigermaßen Ruhe herrscht, zur selben Ruhelage zurück kommt. Es schien mir daher geraten, die berechneten Basiswerte der Wage in Gruppen zusammenzufassen und die Mittelwerte als wahre Basiswerte anzunehmen. Die Wanderungsbeträge aber nach dem Aussehen der Kurve zu beurteilen und einzuführen. Jedenfalls ist dieser Weg sicherer als die Basiswerte direkt aus den unsichern Inklinationsmessungen abzuleiten. Die eventuellen Wanderungsbeträge der Wageregistrierung sind, nach dem Aussehn der Kurven geurteilt, sicher gering und vielmals kleiner als die Schwankungen, die sich für die Basis ergeben würden, wenn man die unsichern Inklinationswerte verwenden würde. Immerhin besitzen die Werte der Vertikalintensität, wegen dieser doch nur mangelhaften Kontrolle eine erheblich geringere Zuverlässigkeit als die Werte der Deklination und Horizontal-Intensität. Die Empfindlichkeit wurde nach den üblichen Methoden (Gauß aus I und II Hauptlage) bestimmt.

4. Skalenwertbestimmungen.

Datum	Dekl. ε in γ	Dekl. ε in ′	H. I ε'	V. I. ε''
6. Mai	3.5	1′.026	1.3	6.7 $\frac{\gamma}{mm}$
8. „	„	„	2.3	—
11. „	„	„	2.4	5.1
22. „	„	„	2.3	4.5
1. Juni	„	„	2.4	4.5
1. „	$^{\gamma}$.44	0′.13	0$^{\gamma}$.54	0$^{\gamma}$.87 Schnellregistrierung.

Der Torsionseinfluß des Deklinographen betrug etwa 1%.

5. Messung der Temperaturkoeffizienten.

Der Temperaturkoeffizient wurde durch Erwärmung des Registrierraumes mittels Lampen, und gleich darauf erfolgende Abkühlung durch Öffnen der Tür, zu ermitteln versucht. Für H. I. wurde der Koeffizient so klein gefunden, daß er bei der geringen Temperaturschwankung nicht von Bedeutung zu sein scheint und deshalb auch nicht in Rechnung gebracht wurde. Bei der Vertikal-Intensität ergab sich wohl ein erheblicher Temperaturkoeffizient. Aber die Temperaturschwankung innerhalb eines Tages ist so gering, daß sie selbst auch hier keinen Einfluß auf die tägliche Periode der Vertikal-Intensität gewinnt. Die Temperaturschwankung von Tag zu Tag im Laufe des Monats ist dagegen größer und hier tritt ein Einfluß wohl zu Tage; er ist daher auch in Rechnung gestellt worden.

Die Torsionswage.

Die in Dyrafjord benutzte magnetische Wage ist in der Werkstatt des Geophysikalischen Instituts zu Göttingen nach dem bekannten Prinzip der Torsionswage nach meinen Angaben gebaut worden.

Ein etwa 0.02 mm dicker und etwa 25 cm langer Stahldraht wurde von 2 Trägern horizontal gespannt. Zwischen Träger und Draht war an der einen Seite noch eine Messingblechfederung eingeschaltet. Der Draht konnte auf der einen Seite durch eine Schraubvorrichtung tordiert werden ohne dabei seine Spannung zu ändern; auf der anderen Seite konnte er ohne Torsion angespannt werden. An diesen Stahldraht war mittels Klemmbacken in der Mitte ein 7 cm langer und $^1/_2$—1 cm breiter und 0.1 cm dicker Stahlmagnet befestigt, der mit Balanzierschräubchen, Astasierschräubchen und an der unteren Seite mit einem Spiegel von Oberflächenversilberung versehen war. Das unter dem Magnetspiegel angebrachte Prisma war durch zwei bequem erreichbare und handliche Schrauben um eine horizontale und vertikale Axe drehbar das übrige ist aus der Figur 1 leicht zu erkennen.

Der Vorteil, den diese Wage mir gewährt hat, liegt vor allem in der bequemen Handlichkeit und der leichten Erreichbarkeit aller Teile; die eine schnelle Einstellung, besonders auch des Prismas, ermöglichen. Ferner wird durch die Torsionsaufhängung die unregelmäßige Reibung der Spitzen- und Schneidenlagerung vermieden, und ferner die Möglichkeit gegeben den Temperaturkoeffizient zu eliminieren. Es läßt sich nämlich die Bewegung der Magnetnadel infolge der Momentänderung bei Temperaturwechsel kompensieren

durch eine entgegengesetzte Bewegung der Magnetnadel infolge der Torsionsänderung beim Temperaturwechsel. Es muß nur ausprobiert werden, daß die Anfangstorsion nach der entsprechenden Richtung und in der entsprechenden Größe erteilt wird, was ja immer möglich ist, da mit Hülfe der Balanziergewichte bei jeder beliebigen Anfangstorsion die horizontale Nullage der Magneten wieder hergestellt werden kann. Es muß also bei der horizontalen Nullage des Magneten die bereits erteilte Anfangstorsion den magnetischen Nordpol in die entgegengesetzte Richtung zu treiben streben, als der Erdmagnetismus es tut, auf der nördlichen Halbkugel also nach oben, dann wird bei steigender Temperatur einmal die Torsionskraft abnehmen und infolgedessen der Nordpol der

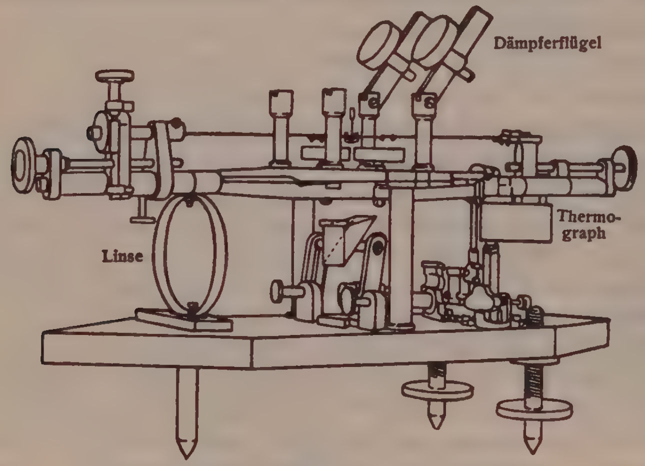


Fig. 1. Die Torsionswage.

Nadel sich senken; infolge der gleichzeitigen Momentabnahme, wird sich der Nordpol aber heben, da sie dem Druck der Balanziergewichte und der Anfangstorsion, die sie beide nach oben treiben, Folge leisten muß. Beide Bewegungen sollen nun gleich groß sein.

IV.

Ergebnisse der Beobachtungen.

1. Die Störung vom 18.—20. Mai 1910 (Zeit des Durchganges).

Vor allem interessiert natürlich die Frage, ob ein Einfluß des Kometen beobachtet werden konnte.

Die Entwicklung des Halleyschen Kometen blieb leider weit hinter den Erwartungen zurück. Es ist sogar zweifelhaft, ob ein Durchgang der Erde durch den Schweif stattgefunden hat. Zur erwarteten Zeit früh Morgens am 19. Mai 1911 hat er wohl nicht stattgefunden, denn J. Hartmann beobachtete den Kometen noch am Abend des 19. Mai derart, daß der Durchgang noch nicht erfolgt sein konnte. Da somit die Zeit des Durchgangs bisher nicht genau fixiert ist, ist es schwer, dem Durchgange, falls er überhaupt stattgefunden hat, bestimmte magnetische Ereignisse zuzuordnen; wenigstens ist dies der Fall, wenn man an eine Änderung des magnetischen Zustandes der Erde denkt, die beim Eintritt in den Schweif des Kometen beginnt und beim Verlassen endet, die also etwa — nach der Vorausberechnung — eine Stunde dauern sollte. Besonders schwierig wird dies noch durch die besonders starken Bewegungen der Magnetnadeln die gerade in der Zeit vom 18.—20. Mai in Island auftraten.

Ferner kann man an einen zeitlich etwas ausgedehnten Einfluß des Kometenschweifes denken. An einen Einfluß, der eine längere Zeit hindurch andauerte, während die Erde sich in der Nähe des Kometenschweifes befand. Tatsächlich zeigt der 19. Mai, der für den Durchgang vorausberechnete Tag, an dem der Durchgang, wenn er überhaupt stattgefunden hat, spät abends erfolgt ist, die größte erdmagnetische Störung die in der Zeit vom 4. Mai bis 1. Juni in Dyrafjord registriert wurde. Aber zwei Gründe sprechen dagegen, hier einen Einfluß des Kometen zu vermuten.

1. Die Störung unterscheidet sich in nichts von den anderen Störungen, die in der obigen Zeit registriert wurden, nur daß sie ein wenig stärker ist. Vor allem zeigt sich auch hier, genau wie bei den anderen Störungen, die so sehr charakteristische Wiederholung des Störungsbildes an den benachbarten Tagen, die unten noch eingehender besprochen werden wird (Siehe Abbildung der Störungen 1, 2, 3, 4).

2. Es findet sich gerade zu dieser Zeit eine außerordentlich große Gruppe von Sonnenflecken und Fackeln in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne, so daß man doch dieser wohl die Störung zuordnen muß.

Es scheint mir daher, daß zunächst keine Gründe vorliegen, die einen Einfluß des Kometen auf das erdmagnetische Feld beweisen, trotzdem gerade in der für den Durchgang vorausberechneten Zeit (etwa in den benachbarten 24^h) die stärkste magnetische Bewegung der ganzen Registrierzeit stattfand.

Leider sind die Leuchterscheinungen im Kometen nur schwach

entwickelt gewesen. So besteht wenig Hoffnung, daß zur selben Zeit, als die magnetischen Störungen im Mai beobachtet wurden, parallel laufende Änderungen in den Leuchterscheinungen des Kometen wahrgenommen worden sind. Immerhin soll, wenn alle Beobachtungen über den Kometen besonders von tropischen Sternwarten vorliegen, das Material noch einmal darauf hin geprüft werden. Tafel 1 gibt ein Bild der erdmagnetischen Registrierungen vom 18.—20. Mai.

2. Die tägliche Periode an gestörten und ungestörten Tagen.

Die Verarbeitung der erdmagnetischen Beobachtungen von Dyrafjord hat zu einigen Überlegungen Anlaß gegeben.

Besonders wichtig scheint mir das, was ich die Wiederholung des Störungsbildes nennen möchte. Bekannt ist, daß sich oftmals in den Registrierkurven Ausbiegungen, Störungen zeigen, die sich mehrere Tage hintereinander wiederholen. Auch in den Registrierungen äquatornaher Stationen, so des Batavia- und Samoa-Observatoriums sah ich mehrfach solche Störungen, die etwa 1—3 Stunden dauern. In ganz anderem Maße ist dies in Island der Fall. Was in den Tropen Ausnahme, ist hier durchaus Regel. Die Störungen, die während der Registrierzeit in Island auftraten, waren in Island selbst recht bedeutend; der Vergleich mit Tropen-Stationen zeigte jedoch, daß sie dort nur wenig, zum Teil gar nicht hervortraten. Wir haben es also meist mit „polaren“ Störungen zu tun; bei diesen ändert sich in Island der Charakter des ganzen Tages und diese Änderung wiederholte sich an mehreren Tagen hintereinander. In der Horizontal-Intensität in Island trat hierbei eine positive Störung während des Tages und eine spiegelbildlich hierzu verlaufende negative Störung während der Nacht auf. Beide getrennt durch eine Zeit verhältnismäßiger Ruhe, bei der sich die Magnetnadeln in der Nähe der normalen Lage aufhielten. An den folgenden Tagen wiederholt sich das Bild in oftmals überraschender Treue. Tafel 1 gibt ein Bild solcher Störung in allen Einzelheiten, im Maßstabe der Registrierung für alle 3 Elemente. Tafel 2 zeigt in verkleinertem Maßstab in Halbstundenmitteln den Verlauf der Horizontal-Intensität für fast die ganze Registrierzeit. Ohne durch zuviel Einzelheiten zu stören, lassen diese Kurven die Wiederholung des Störungsbildes gut erkennen. Aber auch zwei verschiedene Störungen verlaufen in ähnlicher Form. Dies zeigt Tafel 3 in größerem Maßstabe als Tafel 2 und für 3 besonders charakteristische Störungen. Die Eintrittszeiten der Extreme der Störungen sind gleich. Die große Ähnlichkeit des Verlaufes an allen

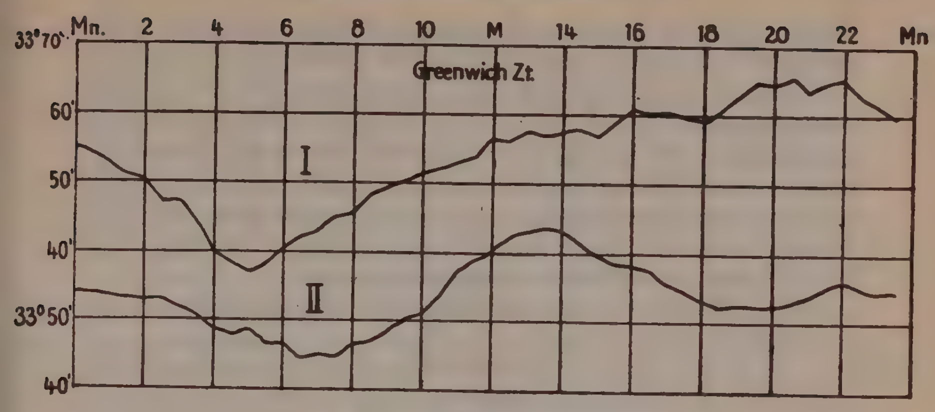


Fig. 2. Tägl. Periode der Deklination.
I aus allen Tagen berechnet, mit Einschluß der gestörten. II am ruhigsten Tage.

Fig. 3. Tägl. Periode der Hor. Int.
I aus allen Tagen. II am ruhigsten Tage.

gestörten Tagen, ist aber keineswegs bloß eine Verstärkung der normalen täglichen Periode. Die normale tägliche Periode verläuft ganz anders wie die Kurve der Horizontal-Intensität des ruhigsten Tages der Registrierzeit zeigt (Kurve III auf Taf. 3). Fig. 2 und 3 zeigen die Kurve der mittleren täglichen Periode der Deklination und Horizontal-Intensität und zwar für ungestörte Tage II. und für alle Tage (mit Einschluß der gestörten) I. Auch hier zeigt sich deutlich, daß es sich bei den Störungen durchaus nicht um eine bloße Vertiefung der täglichen Periode handelt.

Dies führt uns zu der physikalischen Seite der Sache.

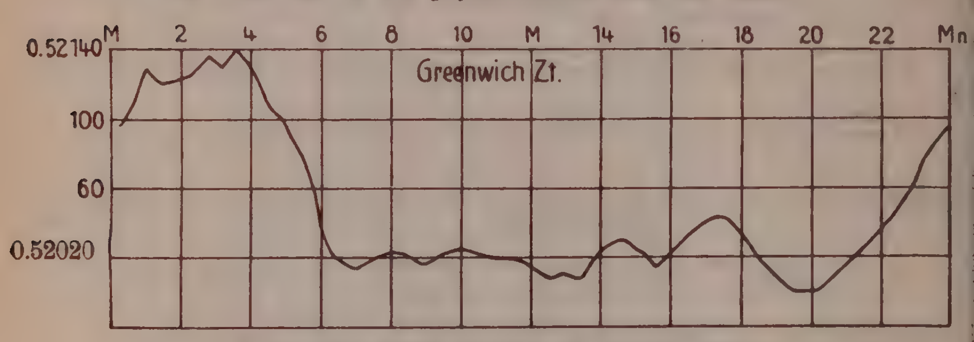


Fig. 4. Tägl. Periode der Vert. Int. aus allen Tagen.

Die täglichen Variationen verdanken ihre Stärke der Ionisation der oberen Atmosphäre durch ultraviolettes Licht. Wenn nun die Ursache der Störungen lediglich eine Verstärkung der ultravioletten Strahlen wäre, so müßte man in erster Linie eine Verstärkung derjenigen Stromsysteme des täglichen Variationsfeldes erwarten, die an der Tagseite gelegen sind; also nur eine Vertiefung dieses Teiles der täglichen Periode. Vielleicht tritt auch tatsächlich etwas derartiges in geringem Maße ein; weit größer aber ist der Effekt der dadurch entsteht, daß offenbar bei Störungen außerdem andere Stromsysteme auftreten, die ganz anders gelagert sein müssen als diejenige, die das tägliche Variationsfeld darstellen — die sogar in Island an der Nachtseite am stärksten sind — und deren magnetische Wirkung zu ungestörter Zeit recht gering sein muß. Vorhanden können diese Stromsysteme auch zu ungestörter Zeit sein. Nur treten sie nicht hervor.

Der allgemeinen Zirkulation der oberen Atmosphäre, z. B. der West-Ostdrift entsprechend, kann ein allgemeines System schwacher Induktionsströme vorhanden sein, das nur zur Zeit starker Ionisation durch die Sonnentätigkeit, und nur an den Stellen der Atmosphäre, wo die Ionisation stark auftritt, zu großer Stärke anwächst, und vornehmlich nur dort und nur dann magnetische Wirkung hat.

Die Kurven der Störungen haben ganz das Aussehen, wie es in großen Zügen die Theorie von Birkeland verlangt. Elektrische Teilchen, von der Sonne kommend, gelangen ins Magnetfeld der Erde, erleiden eine Ablenkung darin und werden vorzugsweise in bestimmte Zonen, auch auf der Nachtseite der Erde eingesogen; es entsteht dadurch eine positive Störung an der Tagseite, eine negative an der Nachtseite, getrennt durch zwei Bereiche verhältnismäßiger Ruhe.

Solange die Sonnentätigkeit anhält bleibt diese Anordnung erhalten, scheinbar als ob sie fest im Raume ruhte und die Erde drunter fortdrehte. Bedingt ist diese Anordnung durch die Lage des Beobachtungsortes zum magnetischen und zum Drehpol durch die magnetische Steifheit und Bahnrichtung der ankommenden elektrischen Teilchen. Falls sich hierin nichts ändert, wiederholt sich das Störungsbild am nächsten Tage in großen Zügen. Veränderungen in der Steifheit und Bahnrichtung der elektrischen Teilchen (durch die Sonnenrotation etc.) bedingen vielleicht die Veränderungen im Störungsbild von Tag zu Tag und zwischen den verschiedenen Störungen.

Aus energetischen Gründen wird man allerdings wohl annehmen müssen, daß die von der Sonne kommenden elektrischen Teilchen, wie schon oben ausgeführt, nur als Ionisatoren dienen und nicht selbst durch ihre Bewegung den magnetischen Effekt erzeugen. Die Energie der Störung rührt vielmehr wohl von Induktionsströmen her, die Rotation der Erde ist schließlich die Energiequelle.

Die große Ähnlichkeit, die auch in vielen Einzelheiten der Störungen verschiedener Tage am selben Orte besteht, während wieder von Ort zu Ort gerade bei polaren Störungen große Unterschiede herrschen, so wie die oftmals genaue Spiegelbildlichkeit der Tag- und Nachtstörung scheint durch Verhältnisse bedingt zu sein, die man sich starr mit dem Orte verbunden denken muß. Eine so genaue Wiederholung würde mir bei so labilen Gebilden, wie diskrete Stromwirbel, z. B. Polarlichtdraperien nicht wahrscheinlich sein. Solche Wirbel mögen auch auftreten und einen geringen Anteil an der Störung liefern, nicht aber deren Gang im Großen bestimmen. Man wird daher wohl nicht in den Bahnen der elektrischen von der Sonne kommenden Teilchen die Ströme zu erkennen haben, deren große magnetische Wirkung in großen Zügen oben geschildert wurde und die sich in solcher Regelmäßigkeit wiederholten, sondern man muß wohl Induktionsströme annehmen, die durch die Bewegung der stark ionisierten oberen Luft gegen das

mit dem Beobachtungsort starr verbundene magnetische Kraftliniensystem entstehen. Eine getreue Wiederholung dieser Ströme hat nichts Unwahrscheinliches. Die Konfiguration des Kraftliniensystems des Ortes bedingt also in erster Linie den Störungscharakter; darum sind auch die Störungen um so komplizierter gebaut, je inhomogener das magnetische Kraftfeld in der Nachbarschaft gebaut ist.

Die Störungen sind also ebenso wie die normale tägliche Periode durch Induktionsströme bedingt. Der Störungsbetrag besitzt ferner selbst eine gut ausgesprochene tägliche Periode, da sich ja das Störungsbild bei mehreren aufeinander folgenden Erdumdrehungen wiederholt, und die Lage der Maxima und Minima sich für ein und denselben Ort bei verschiedenen Störungen nur wenig ändert. Trotzdem sind die normale tägliche Periode und die Störung etwas gänzlich von einander verschiedenes. Die mittlere tägliche Periode bekommt in Polargegenden ein ganz anderes Aussehen, wenn man sie nur von ungestörten, oder von allen Tagen ableitet (siehe Tafel 4). Physikalisch besteht der Hauptunterschied darin, daß die Ionisatoren, die durch ihre Ionisation die zu den Induktionsströmen nötige Leitfähigkeit liefern, verschieden sind. Der eine, ultraviolettes Licht, erfährt keine Ablenkung im Magnetfeld der Erde, und wirkt daher nur auf der Tagseite, der andere, elektrische Teilchen, erfährt eine solche Ablenkung; die Lage seines Wirkungskreises ist deshalb durch diese Ablenkung bedingt und bevorzugt infolgedessen bestimmte Gebiete, die sich auch über die Nachtseite erstrecken können (Polarlichtzonen).

Die Lage und Tiefe der Maxima und Minima bei der täglichen Periode schwanken von Tag zu Tag nur langsam und recht regelmäßig, der Regelmäßigkeit der Vorgänge entsprechend, von denen ihre Tiefe und Lage abhängt, nämlich mit der Deklination der Sonne und mit den täglichen Oscillationen des Luftdruckes. Die Lage der täglichen Maxima und Minima der Störungen schwanken von Tag zu Tag und von Störung zu Störung mit stärker veränderlichen Vorgängen, mit der Lage der Einströmungsgebiete der elektrischen Teilchen auf der Erde, die wiederum von der Lage der Centren der Sonnentätigkeit (Fackeln) und von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängt und mit diesen beiden Faktoren schwankt.

Daß übrigens bei der täglichen Periode die Steigerung der Ionisation durch einen Ionisator bedingt ist, der keine Ablenkung im Magnetfeld der Erde erfährt, sondern auf die Tagseite beschränkt ist, (ultraviolettes Licht) beweisen recht gut die räum-

lichen Vektordiagramme der täglichen Periode für Samoa, die auf wenige Minuten genau ein schnelles Anwachsen und Abnehmen der Vektoren um Sonnen-Auf- und Untergang zeigen.

3. Die vierundzwanzigstündigen Mittel von 6 zu 6 Stunden und die Nachstörungen.

Ebenso wie in der Verarbeitung der erdmagnetischen Beobachtungen in Samoa, sind auch hier die 24 stündigen Mittel der drei Elemente gebildet und zwar hier fortschreitend von 3 zu 3 Stunden, da Halbstundenmittel vorlagen und durch den kleineren Zeitraum von 3 Stunden (für Samoa wurde von 6 zu 6 Stunden fortgeschritten) eine getreuere Abbildung der Störungen erreicht wird, was bei der außerordentlich starken Bewegung der Kurven in Island recht erwünscht ist.

Diese Kurve der fortschreitenden 24 stündigen Mittel gibt ein Bild der Störungen nach Elimination der täglichen Periode und macht dadurch die Störungen frei von diesem lokalen Einflusse.

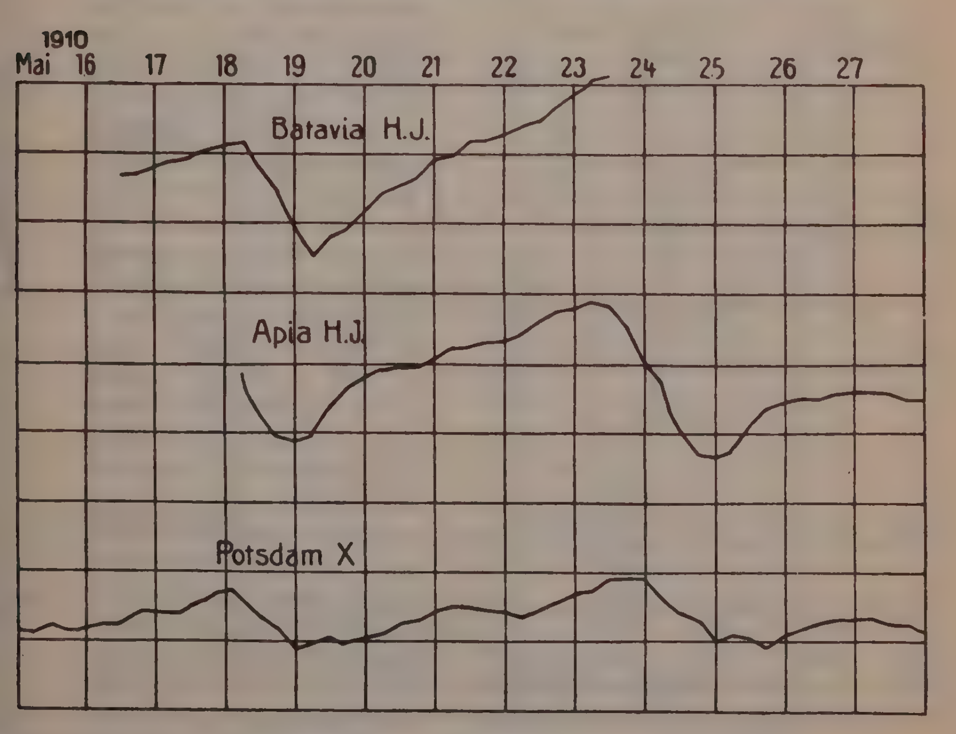


Fig. 5. 24 stündige Mittel der Hor. Int. von Batavia u. Apia u. der X Comp. von Potsdam. (1 cm = 20 γ, nach oben wachsend).

Die Darstellung der Störung, die diese Kurven der 24stündigen Mittel geben, sind daher besonders geeignet zum Vergleich der Störungen verschiedener Orte der Erde.

Ich habe nun diese Kurve der 24stündigen Mittel für 4 Stationen für die Horizontal-Intensität gezeichnet, für Island, Potsdam, Samoa und Batavia. Es zeigt sich dabei folgendes. In der Zeit vom 16. bis 23. Mai 1910 erzeugt die starke Störung vom 18./19. einen Abfall der Kurve; das Minimum wird am 19. erreicht und nun kehrt die Kurve langsam wieder zu ihren Normalwerten zurück, die etwa am 23. erreicht werden. Für Batavia, Samoa und Potsdam verlaufen die Kurven recht ähnlich, nur daß die Amplitude mit wachsender geographischer Breite abnimmt. Der Unterschied zwischen der Kurvenlage beim Minimum am 19. und dem Maximum am 23. Mai beträgt

für Potsdam	51°,5	Nördl.	Br.	20^{γ}
Samoa	13°,5	Südl.	Br.	41^{γ}
Batavia	5°,5	„	„	52^{γ}

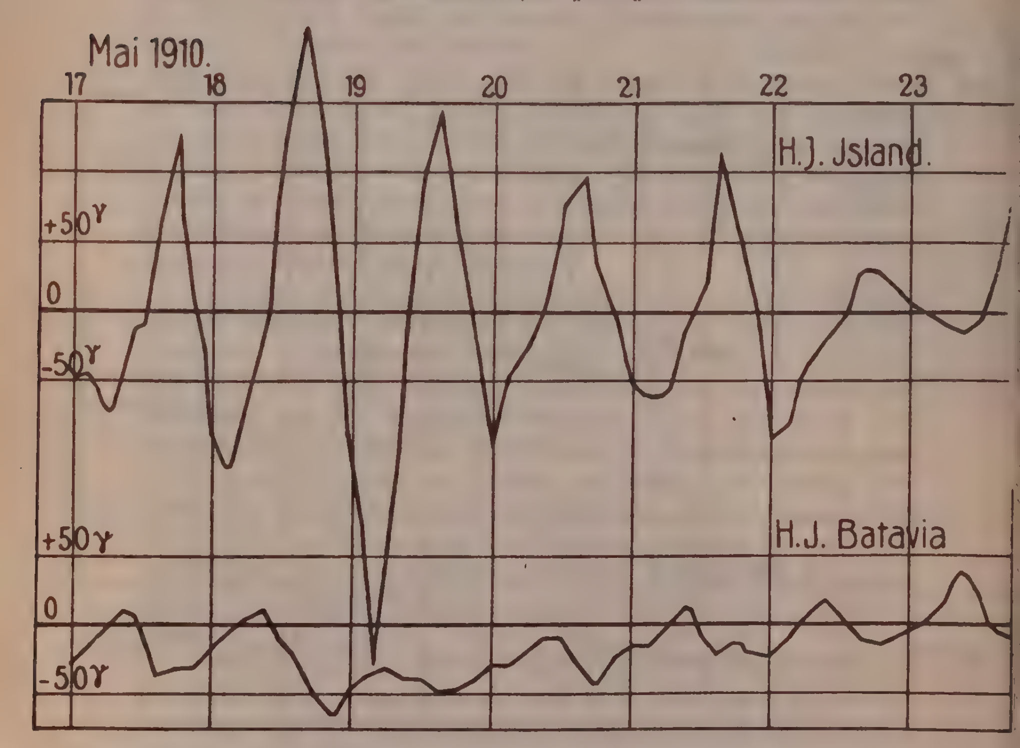


Fig. 6. Verlauf der Hor. Int. in Island u. Batavia vom 17.—23. Mai (24stündige Mittel von 3 zu 3 Stunde

(Für Potsdam ist die X-Componente statt der H. I. zugrunde gelegt; wegen der geringen Declination 9°.5 West kann der Unterschied zwischen ΔX und ΔH für Potsdam bei unserer Frage vernachlässigt werden.)

Der Effekt einer Störung besteht also bei allen drei Stationen in einer Erniedrigung der Horizontalkomponente, die erst nach einer Reihe von Tagen wieder verschwindet. In den täglichen Registrierkurven der Stationen tritt dies schon deutlich zu Tage; die durch die Störung aus der Normallage gebrachte Horizontal-Intensität kehrt erst langsam in ihre Ruhelage zurück, wie die kleine Kurve der 24stündigen Mittel von 3 zu 3 Stunden von Batavia (Fig. 6); und für eine andere Störung die Kurve der Stundenmittel (Fig. 7) für Samoa sehr anschaulich zeigt. Diese Kurven, für Batavia und Apia, die ein verkleinertes Bild der Bewegung der Magnetnadel bei den Störungen und während der folgenden Tage geben, zeigen nichts von einer täglichen Wiederholung des Störungsbildes wie wir es in Island fanden; ein mit der Erdrotation periodisches Störungsfeld scheint hier also nicht zu wirken. Die Lage eines solchen scheint im wesentlichen auf die höheren Breiten be-

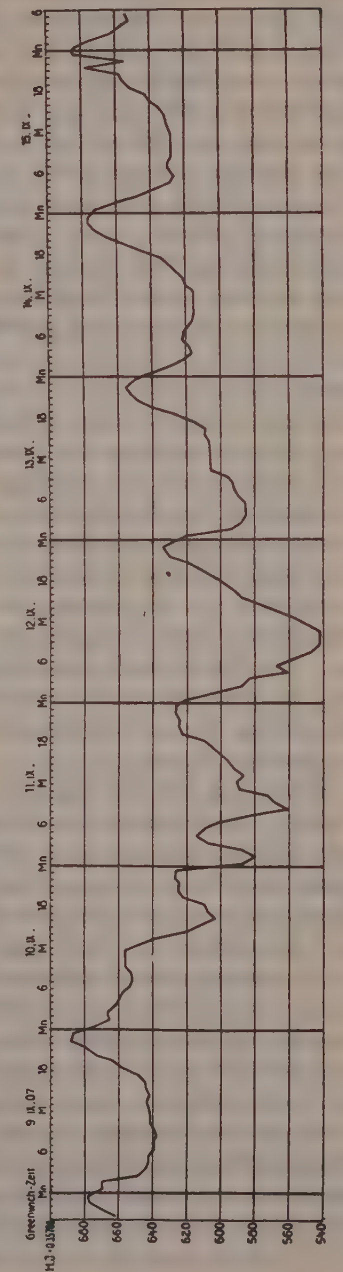


Fig. 7. Verlauf der Hor. Int. in Samoa vom 9. IX. bis 15. IX. 1907 (Stundenmittel).

schränkt zu sein. Die Rückwanderung der Kurve der 24 stündigen Mittel von 6 zu 6 Stunden in die normale Lage, also das Abklingen der Störung, trägt an tropischen Stationen meistens recht deutlich den Charakter einer *e*-Funktion. Durch Konstruktion der logarithmischen Kurve dieser 24 stündigen Mittelwertskurve wurde dies an mehreren Beispielen der Samoa-Kurven untersucht. Die Kurve der 24 stündigen Mittel zeigt den Gang des magnetischen Elementes befreit von allen mit der Erdrotation periodisch verlaufenden Einflüssen, also befreit von der täglichen Periode natürlich auch von dem Einfluß des täglichen Störungsfeldes, das in Polargegenden mit der Erdrotation oscilliert. Es restiert also der nicht (mit der Erdrotation) periodische Gang der Störung. Dieser ist in den niederen Breiten stärker ausgeprägt. Es ist also in den Störungen ein Anteil enthalten der mit abnehmender Breite wächst. Falls man annimmt, was wohl das Wahrscheinlichste ist, daß diesem Anteil ein elektrisches Stromsystem entspricht, so muß es in der Äquatorgegend am stärksten ausgebildet sein. Das glatte Aussehen und das Fehlen eines mit der Erdrotation periodischen Störungseinflusses bei Kurven aus niederen Breiten führt zu der Vermutung, daß wir es hier mit einem einzigen einfach gebauten Stromsystem zu tun haben, das man sich in erster Annäherung vielleicht als einen Ring um die Erde in den Tropen vorstellen kann. Da wir es auch hier wohl mit Induktionsströmen zu tun haben, ist natürlich auch der einfache Bau des magnetischen Kraftliniensystems in den Tropen ein wesentlicher Grund für das glatte Aussehen der Kurve.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse in hohen Breiten, in Island. Dort besteht der Störungsverlauf im wesentlichen aus einem mit der Erdrotation periodisch wiederkehrenden Störungssystem; und zwar einem doppelten, einem positiv (in d. H. I.) wirkenden System an der Tagseite, einem negativen an der Nachtseite. Die mittleren Amplituden dieser positiven und negativen Störung nehmen beim Nachlassen der Störung ab, wie eine um die normale Lage oscillierende gedämpfte Schwingung (Fig. 6). Die Bewegung der Magnetnadel erfolgt hier im Verlauf einer Störung zwar sehr heftig, aber sie kehrt zur Zeit der geringeren Bewegung (Zeit zwischen der negativen Nacht- und positiven Tagstörung) in die Ruhelage zurück. Die Bewegung im Laufe einer Störung erfolgt mit abnehmender Intensität im großen Ganzen symmetrisch zur normalen Ruhelage (Fig. 6). Hierin liegt ein charakteristischer Unterschied gegenüber dem Störungsverlauf in den

Tropen, wo gerade die normale Ruhelage energisch verlassen und oft erst im Laufe von 5 bis 6 Tagen wieder erreicht wird (Fig. 7).

Die Kurven der 24 stündigen Mittel von 3 zu 3 Stunden für Island haben kein regelmäßiges Aussehen. Wie wir schon oben sahen, verschieben sich die zeitlichen Lagen der Maxima und Minima des täglichen Störungsfeldes (infolge der Sonnenrotation, Bewegung der Störungsquellen auf der Sonne, Änderung der Geschwindigkeit der elektrischen Teilchen). Durch diese Verlagerungen von Tag zu Tag im Laufe derselben Störung, ist das Störungsfeld nicht mehr genau mit der Erdrotation periodisch, und die Mittelung über einen 24 stündigen Zeitraum eliminiert den mit der Erdrotation periodischen Teil mehr oder weniger, jenachdem gerade eine mehr oder weniger große Verlagerung der Maxima und Minima stattgefunden hat. Dies gibt den Kurven für uns etwas Willkürliches da wir eine Gesetzmäßigkeit in diesen Verlagerungen noch nicht kennen und diese uns einstweilen als etwas unbestimmtes willkürliches entgegentreten. Verstärkt wird dies unregelmäßige Aussehen noch durch den Einfluß der Teilmaxima und Minima die das tägliche Störungsmaximum und -minimum umgeben wie — um ein bekanntes Bild zu brauchen — wandernde Teildepressionen in der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre.

Immerhin läßt sich aber erkennen, daß der Verlauf dieser Kurve ein wesentlich anderer ist als der für Batavia.

Aus dem Aussehen der Kurven, die die direkte Bewegung der Magnet-Nadel (i. d. H. I.) darstellen (Fig. 6 u. 7) und aus den Kurven der 24 stündigen Mittel läßt sich wohl folgendes zusammenfassend schließen. Bei den oben betrachteten Störungen liegt ein homogenes einfach gebautes Stromsystem in den Tropen (Ring um die Erde in den Tropen), das eine Erniedrigung der Horizontal-Intensität erzeugt. Eine tägliche Periode dieses Störungsfeldes ist, wenn überhaupt vorhanden, dort nur gering. Seine Intensität nimmt im Laufe mehrerer Tage nach Ausbruch der Störung langsam ab, wodurch die Horizontal-Intensität langsam wieder in ihre Normallage zurückkehrt. Die Wirkung dieses Systems nimmt mit wachsender Breite ab. In den hohen Breiten (Island) lagert dagegen ein komplizierteres Störungssystem, dem zwei Hauptstörungen, positive Tag- und negative Nachtstörung (in H. I.) entsprechen, die sich mit der Erdrotation periodisch wiederholen und im Laufe mehrer Tage abklingen. Dieses System ist beweglicher, ändert seine Lage von Tag zu Tag etwas, scheinbar unregelmäßig. Die Wirkung dieses Störungssystems nimmt mit abnehmender Breite ab. In weit entfernten Gegenden, Tropen, ist die Wirkung

dieser polaren Störungszentren nur schwach merklich, als kleine Ausbuchtungen, von 1—3 Stundendauer, die sich an aufeinander folgenden Tagen zuweilen wiederholen.

4. Magnetische Störungen im Mai 1910 und die Sonnentätigkeit.

Im I. Kapitel wurde die Vermutung ausgesprochen, daß nicht die Sonnenflecken sondern Sonnenfackeln die Ursache der erdmagnetischen Störungen seien; und daß deshalb zwischen Fackeln und Störungen eine genauere Parallelität zu erwarten sei als zwischen Flecken und Störungen. Um dies nachprüfen zu können erbat ich mir Kopien von allen im Monat Mai 1910 gemachten Sonnenaufnahmen vom Solar Observatory in Pasadena und vom Observatorio del Ebro, Tortosa. Beide Institute sandten die erbetenen Kopien und zwar das Solar Observatory spektroheliographische Aufnahmen von 17 cm Durchmesser, das Observatorio del Ebro direkte Sonnenphotographien von 20 cm Durchmesser.

Die spektroheliographischen Aufnahmen zeigen besonders deutlich die Fackelbildung. Aus dem Vergleich dieser Bilder der Sonnentätigkeit mit den erdmagnetischen Registrierungen ergab sich ein guter Parallelismus zwischen Fackelbildung und erdmagnetischer Störung. Besonders markant im folgendem Falle. Am 23. Mai 1910 erscheint in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne eine neue Fackel ohne daß an diesem und an den folgenden Tagen in der Nachbarschaft der Fackelgruppe oder sonst wo auf der Sonne ein neuer Fleck auftritt. Ein alter Fleck der schon am 18./19. Mai den Zentralmeridian passierte und mit dem die Störung vom 18./19. Mai korrespondiert, steht am Sonnenrand und verschwindet durch die Sonnenrotation am 24. Mai. Nach mehrtägiger verhältnismäßig magnetischer Ruhe beginnt am 24. Mai eine starke Störung; also korrespondierend mit der neuen Fackel, ohne daß ein Fleck auftritt. Am 28. Mai erscheint in der Nähe des Ostrandes der Sonne eine große Fackel, die sich westwärts bewegt, und am 30. in die Nähe des Zentralmeridians gelangt. Am 30. setzt eine erdmagnetische Störung ein. Flecken treten erst am 31. Mai und 1. Juni deutlich zu Tage.

Schon die wenigen Photographien (11 von Pasadena, 23 von Tortosa für etwa 1 Monat) scheinen eine größere Parallelität zwischen Fackeln und Störungen als zwischen Flecken und Störungen zu beweisen. Eine sichere Entscheidung dieser Frage ist wohl zu erwarten, wenn für eine erdmagnetisch stark gestörte Zeit vielleicht für 1 Monat eine große Reihe spektroheliographischer Aufnahmen (vielleicht stündlich) vorliegen. Vielleicht würde es

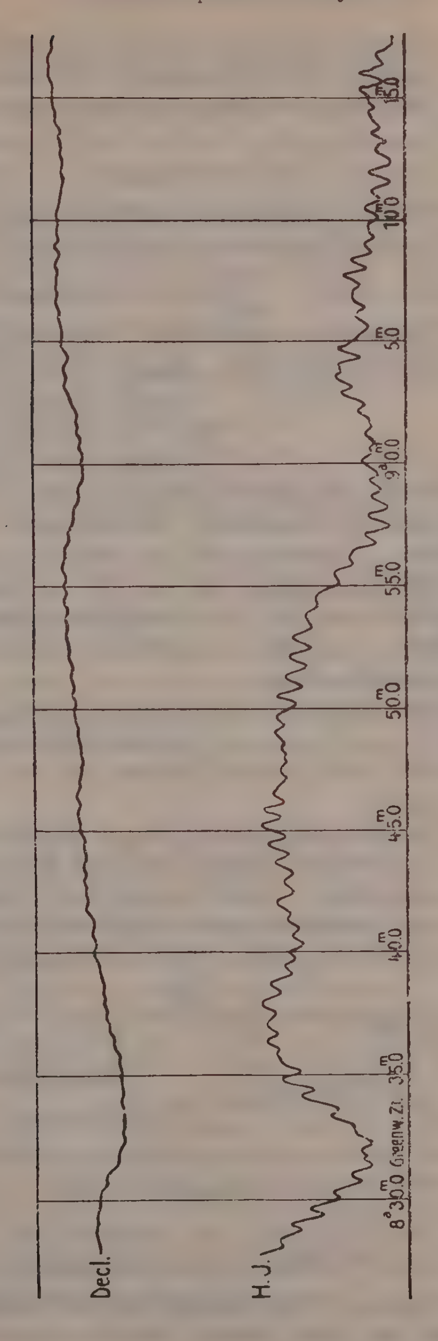


Fig 8. Pulsationen in Island (Dyrafjord).
Skalenwert: Dekl. 1 mm = 0'.3 (nach oben wachsende westl. Dekl.).
H. I. 1 mm = 0.51 γ (nach oben wachsend).

dann auch gelingen bestimmten Phasen der Störungen bestimmte Phasen der Sonnentätigkeit zuzuordnen. Zu einer solchen Arbeit müßten sich natürlich eine Reihe von Observatorien vereinigen.

5. Pulsationen.

Zum Schluß der Registrierzeit in Dyrafjord wurde eine 36 stündige Fein- und Schnellregistrierung vorgenommen. Die Registriergeschwindigkeit betrug $\frac{15 \text{ sec}}{\text{mm}}$ (Zweistundenlauf).

Die Empfindlichkeit wurde durch Astasierung erhöht.

Es entsprach bei der Dekl. anfangs 1 mm = $0'.3 = 1^{\gamma}.1$
später 1 mm = $0'.13 = 0.44^{\gamma}$
Hor. Int. 1 mm = $0^{\gamma}.54$
Wage 1 mm = $0^{\gamma}.87$.

Fast während der ganzen Registrierzeit waren mehr oder weniger regelmäßige Pulsationen, Schwingungen von kleiner Periode vorhanden. Allerdings sind sie zur Zeit großer Bewegung so stark auseinandergezogen, daß sie nicht so deutlich in die Erscheinung treten, wie zur Zeit verhältnismäßiger Ruhe. Fig. 8 zeigt eine Reihe besonders regelmäßiger Pulsationen von einer Periode von ungefähr 45 sec.

Die mittlere Amplitude ist in der H. I. etwa $1^{\gamma}.5$
in der Dekl. $< 0'.2$ oder $0^{\gamma}.7$.

Es kommen auch noch geringe Perioden vor wie Fig. 9 zeigt, bis zu 7—8 sec Länge.

Einen Vergleich der Registrierungen in Dyrafjord mit denen in Potsdam und Batavia zeigte, daß auch dort zur selben Zeit Pulsationen stattfanden. Jedoch war es nicht möglich bestimmte Wellen auf allen Registrierungen zu identifizieren und Zeitunterschiede des Auftretens gleicher Phasen festzustellen.

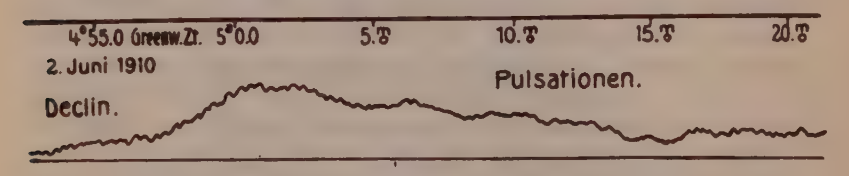


Fig. 9. Pulsationen in Island.

V. Reisebeobachtungen.

Auf der Hin- und Rückreise die an der West-Süd-West- und Süd-Ost-Küste der Insel entlang führte wurden an 6 Plätzen

Messungen der magnetischen Elemente vorgenommen. Die Messungen wurden mit Hülfe der aus der Registrierzeit abgeleiteten täglichen Periode für Monat Mai auf ein Tagesmittel reduziert. Den unregelmäßigen Störungen wurde dabei nur insofern Rechnung getragen, als der Reduktion auf das Tagesmittel die aus allen Tagen (mit Einschluß der gestörten) abgeleitete tägliche Periode zugrunde gelegt wurde.

Bei der Bestimmung der Deklination wurde bei Westmaneyrie und Stykkisholm und bei der ersten Messung in Reykiavik die Azimutrichtung aus der Karte entnommen; bei den übrigen Stationen mit Hülfe der Sonne bestimmt.

Ein Urteil über die Genauigkeit der in der Tabelle mitgeteilten Zahlen gibt am besten der Vergleich der beiden am 21. April und 11. Juni am selben Platze in Reykiavik ausgeführten Messungen.

	D	H. I.	I
21. April	35° 46′	0.1325γ	75° 27′
11. Juni	36° 5′	0.1317	75° 20′.

Die Unterschiede rühren von nicht eliminierbaren Störungsbeträgen, und von Messungsungenauigkeiten her. Bei der ersten Deklinationsmessung in Reykiawik wurde die Meridianrichtung aus der Karte entnommen.

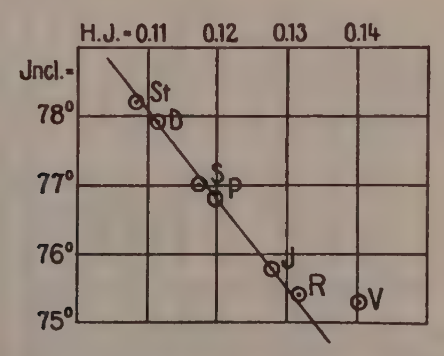


Fig. 10. Incl. u. Hor. Int. an 7 Plätzen von Island.

Wie genau die Änderung von I. und H. I. von Ort zu Ort korrespondieren, zeigt Fig. 10. Eine Übersicht über die erhaltenen Resultate gibt die nachfolgende Tabelle.

Datum		Ort	N. Breite	Länge westl. Greenw.	Deklination	Hor.-Int.	Inclin.	Vert.-Int.	Nähere Bezeichnung des Beobachtungsplatzes
5. Juni 1911	10^a—12^a 2^p—4^p	Isafjord	66° 5′	23° 10′	38° 32′ westl.	0.1278 C.G.S.	75° 49′	0.5071	Mitte der westlich von der Stadt gelegenen Landzunge.
Mai		Dyrafjord	65 53	23 25	33 54	0.1114	77 55	0.5205	Beobachtungsstation der norwegischen Polarlichtexpedition 1902 Höffdaodde (Framnaes).
6. Juni	4^p—6^p	Patriksfjord	65 40	24 —	36 29	0.1197	76 49	0.5157	Wiese hinter der Landungsbrücke.
25. April	10^a—12^a	Stykkisholmr	65 4	22 48	33 51	0.1089	78 11	0.5166	Kleiner Hügel nordwestlich von der Landungsbrücke.
21. April	1^p—3^p u. 6^p—7^p	Reykjawik	64 8	22 0	35 55	0.1321	75 23	0.5102	Mitte des südlich von der Seemannsschule gelegenen freien Platzes.
11. Juni	11^a—12^p								
19. April	10^a—12^a	Vestmanna Eyjar	63 26	20 18	32 34	0.1406	75 17	0.5361	100 m östlich von der Kirche von Heimaey.
18. Juni	8^a—10^a	Seidisfjord	64 55	13 50	—	0.1176	77 2	0.5106	Kleiner Vorhügel am westlichen Dorfausgang.

Inhaltsverzeichnis des I. Teiles.

Die Island-Expedition im Frühjahr 1910.

Von

Angenheister und Ansel.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 10. Dezember 1910.

Zweiter Teil.

Die luftelektrischen und meteorologischen Ergebnisse der Beobachtungen in Island vom 10. Mai bis 2. Juni 1910 anlässlich des Durchganges des Halleyschen Kometen.

Von **A. Ansel.**

Mit 4 Tafeln.

Einleitung.

Während seines Periheldurchganges im Mai 1910 sollte der Halleysche Komet nach Voraussicht die Verbindungslinie Sonne-Erde näherungsweise schneiden, und sofern der Kometenschweif vorher keine Veränderung erfuhr, war zu erwarten, daß die Erde durch ihn hindurch passieren werde.

Der mutmaßliche Eintritt dieses Ereignisses war auf Tag und Stunde im voraus bekannt; im Zusammenhang damit tauchte die Frage auf, ob irgendwelche Rückwirkungen auf irdische, physikalische Vorgänge gelegentlich des Durchganges statthaben werden.

Dies zu entscheiden war Aufgabe der Beobachtung, zeigte sich dann ein Einfluß, so durfte man hoffen, aus den etwa beobachteten Wirkungen, man dachte an meteorologische, optische, luftelektrische und auch erdmagnetische Phänomene, weitere Einsicht in die noch wenig bekannte physikalische Struktur des Kometenschweifes zu gewinnen. Indessen konnte sich der Einfluß nahe den Grenzen unserer instrumentellen Wahrnehmung abspielen, umso notwendiger mußte es daher sein, die Beobachtungen nicht auf die Zeit des Durchganges allein zu beschränken; die günstigsten Bedingungen zur Feststellung des Sachverhaltes bot dann die räumliche und

zeitliche Ausdehnung der Beobachtungen. Ein weiterer Gewinn verband sich damit, ganz abgesehen von dem speziellen Zweck, es war die Gleichzeitigkeit von Beobachtungen bestimmter geophysikalischer Vorgänge an zahlreichen Punkten der Erde.

Es sind nun in der Folge anläßlich des Durchganges viele Beobachtungen meteorologischer und luftelektrischer Art angestellt worden, vereinzelt wurden kleinere Expeditionen vorher nach entlegeneren Gegenden abgesandt, um dort die Ergebnisse aufzunehmen.

Von Göttingen aus ging Dr. Angenheister mit Unterstützung der Kgl. Ges. der Wiss., der die Kgl. Regierung für diesen Zweck besondere Geldmittel zur Verfügung stellte, nach Island, um dort den Verlauf der erdmagnetischen Elemente zu studieren; eine weitere Zuwendung aus dem Fonds der Kgl. Ges. der Wiss. für luftelektrische Arbeiten ermöglichte die Teilnahme des Verf. zur Beobachtung der luftelektrischen Vorgänge, von denen aus jener Gegend noch wenig bekannt war.

Die Gründe, welche für die Wahl Islands, speziell der Beobachtungsstation Höfdi im Dyrafjord entschieden, liegen auf erdmagnetischem Gebiet, darauf wird Dr. Angenheister in seiner Publikation zurückkommen, hier sei nur erwähnt, daß am gleichen Ort im Jahre 1902/3 eine norwegische Polarlichtexpedition sich einen Winter aufgehalten hatte.

Die vorliegende Mitteilung enthält die Resultate der luftelektrischen und meteorologischen Beobachtungen, die während eines vierwöchentlichen Aufenthaltes auf der Station erhalten worden sind.

Arbeitsplan, Ausrüstung.

1. Nach dem Arbeitsprogramm für die in Aussicht genommene vierwöchentliche Beobachtungsperiode übernahm der Verf. folgende Arbeiten:

1) Registrierung und Bestimmung der Absolutwerte des luftelektrischen Potentialgradienten.
2) Leitfähigkeitsmessungen.
3) Bestimmung des Gehaltes der Luft an radioaktiven Induktionen nach relativem Maß.
4) Meteorologische Aufzeichnungen im Anschluß an die luftelektrischen Messungen, Registrierung von Luftdruck, Temperatur und relativer Feuchtigkeit.
5) Zeitbestimmungen und Uhrkontrolle.

Diese Arbeiten waren vom Verfasser auszuführen.

Die Vorbereitungen, Ausrüstung der Expedition mit den notwendigen Apparaten hatte innerhalb vier Tagen zu geschehen. Dank dem bereitwilligen Entgegenkommen des Direktors vom physikalischen Institute, Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Riecke, des Direktors vom Geophysikalischen Institute, Herrn Prof. Dr. Wiechert, sowie der Firma Spindler und Hoyer, gelang es, ein bereits erprobtes luftelektrisches Instrumentarium zusammen zustellen. Die größere Anzahl der Instrumente entstammte dem Bestande des Geophysikalischen Instituts.

Herr Prof. Dr. Ambronn ermöglichte die Überlassung eines Sternzeitchronometers sowie zweier Beobachtungsuhren.

2. Bei Abreise setzte sich die instrumentelle Ausrüstung für die beabsichtigten Beobachtungen zusammen aus:

a) für luftelektrische Messungen:
   1) ein selbstregistrierendes Benndorfsches Elektrometer nebst Zubehör,
   2) ein Leitfähigkeitsapparat nach Gerdien,
   3) ein Gerdiensches Elektrometer zur Bestimmung der Radioinduktion,
   4) zwei Quarzfadenelektrometer nach Prof. Wiechert,
   5) ein transportabler Potentialgefälleapparat mit mechanischer Elektrode,
   6) ein Schmidtsches Elektrometer, zwei Elektrometer nach Exner, Zubehör und Reserveteile;

b) meteorologische Instrumente:
   1) Registrierinstrumente für relative Feuchtigkeit, Temperatur und Luftdruck,
   2) ein Aspirations-Thermopsychrometer,
   3) ein Aneroidbarometer,
   4) ein Schleuderthermometer;

c) zur Zeitbestimmung:
   1) ein Sternzeitchronometer,
   2) zwei Beobachtungsuhren,
   3) ein Sextant (Universalinstrument war nicht erhältlich) und ein Quecksilberhorizont ohne Schutzdach,
   4) ein Theodolith zu Azimuthbestimmungen.

Die Vorbereitungen zur Reise, Herbeischaffung und Zusammenstellung der Instrumente konnten erst am 3. April beginnen, am 7. April erfolgte die Abreise von Göttingen nach Kopenhagen, am 10. von dort nach Island.

Das Reiseziel, Thingeyrie, an der NW-Küste Islands, im Dyrafjord gelegen, wurde Ende April erreicht. Die eigentliche Beobachtungsstation mit ihren von der erwähnten norwegischen Expedition dort errichteten Hütten für erdmagnetische Messungen bezw. Registrierungen lag auf der andern Seite des Fjordes und konnte nach einer Wartefrist von einigen Tagen, die zur Einholung der Erlaubnis des abwesenden Besitzers bedingt waren, bezogen werden. Es war eine frühere Walfängerstation, mit Anlagen zur Trangewinnung, sowie einigen Werkstätten zur Reparatur der Fangfahrzeuge.

Die Instrumente hatten, von kleineren Schäden abgesehen, die Reise gut überstanden. Für die Aufstellung des Benndorfschen Elektrometers fand sich nach einigen Instandsetzungsarbeiten in einem der Schuppen ein geeigneter Platz. Ein dünnes Metallrohr zur Aufnahme des Poloniumkollektors wurde unter dem Giebel des Daches, ca. $2^1/_2$ m über der Erde hindurchgeführt. Zur Erdung des Instrumentes wurde außerhalb der aus Brettern gezimmerten Hütte ein größeres Eisenstück, an das ein Kupferdraht angeschlossen war, in die Erde eingegraben.

Es verging noch einige Zeit, bis eine dauernd gute Registrierung erhalten wurde; nacheinander stellten sich verschiedene Mängel in dem Funktionieren des Apparates ein: Bruch der bifilaren Aufhängung, Versagen des minutlichen Kontaktes, auch die Quadrantenbatterie, die aus Elementen für Taschenlampen bestand, und zum Schutz gegen durchdringende Nässe in einen kleinen Kasten eingebaut war, mußte anfänglich wegen Untauglichkeit einzelner Elemente mehrfach ergänzt werden. Schließlich gelang es, die Batterie in guten Stand zu bringen; von den 200 Volt Spannung lagen je 100 Volt an den Quadranten, die Mitte mit dem Gehäuse an Erde.

Infolge Frostes gefror die Zuleitungsflüssigkeit (verdünnte Schwefelsäure) im Elektrometer einmal vollständig, um Wiederholungen solcher unliebsamen Betriebsstörungen zu vermeiden, wurde das Glasgefäß in Watte gepackt und mit Seidenpapier umhüllt, sodaß jede Berührung mit den (isolierten) Metallteilen aufgehoben war, dieser Schutz erwies sich als ausreichend.

Nachdem einige Proberegistrierungen gutes Funktionieren des Apparates verbürgten, wurde die Nullage der Nadel auf die Mitte des Papierstreifens eingestellt; dies geschah mit Rücksicht auf die wiederholt beobachteten erheblichen Ausschläge mit Feldumkehr.

Die Voltempfindlichkeit des Benndorfschen Elektrometers wurde anfänglich auf 18 mm pro 100 Volt, später zu 10 mm/100 Volt ge-

wählt. Vom 10. Mai ab bis zum Schluß der Registrierperiode am 2. Juni sind alle Registrierungen gut gelungen. Trotzdem keine Betriebsstörungen weiterhin vorkamen, wurden die Isolation des Elektrometers, die Spannung an den Quadranten, sowie die Erdung täglich mehrmals, auch in den Nachtstunden nachgeprüft. In dem subarktischen Klima war die absolute Feuchtigkeit sehr niedrig, der Isolation gefährliche Insekten zeigten sich nicht, es traten in der Folge keine Isolationsstörungen auf.

Eine kurze Beschreibung des die Station umgebenden Geländes möge hier noch Platz finden.

Der in der Richtung von SO nach NW streichende Dyrafjord bildet einen der schönsten Fjorde an der zerklüfteten, fjordreichen NW-Küste Islands. An beiden Seiten wird er von einer 200 bis 250 m hohen Hügelkette umsäumt, nach dem Inneren des Fjordes werden die Berge höher, und nehmen tafelförmigen Charakter an. Am Ende des Fjordes liegt der Glama Jökull, ein breiter Gletscher.

Die Strandzone, gerechnet von der Geröllhalde der steil anstehenden Hänge bis zur See, ist von veränderlicher Breite, auf der Seite der Station und in ihrer Umgebung war sie ca. 1 km breit, das Terrain war eben, stellenweise sumpfig von dem Schneewasser, das in zahllosen kleinen Rinnsalen von den Bergen herabströmte. Die Gebäude der Station lagen nicht weit vom Strand entfernt auf einer kleinen Bodenschwelle, ca. $3^1/_2$ bis 4 m über dem mittleren Hochwasser des Fjordes; für luftelektrische Beobachtungen war der Platz günstig.

a. Luftelektrisches Potentialgefälle.

Zur Herleitung der Absolutwerte des Feldes aus den Registrierungen des Benndorfschen Elektrometers bedarf es der Kenntnis des Reduktionsfaktors. Durch einige Probeversuche wurde der Abstand des Poloniumkollektors von der Wand so einreguliert, daß der Reduktionsfaktor bezogen auf die Ebene ungefähr den Wert 1 erhielt [1]). Zur genauen Bestimmung dienten zwei Hartgummistäbe als Träger der Poloniumsonden, die weiter mit einem vorher geaichten Quarzfadenelektrometer, welches isoliert aufgestellt wurde, in Reihe geschaltet waren.

Der gegenseitige Abstand der Stäbe betrug 5 m, die Niveau-

1) Die vom Elektrometer angezeigte Potentialdifferenz in Volt gemessen ist in diesem Falle dem in Volt/m ausgedrückten Potentialgradienten des luftelektrischen Feldes gleich.

differenz der Sonden 0,77 m, ihr Abstand vom Elektrometer 6 m. Bei ausnahmsweise günstigem Wetter, wolkenlosem klaren Himmel und leichter Brise aus SO wurden im ganzen zwei Messungsreihen, jede von 20 Minuten Dauer, ausgeführt. Die Anordnung war so getroffen, daß die Ablesung am Elektrometer gleichzeitig mit dem hörbaren minutlichen Kontakt des ca. 30 m entfernten Registrierinstrumentes erfolgte, und um den Verlauf des Feldes in der Zwischenzeit kennen zu lernen, wurde außerdem das Quarzfadenelektrometer in Intervallen von 20 Sekunden abgelesen.

Überraschenderweise zeigte sich bei dem Vergleich der auf gleiche Zeitskale gebrachten Kurven der Beobachtungen und Registrierung keine gute Übereinstimmung in dem gleichzeitigen Verlauf. Die Abweichungen ließen keine Regelmäßigkeit erkennen, teils sind die Eintrittszeiten der Feldschwankungen verschieden, mitunter wird die Richtung der Feldänderung entgegengesetzt an beiden Orten. Abweichungen bis zu 15 Volt/m gingen daraus hervor.

Die Differenzen konnten von verborgenen Fehlern in der Meßanordnung herrühren; um dies zu entscheiden, wurde die mechanische Elektrode in geringem Abstand von der Meßanordnung aufgestellt und mitbenutzt, es waren jetzt zwei Quarzfadenelektrometer abzulesen. Das Ergebnis dieser Messung zeigte Übereinstimmung der Werte, die mit Hilfe der mechanischen Elektrode und der ersten Meßanordnung mit Benutzung von Poloniumsonden erhalten wurden, dagegen wichen diese Werte ab von denjenigen des Registrierinstrumentes, der Gang war ebenso unregelmäßig wie zuvor, die Abweichungen stiegen bis auf 20 Volt/m.

Ein Mangel der Erdung des Registrierinstrumentes lag nicht vor, der Boden, in den das Eisen eingegraben, war zu der Zeit von Schneewasser durchtränkt, sodaß eine gute Ableitung sicher vorhanden war. Es scheinen also die beobachteten Abweichungen von gleichzeitigen Verschiedenheiten des luftelektrischen Feldes an beiden Beobachtungsorten herzurühren.

Eine weitere Untersuchung der Abweichungen mußte in der Folge unterbleiben, da sich bei dem wechselvollen Wetter eine günstige Gelegenheit nicht mehr bot. Solange eine Genauigkeit von 10 % in den Mittelwerten genügt, dürften die am Schluß angegebenen Werte des absoluten Potentialgefälles innerhalb dieser Grenzen richtig sein.

Neben den langsamen Schwankungen von 40 Volt/m und einer Dauer von 5 bis 10 Minuten zeigten sich schnelle Änderungen des Feldes von mehreren Volt/m (im Maximum 10 Volt/m), die sich innerhalb weniger Sekunden abspielten. Dasselbe wurde nach Rück-

kehr der Expedition nach Göttingen bei Messungen des luftelektrischen Feldes auf einer freien Wiese in der Nähe des geophysikalischen Institutes beobachtet.

Potentialgefälle und erdmagnetische Störungen.

Die von Dr. Angenheister unterhaltene Registrierung der erdmagnetischen Elemente zeigte wiederholt Auftreten und Verlauf erheblicher erdmagnetischer Störungen, es lag nahe, die luftelektrischen Elemente daraufhin zu untersuchen, ob eine Wechselwirkung zwischen den beiden statthatte bezw. ob die Ursache der erdmagnetischen Störungen sich in denjenigen luftelektrischer Art wiederspiegelt. Die Frage wurde von uns beiden wiederholt untersucht, indessen konnte der Verf. nicht zu der Überzeugung durchdringen, daß ein Zusammenhang nachweisbar ist.

Erhebliche unregelmäßige Schwankungen des Gefälles waren an sich die Regel, sie traten zu allen Zeiten auf, und so mochte es wohl vorkommen, daß einige Zacken auf einen Zusammenhang mit den erdmagnetischen Störungen hinzuweisen schienen; in dem Bilde des Gesamtverlaufes während einiger Stunden, solange die erdmagnetischen Störungen währten, war die Störungszeit nicht zu unterscheiden von einer anderen störungsfreien Periode gleicher Dauer.

Die Leitfähigkeit der Atmosphäre, über die weiterhin berichtet wird, wurde während erdmagnetischer Störungen wiederholt, zeitweise in halbstündigen Intervallen gemessen, um festzustellen, ob sich andere Werte als sonst ergeben.

Ein außergewöhnliches Verhalten der Leitfähigkeit wurde nicht gefunden, vielmehr lagen die während der Störungsperiode gemessenen Werte der Leitfähigkeit innerhalb desselben Bereiches, der zu anderen Zeiten und bei Abwesenheit erdmagnetischer Störungen aufrecht erhalten wurde, auch hier handelte es sich um zufällige Schwankungen, die den Durchschnitt ebenso oft überschritten wie nicht erreichten.

Während der Registrierperiode wurden alle vier Stunden mit Ausnahme 4^h a. m. Aufzeichnungen über das Wetter gemacht, um so den Einfluß der Gestaltung des Wetters auf das Potentialgefälle zu erhalten, die Registrierapparate lieferten den Gang der meteorologischen Elemente. Das Ergebnis war, abgesehen von der bekannten charakteristischen Wirkung von Nebel, Regen und Schnee, unbestimmt.

Täglicher Gang des Potentialgefälles.

Zur Ableitung des sog. „normalen“ täglichen Ganges des Potentialgradienten pflegt man zurückzugreifen auf denjenigen Gang, der sich an luftelektrisch störungsfreien Tagen vollzieht. Bei Ermangelung solcher wird man sich eine Gruppe der am wenigsten Störungen aufweisenden Tage herauswählen, ist auch diese nicht erhältlich, so ist man gezwungen, unter sich gleichwertiges Beobachtungsmaterial zu häufen, um aus dem Endresultat die einseitige Wirkung von Störungen fernzuhalten, wenn man nicht ganz auf die Kenntnis der „normalen“ Feldschwankung verzichtet.

Im vorliegenden Fall war die Registrierperiode kurz, sie fiel zudem in eine Zeit des Überganges vom Winter zum Sommer, mit schnellen und starken Witterungswechseln. Nicht ein ruhiger Tag der ohne Störungen verlief, bedeutende Schwankungen des Potentialgefälles waren die Regel. Die Voraussetzungen zur Herleitung des „normalen“ täglichen Ganges des Gefälles waren in keiner Weise erfüllt, die der Anlage I beigegebenen Kurven, welche nach Stundenmittelwerten gezeichnet sind, bringen dies hinreichend zum Ausdruck, sie lassen jedoch erkennen, daß mindestens eine einfache harmonische Schwankung mit einer täglichen Periode vorhanden ist. Nach den durchschnittlichen Stundenmitteln erhält die ganztägige Schwankung des Potentialgefälles den Mittelwert von 30 Volt/m; daß diese Schwankung eine für das Potentialgefälle am Orte der Beobachtung charakteristische Größe ist, läßt sich nicht behaupten, es müßte denn angenommen werden, daß die recht erheblichen Störungen im Mittel über gleichartige Stunden sich gegenseitig aufheben, und dies trifft bei der geringen Anzahl von Beobachtungen sicher nicht zu.

Sind nun Durchschnitt, Amplitude und Periode charakteristische Größen bei der Beurteilung des Potentialgradienten, so kann es daneben noch von Interesse sein, ein Maß für die den normalen Verlauf des Gefälles überlagernden Störungen zu erhalten, da diese, mehr zufälliger Art, auch die wechselnden äußern Bedingungen an einem Ort wiederspiegeln.

Wie die Herleitung des normalen Ganges des Gefälles die Elimination der unregelmäßigen Schwankungen erfordert, so lassen sich die Absolutwerte der Störungen nur angeben, wenn die Größe des periodischen Bestandteils bekannt wäre. Dadurch, daß das Resultat einer Beobachtung nur die Verbindung der von einander unabhängigen Teilereignisse gibt, ist eine Trennung der Komponenten nicht möglich, und eine allgemeine Methode für

die Zerlegung in dem Falle einer beschränkten Zahl von Beobachtungen existiert nicht.

Aus diesen Gründen empfahl es sich nicht, das Potentialgefälle harmonisch zu analysieren.

Der nächstliegende Weg, der zu einem Überblick über das Verhalten des Potentialgefälles während der Registrierperiode führen mußte, war eine Darstellung der Feldwerte geordnet nach relativen Häufigkeiten. Dazu wurde der Bereich der vorkommenden Werte der Feldintensität (von -170 Volt/m bis $+330$ Volt/m) in Teilbereiche von 10 zu 10 Volt/m fortschreitend aufgeteilt, und das Verhältnis der Anzahl der in ein Intervall fallenden Beobachtungselemente (Stundenmittelwerte) zur Gesamtanzahl gebildet und als Ordinate dem zugehörigen Wert des Gefälles zugeordnet.

Das Ergebnis dieser Aufteilung veranschaulicht Fig. 2 in Form einer noch unstetigen Linie, die offenbar vom Verteilungsmodus noch abhängt. Immerhin bringt die Symmetrie der Kurve zum Ausdruck, daß die Schwankungen um den Mittelwert (90 Volt/m) im ganzen einander an Zahl und Größe gleich sind. Daraus folgt, daß der Mittelwert des Feldes und damit die mittlere Oberflächendichte der Ladung während des Beobachtungszeitraumes im wesentlichen erhalten blieben, trotz des die Oberflächenladung vermindernden durchschnittlichen Stromes von 3×10^{-16} Amp./cm².

Nächst dem Mittelwert des Feldes interessiert die Verteiiung der Feldwerte unabhängig von der Art der Aufteilung.

Der Verlauf der Kurve legt es nahe, die Darstellung mittels des Wahrscheinlichkeitsgesetzes:

$$\varphi(s) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 s^2}$$

zu versuchen, wo s ein Wert der Abszisse (Potentialgefälle) und h die Präzisionskonstante bedeuten. Die letztere ist mit der Streuung μ verbunden durch die Beziehung

$$2h^2 \mu^2 - 1 = 0.$$

Nun kann die Streuung leicht aus den Beobachtungen berechnet werden, und mit ihr ist eine ausgeglichene Verteilung sofort aufzustellen.

Auf das vorliegende Beobachtungsmaterial übertragen, ergab sich eine Verteilungskurve, die von der auf direktem Wege erhaltenen nicht unerheblich abwich, das kann einerseits durch die verhältnismäßig geringe Zahl der Beobachtungen bedingt sein, andererseits durch den Umstand, daß das Potentialgefälle selbst

nicht eine nach Zufall variierende Größe ist. Es mag sein, daß die unregelmäßigen Schwankungen oder Störungen einem solchen Gesetz unterliegen, während sich außerdem noch ein periodischer Bestandteil in dem Gesamtbilde vorfindet, der der normalen Gefälleschwankung entspricht.

Wollte man den periodischen Anteil in ähnlicher Weise behandeln wie oben das zusammengesetzte Ereignis, so würde er, für sich betrachtet, eine rechteckige Verteilungsfigur ergeben, deren Grundlinie nur von der Größe der Amplitude abhängt.

Gemäß den Voraussetzungen über die einzelnen Teilvorgänge ist nicht zu erwarten, daß die Verteilung der Beobachtungselemente durch das gewöhnliche Verteilungsgesetz repräsentiert wird, jede andere Verteilung läßt sich jedoch mittels der Methoden der Kollektivmaßlehre[1]) darstellen, wobei an Stelle der speziellen Verteilungsfunktion

(1) $$\varphi(s) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 s^2}$$

nunmehr die allgemeine tritt; sie werde mit $\mathfrak{V}(s)$ bezeichnet. Mit dieser Funktion steht, wie in dem zitierten Lehrbuche[1]) gezeigt wird, die Summenfunktion, definirt durch

(2) $$\mathfrak{S}(s) = \int_{-\infty}^{s} \mathfrak{V}(s)\, ds,$$

in Beziehung.

Weiter ergibt sich der Argumentdurchschnitt $\mathfrak{D}(s)$ aus der Gleichung:

(3) $$A = \mathfrak{D}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\,\mathfrak{V}(s)\, ds$$

und die Streuung μ aus

(4) $$\mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [s - A]^2\, \mathfrak{V}(s)\, ds.$$

Bei unstetiger Verteilung treten an Stelle der Integrale die Summen.

Aus dem Wert der Streuung ergibt sich die Präzisionskonstante h gemäß der Beziehung:

(5) $$2h^2 \mu^2 - 1 \doteq 0.$$

1) Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. 1, 1908.

Nun läßt sich die Summenfunktion durch eine unendliche, stets konvergente Reihe[1]) darstellen; mit der neuen Variablen:

$$v = h(s - A)$$

lautet sie:

(6) $$2\mathfrak{S}(v) = 1 + \Phi(v) + D_3 \frac{\Phi_3(v)}{2^3} + D_4 \frac{\Phi_4(v)}{2^3} + \cdots.$$

Das erste Glied der Reihe: $\Phi(v)$ ist gegeben durch

(6') $$\Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-v^2}\, dv,$$

während die folgenden Glieder: $\Phi_i(v)$ Ableitungen der Funktion $\Phi(v)$ nach v sind und die Abweichungen von dem speziellen Gesetz (Gl. (1)) zum Ausdruck bringen. Der Index $i = 3, 4, 5$ u. s. w. deutet die Ordnung der Ableitung an. Die D_i sind Koeffizienten, die sich aus den Beobachtungsdaten ermitteln lassen[1]).

Zur Prüfung des Darstellungsvermögens dieses Funktionssystems und um eine bessere Anschmiegung der berechneten an die durch Aufteilung gewonnene Kurve zu erhalten, wurde die Summenfunktion gemäß Gl. (6) bis einschließlich $\Phi_6(v)$ mit Benutzung der für diese Funktionen vorhandenen Tabellen[2]) dargestellt, und danach die jetzt ausgeglichene Verteilung gebildet (Fig. 2), der Anschluß an die gegebene Kurve ist damit verbessert worden.

Die Gesamtstreuung ergab sich zu 80 Volt/m, diejenige der unregelmäßigen Schwankungen allein 60 Volt/m. Der hohe Wert der Streuung von 60 Volt/m erklärt es, daß eine Einwirkung des Kometenschweifes auf das Potentialgefälle nicht nachweisbar ist, da dieser Einfluß um ein beträchtliches die Streuung der unregelmäßigen Schwankungen telluren Ursprungs übertreffen müßte, um mit Sicherheit nachweisbar zu sein.

b. Atmosphärische Leitfähigkeit.

Die atmosphärische Leitfähigkeit wird dargestellt durch die Größe:

$$\lambda = \varepsilon\,[\Sigma(n_+ v_+) + \Sigma(n_- v_-)]$$

$n_\pm$ = Zahl der ± Jonen in cm³, $v_\pm$ = Beweglichkeit der ± Jonen,

1) Czuber l. c.

2) Bruns, Kollektivmaßlehre.

die einzelnen Komponenten, λ_+; λ_-, die polaren Leitfähigkeiten wurden mit Hilfe eines vielfach erprobten Gerdienschen Leitfähigkeitsapparats gemessen. Jede Messung umfaßte beide Komponenten, alle Messungen erfolgten stets am gleichen Ort, ca. 30 m vom Wohnhause entfernt, über freiem ebenen Boden.

Der Apparat war mit einem Goldblattelektrometer ausgerüstet, das wiederholt mit Hilfe der vorhandenen Batterien geaicht wurde; die auftretenden Abweichungen gegen die erstmals aufgenommene Kurve waren unerheblich und blieben ohne Einfluß auf die Messungsresultate. Der Reststrom von 5 Volt/Stunde im Mittel konnte bei der Reduktion vernachlässigt werden, da die für je eine Messung aufgewandte Zeit nur 4 bis 5 Minuten umfaßt.

Es war nun wünschenswert, außer der Kenntnis der Absolutwerte der Leitfähigkeit auch eine Orientierung über ihren täglichen Gang beizubringen, um den vielleicht vorhandenen wechselseitigen Einfluß von Potentialgefälle und Leitfähigkeit zu verfolgen. Dazu waren die anfänglichen Meßintervalle von 4 Stunden unzureichend, sie mußten daher verkleinert und auf die Nachtstunden ausgedehnt werden. Die Aufrechterhaltung dieser Arbeit konnte von einem Beobachter allein nicht geleistet werden, andererseits war die Zeit jedes einzelnen von uns durch die Innehaltung seines Arbeitsprogrammes ausgefüllt.

Da nun auch das wechselvolle Wetter oft die Messungen verhinderte, schien es am besten, die 4 stündigen Beobachtungen ausfallen zu lassen, dafür aber günstige Wetterlagen so weit als möglich durch aufeinanderfolgende Messungen auszunützen. Dazu war im ganzen dreimal Gelegenheit, es entstanden so 3 vom Verfasser ausgeführte Messungsreihen, die erste erstreckte sich vom 18. V. 12^h mittags bis 21. V. 6^h a. m. tagsüber in 2 stündigen, nachts wegen der erdmagnetischen Störungen in 1 und $^1/_2$ stündigen Intervallen. Einige Messungen dieser Reihe mußten ausfallen, da die Lötstelle des Lagers der Achse vom Aspirator sich gelöst hatte, und einige Stunden zur Reparatur bedurfte, die mangels Werkzeug mit Cu-Draht ausgeführt wurde.

Nach einer Ruhepause wurde des guten Wetters wegen die Messungsreihe am gleichen Tage (21. V. 4^h p. m.) fortgeführt bis zum 23. V. 4^h a. m. als das zunehmende schlechte Wetter, Regen und Wind den Abbruch der Messung notwendig machte.

Die Ausrechnung geschah sofort nach jeder Messung, um etwaige Störungen sogleich festzustellen, die Isolationsprüfung erfolgte von Zeit zu Zeit. Jede Messung wurde durch meteorologische Beobachtungen ergänzt, und diese im Beobachtungsbuch

vermerkt. Auf diese Weise sollte ermöglicht werden, unter der Wirkung der noch frischen Eindrücke die Zusammenhänge zwischen den wechselnden meteorologischen Bedingungen und den Schwankungen der Leitfähigkeit zu erhalten. Da indessen außer der bekannten Wirkung des Nebels keine Beziehungen aufzufinden waren, ebensowenig wie Zusammenhänge mit erdmagnetischen Störungen, so sollten die kommenden Messungsreihen mit stündlichen Intervallen ausgeführt werden. Das Wetter hielt sich indessen dauernd unbeständig, so daß erst am Schlusse des Aufenthaltes noch eine Reihe von Messungen gelang. Die Beobachtungen begannen am 31. V. $11^1/_2{}^h$ a. m. und endigten bei zunehmendem Sturm am 1. VI. 12^h p. m., die Vorbereitungen zu der am 4. Juni anzutretenden Rückreise schlossen weitere Messungen aus. Die erhaltenen Werte der Leitfähigkeit befinden sich zusammengestellt in Tab. 3, den Kurven des Leitfähigkeitsverlaufes (Fig. 3) sind die des Potentialgefälles, der Temperatur und relativen Feuchtigkeit beigeordnet, dabei wurden alle Angaben je auf das Zeitmittel der zugehörigen, vollständigen Leitfähigkeitsmessungen reduziert. Der normale Vertikalstrom, definiert durch $i = \lambda E$ (E = Potentialgefälle) in Amp./cm² ausgedrückt, ist in die tabellarische Zusammenstellung mit aufgenommen, außerdem noch das Verhältnis $q = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}$.

Als Mittelwert der Leitfähigkeit aus sämtlichen Messungen ergab sich $\lambda = 3.0 \times 10^{-4}$ ESE, dem entspricht nach dem mittleren Potentialgefälle von 90 Volt/m ein mittlerer Vertikalstrom von 3×10^{-16} Amp./cm². Die Extremwerte des Leitvermögens betrugen $\lambda_{min.} = 0.6 \times 10^{-5}$ ESE, $\lambda_{max.} = 5.4 \times 10^{-4}$ ESE; die Hauptmasse der Exemplare liegt jedoch zwischen 2×10^{-4} und 4×10^{-4} ESE. Die Schwankungen des Vertikalstromes lagen zwischen

$$i_{max.} = 8.7 \times 10^{-16} \text{ und } i_{min.} = 0.4 \times 10^{-16} \text{ Amp./cm}^2.$$

Eine eindeutige Beziehung zwischen dem Gang des Potentialgefälles und demjenigen der Leitfähigkeit ist, wie ein Vergleich der Kurven lehrt, nicht vorhanden, wenigstens reicht, um eine solche Abhängigkeit zu konstatieren, dieses Beobachtungsmaterial nicht aus. Teils geht die Leitfähigkeit parallel dem Potentialgefälle, teils entgegengesetzt, ohne daß atmosphärische Vorgänge damit in Verbindung gebracht werden können. Nur der Eintritt von Bodennebeln prägt sich, wie auch schon von anderer Seite[1])

1) R. Süring, Ergebnisse der meteorolog. Beobachtung in Potsdam. Veröffentlichungen des Kgl. preuß. meteorolog. Institutes, Nr. 223. Berlin 1910.

bemerkt, in dem Verhalten der Leitfähigkeit und des Potentialgefälles sehr scharf aus, dem Sinken der Leitfähigkeit geht ein Anstieg des Potentialgradienten dann parallel. Tritt Kondensation nicht ein, so ruft hohe relative Feuchtigkeit keine besonderen Änderungen hervor, die nicht auch unter anderen Verhältnissen derselben meteorologischen Elemente eingetreten wären. Um den geringen Einfluß der relativen Feuchtigkeit auf das atmosphärische Leitvermögen weiter zu verfolgen, wurde eine prozentuale Aufteilung der in gegebene Intervalle der relativen Feuchtigkeit fallenden Werte der Leitfähigkeit herangezogen. Als Unterlage dienten die Ergebnisse der 3 zusammengehörigen Messungsreihen, sie führten zu den aus der Tabelle ersichtlichen Verhältnissen.

Relative Feuchtigkeit	$\lambda = 0-1$ $\times 10^{-4}$	$\lambda = 1-2$ $\times 10^{-4}$	$\lambda = 2-3$ $\times 10^{-4}$	$\lambda = 3-4$ $\times 10^{-4}$	$\lambda = 4-5$ $\times 10^{-4}$	$\lambda = 5-6$ $\times 10^{-4}$
45—54 %	0	0	23 %	54 %	23 %	0
55—64 „	0	0	28 „	64 „	7 „	0
65—74 „	0	6 %	18 „	63 „	13 „	0
75—84 „	0	13 „	40 „	40 „	7 „	0
85—94 „	0	14 „	14 „	64 „	4 „	4 %

Danach werden die mittleren Werte der Leitfähigkeit unwesentlich von der relativen Feuchtigkeit beeinflußt, bei Zunahme derselben gewinnen die niederen Werte der Leitfähigkeit, die höheren nehmen ab. Allein jene traten nur bei Anwesenheit von Bodennebeln auf. Daß bei hoher Feuchtigkeit ebenfalls hohe Werte der Leitfähigkeit vorkommen können, beweist obige Tabelle, es ist aber schwer die Ursache dieser hohen Leitfähigkeit festzustellen, da auch nach Prüfung der Isolation des Apparates bezw. Elektrometers die Wiederholung der Messung dasselbe Ergebnis wie bei der ersten herbeiführte, die absolute Feuchtigkeit war überdies gering.

Die großen Ungleichheiten im Gang der polaren Leitfähigkeiten, λ_+ und λ_-, zeigen einerseits, wie wenig geeignete Okularbeobachtungen sind, um den Schlüssel zu diesen Abweichungen zu liefern umsomehr als auch der Einfluß meteorologischer Elemente nicht klar zu Tage tritt.

Überwiegend ist zwar $\lambda_- < \lambda_+$, aber das Verhältnis der beiden ist keineswegs konstant. Differenzen von über 100 % kamen nicht selten vor, ebenso zeigen λ_+ und λ_- zum Teil ganz entgegengesetzten Gang, und der Zusammenhang mit dem Potentialgefälle wird ganz unübersichtlich. Die starken Abweichungen in den Werten λ_+ und λ_- würden auf vorhandene Raumladungen hin-

deuten, ob sie aber in solcher Größe vorhanden sind, kann nur eine dauernde Registrierung beider polarer Leitfähigkeiten aufdecken. An eine Fälschung der Resultate durch Isolationsstörungen ist nicht zu denken, weil bei stark divergierenden Werten des Blätchenrückganges am Elektrometer von beiden Messungen stets die erste wiederholt wurde, ohne daß dabei Änderungen gegen die erste Messung sich gezeigt hätten. Fremdkörper und Insekten, Staubbrücken etc. kommen auch nicht in Frage, die große Staubfreiheit der Luft einerseits, welche sich in den relativ hohen Leitfähigkeitswerten offenbart, gab keinen Anlaß dazu und Insekten waren zu der Jahreszeit noch nicht vorhanden. Wenn andererseits ein merklicher Einfluß der Störung des Feldes durch den Apparat und Beobachter vorhanden wäre, müßte dieser aus den vorliegenden Messungen der Leitfähigkeit und des Potentialgefälles hervorgehen. Durch die Wölbung der Niveauflächen über den Störungsobjekten (Apparat und Beobachter) werden die Kraftlinien der engeren Umgebung nach diesen konvergieren und damit, solange keine Feldumkehr statthat, positive Jonen in größerer Menge dort konzentriert. Bei sonst gleicher Leitfähigkeit müßten dann höhere Werte von λ_- bei größeren des Potentialgradienten gemessen werden; das trifft, wie aus den wenigen, in den Kurven enthaltenen Beispielen ersichtlich, durchaus nicht zu und demgemäß wird dieser Fehler nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Ein Sättigungsstrom zwischen Teilen des Meßraumes, etwa zwischen dem engen Halse, der Verbindung des Elektrometers mit dem Apparat, und dem Aufsatzstifte würde keine einseitige Fälschung der einen oder anderen Leitfähigkeiten bewirken, aber beide zu hoch erscheinen lassen. Der Voltabfall infolge der Ladungszerstreuung befolgt dann nicht das Ohmsche Gesetz, die Abweichung davon läßt sich auf einfache Weise ermitteln. Bei dem vom Verfasser benutzten Apparat kam dieser Fehler nicht in Betracht; schließlich wäre noch an die verschiedene Wirkung der von Ra Em ausgehenden Zerfallsprodukte zu denken, die, worauf K. Kurz[1]) hingewiesen hat, bei Leitfähigkeitsmessungen mit dem Gerdienschen Apparat λ_+ um einige Prozente zu hoch erscheinen läßt, dadurch lassen sich die erwähnten Abweichungen natürlich nicht erklären.

Eine Auflösung dieser Diskrepanzen wird sich vielleicht erst auf Grund eines umfangreicheren und genaueren Beobachtungsmateriales erzielen lassen, daher soll hier auf die komplizierten

1) K. Kurz, Physik. Zeitschr., 1906, pag. 711.

Wechselbeziehungen zwischen Witterung und den luftelektrischen Bestimmungselementen nicht eingegangen werden.

An dieser Stelle mögen noch die auf See, im nordatlantischen Ozean zwischen 63° und 61° N. Br. und 8°—1° W. L. auf der Rückreise erhaltenen Werte der Leitfähigkeit genannt werden, von 7 zu verschiedenen Tageszeiten angestellten Messungen ergaben alle übereinstimmend zwischen $\lambda = 1.1 \times 10^{-4}$ ESE und $\lambda = 1.4 \times 10^{-4}$ ESE liegende Werte.

c. Radioaktivität.

Zur qualitativen Bestimmung des Gehaltes der Luft an radioaktiven Induktionen wurde die übliche Methode [1]), Exposition eines auf konstantem negativen Potentials gehaltenen Drahtes, angewandt; ein Gerdiensches Elektrometer, in das der aufgespulte Draht nach der Exposition eingeführt wurde, diente zur Ermittelung der Aktivität. Zur Aufrechterhaltung einer Spannung von 2000 Volt war eine zu diesem Zweck kurz vor Abreise der Expedition improvisierte Kombination von Zambonischen Säulen mitgebracht. Bei dem erstmaligen Gebrauch zeigte sich leider eine bedeutende Verminderung der ursprünglichen Spannung, sie betrug nur mehr 500 Volt und sank in der Folge auf 400 Volt. Mit Rücksicht auf das Wetter konnten im ganzen nur 7 Expositionen, welche brauchbare Resultate lieferten, ausgeführt werden. Der Draht war mangels anderer geeigneter Befestigungsstellen zwischen dem Wohnhause und der Jalousiehütte (2 m über dem Boden) isoliert ausgespannt. Die dadurch notwendig gewordene große Länge des Drahtes (35 m) erforderte dann allerdings geraume Zeit zur Aufwickelung auf den Rahmen, so vergingen jedesmal vom Abschalten der Trockensäule bis zur ersten Ablesung am Elektrometer 20—24 Minuten.

Die Beobachtungsresultate sind in der Taf. 4 dargestellt, der minutliche Voltabfall abzüglich des Reststromes ist als Ordinate nach logarithmischer Skale eingetragen, die Zeit als Abszisse, der beobachtete Wert der Aktivität der Zeit $(t - t_0) + \frac{1}{2}(t_1 - t)$ zugeordnet; $(t - t_0)$ bedeutet die gesamtverflossene Zeit gerechnet vom Augenblick des Abschaltens der Batterie bis zu einer oberen Einstellung der Blättchen, t_1 ist die Zeit der folgenden unteren Einstellung.

Die Punkte, die der Beobachtung entsprechen, sind unter sich durch strichpunktierte Linien verbunden.

---

1) Angegeben von Elster u. Geitel.

Der Verlauf der Aktivität, ihr Abklingen, läßt vermuten, daß die aktiven Induktionen auf dem Drahte den Zerfallsprodukten der Ra Em- und der Th Em-Gruppe angehören; ist diese Annahme richtig, so muß die mittels der bekannten empirischen Gesetze des Zerfalles radioaktiver Substanzen berechnete Abklingungskurve mit der beobachteten befriedigend übereinstimmen. Andernfalls leistet die von Prof. C. Runge[1]) gegebene Methode zur Ermittelung der auf dem Draht niedergeschlagenen aktiven Induktionen gute Dienste. Obwohl einwandfreier verlangt diese Methode die Kenntnis der mit dem gleichen Elektrometer gemessenen Abklingung einer reinen, nur von Ra Em stammenden Induktion. Diese Vorbedingung ließ sich nicht verwirklichen, daher wurde die obige Annahme durchgerechnet und das Resultat mit der Beobachtung verglichen. Zur Vereinfachung der Rechnung ist angenommen, daß bei Abschluß jeder Exposition bereits radioaktives Gleichgewicht auf dem Draht eingetreten war.

Befindet sich auf dem Drahte ein Niederschlag von Induktionen, bestehend aus Elementen der Ra- und Th-Gruppe, so wird die jeweils gemessene Aktivität sich aus der Summe der Teilaktivitäten zusammensetzen, es ist dann:

$$i = i_1 + i_2.$$

i_1 ist der Aktivitätsanteil der von Ra Em stammenden aktiven Zerfallsprodukte, analog werde i_2 denjenigen der Th-Gruppe zugeschrieben.

Die in Betracht kommende Zerfallsreihe, von Ra Em ist nach Rutherfordschem[1]) Schema:

α ↑ ○ Ra Em — α ↑ ○ Ra A → ○ Ra B → α ↑ ↗ β ○ → γ Ra C

die des Th

↑ ○ Th Em → ○ Th A → α ↑ ↗ β ○ → γ Th B → β ↑ ↗ β ○ Th C

davon können Ra A, Ra B, Ra C, Th A, Th B, Th C auf dem Draht vorhanden sein. Bezüglich ihrer Wirksamkeit als Jonisatoren stehen die α-Teilchen im Vordergrund, die der β- und γ-Strahlung

1) Nachrichten der Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen 1907.

tritt auf der kurzen Strecke im Elektrometergefäß dagegen zurück. Bei der Ra-Gruppe sind es nun zwei Elemente, Ra A und Ra C, welche beim Zerfall α-Teilchen aussenden, allein die geringe Lebensdauer von Ra A (H.-Z. = 3 Min.) hat zur Folge, daß kurze Zeit nach Abschluß der Muttersubstanz die Ra A-Aktivität rasch verschwindet, dazu genügen bereits 25 Min., in welcher Zeit sie auf etwa 0,003 der anfänglichen sinkt. Da nun die ersten Beobachtungen dem Intervall 25—30 Min. angehören, wird die später gemessene Aktivität von Ra C und Th B herrühren; über die früher liegende Aktivität kann demnach nichts ausgesagt werden und es lassen sich die Beobachtungen so deuten, wie wenn zur Zeit $t = 0$, dem Moment des Unterbrechens der Exposition eine gewisse Menge $n_{2,0}$ von Ra B und $n_{3,0}$ von Ra C auf dem Draht vorhanden gewesen wäre, dann geht die folgende Aktivität auf Kosten des Zerfalles von Ra C und bei Anwesenheit von Th-Produkten noch von Th B aus, beide zerfallen nicht in gleichem Tempo, da die Halbwertzeiten verschieden sind, immer soll jedoch jede Aktivität proportional der vorhandenen Menge des strahlenden Elements sein, also, $i_1 \sim n_3$ (Menge von Ra C zur Zeit t_1), $i_2 \sim n_2'$ (bezügl. Th B); $n_{2,0}$, $n_{3,0}$ bezw. $n_{1,0}'$, $n_{2,0}'$ die zur Zeit $t = 0$ anwesenden Mengen Ra B, Ra C bezw. Th A, Th B.

Aus der Theorie[2]) des sukzessiven Zerfalls nach längerer Expositionszeit läßt sich die Umwandlung von n_3 (Ra C) ausdrücken durch die Differentialgleichung

$$\frac{dn_3}{dt} + \lambda_3 n_3 = n_{2,0} e^{-\lambda_2 t}.$$

λ_2, λ_3 sind auf Ra B, Ba C bezügl. Zerfallskonstanten, welche mit den Halbwertzeiten durch die Beziehung verbunden sind.

$$\lambda_i = \frac{\lg 2}{\tau_i}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung führt zu dem Ausdruck:

$$n_3 = \frac{\lambda_2 n_{2,0} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 n_{3,0} e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{(\lambda_3 n_{2,0} - \lambda_2 n_{3,0})}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{-\lambda_3 t}.$$

Das letzte Glied kann als Korrektionsglied, abhängig von den ursprünglichen Mengen betrachtet werden, ging der Zustand vom radioaktiven Gleichgewicht aus, dann ist $\lambda_2 n_{2,0} = \lambda_3 n_{3,0} =$ const.

---

1) Rutherford radioaktivity, 2. edit., 1905, pag. 450, Th C ist dort noch nicht erwähnt.

2) Rutherford, l. c. Chapl. IX.

und das dritte Glied verschwindet, das erste vereinfacht sich zu:

$$n_3 = \frac{n_{2,0}}{\lambda_3 - \lambda_2}\left\{\lambda_3 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_3 t}\right\}.$$

Mit Vertauschung der Zerfallskonstanten folgt für die zu einer Zeit t vorhandene Menge Th B die analoge Gleichung:

$$n'_3 = n'_{2,0} \frac{1}{\lambda'_2 - \lambda'_1}\left\{\lambda'_2 e^{-\lambda'_1 t} - \lambda'_1 e^{-\lambda'_2 t}\right\}$$

und aus:

$$\frac{i_1}{i_{1,0}} = \frac{n_3}{n_{3,0}}, \qquad \frac{i_2}{i_{2,0}} = \frac{n'_2}{n'_{2,0}}$$

ergibt sich:

$$i = \frac{i_{1,0}}{\lambda_3 - \lambda_2}\left\{\lambda_3 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_3 t}\right\} + \frac{i_{2,0}}{\lambda'_2 - \lambda'_1}\left\{\lambda'_2 e^{-\lambda'_1 t} - \lambda'_1 e^{-\lambda'_2 t}\right\}$$

oder in Halbwertzeiten ausgedrückt:

$$i = i_{1,0} \frac{\tau_{2,0}}{\tau_2 - \tau_3} e^{-\lg 2 \frac{t}{\tau_2}} \left\{1 - \frac{\tau_2}{\tau_3} e^{-(\lg 2) \frac{(\tau_2 - \tau_3) t}{\tau_2 \tau_3}}\right\}$$
$$+ i_{2,0} \frac{\tau'_2}{\tau'_1 - \tau'_2} e^{-\lg \frac{2}{t} t} \left\{1 - e^{-(\lg 2)\left(\frac{\tau'_1 - \tau'_2}{\tau'_1 \tau'_2}\right) t}\right\}.$$

Der Endverlauf einer beobachteten Aktivität, nach etwa 200 bis 300 Min., gestattet es i_2 zu bestimmen, da i_1 zu der Zeit unmerklich klein geworden ist.

Mit der Kenntnis von i_2 kann nun leicht i_1 und $i_{1,0}$ hergeleitet werden. Nach diesen Gesichtspunkten wurde die Rechnung mit den Halbwertzeiten

Ra B $\sim$ 26,7 Min., Th A $\sim$ 636 Min.,
Ra C $\sim$ 29,5 Min., Th B $\sim$ 55 Min.

durchgeführt und die glatt ausgezogenen Kurven in Taf. 4 stellen das Ergebnis der Rechnung dar. Verglichen mit den Beobachtungen ist die Übereinstimmung befriedigend, und man darf daraus wohl entnehmen, daß die Annahme des Vorhandenseins von Th B und Ra C Induktion die Aktivität erklären läßt mit Ausnahme von Fig. 7, die auf die alleinige Wirkung des Zerfalles von Ra C zurückzuführen ist. Gerade durch diesen von den übrigen abweichenden Verlauf tritt die Th B-Wirkung in den andern deutlich hervor.

Das Verhältnis, in welchem die Ra- und Th-Gruppe sich an der Aktivität beteiligt haben, läßt sich nun einfach bestimmen.

Man kann dazu von der Integralaktivität

$$J_1 = \int_0^\infty i_1 \, dt$$

ausgehen. Die Integration der obigen Gleichung ergibt dann

$$J_1 = i_{1,0} \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3}, \qquad J_2 = i_{2,0} \frac{(\lambda_1' + \lambda_2')}{\lambda_2' \lambda_1'}.$$

Wie nun leicht zu beweisen, ist der Ausdruck für die zwischen $t]_0^\infty$ zerfallene Anzahl Atome der Substanzen Ra C und Th B von derselben Form.

$$N_3 = n_{3,0} \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3}, \qquad N_2 = n_{2,0} \frac{(\lambda_1' + \lambda_2')}{\lambda_1' \lambda_2'},$$

die Zahl der zerfallenen Atome ist aber Integralaktivität proportional, daraus folgt:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{N_3}{N_2},$$

also auch:

$$\frac{i_{1,0}}{i_{2,0}} = \frac{n_{3,0}}{n_{2,0}},$$

Die anfänglichen Aktivitäten verhalten sich also wie die Mengen der Substanzen Ra C und Th B zur Zeit $t = 0$. Streng genommen wäre auf die Umwandlung von Ra A noch Rücksicht zu nehmen und es wäre i_3 bezw. n_3 zu ermitteln aus:

$$\begin{Bmatrix} i_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{3,0} \\ n_{3,0} \end{Bmatrix} \left[a e^{-\lambda_1 t} + b e^{-\lambda_2 t} + c e^{-\lambda_3 t}\right],$$

wobei

$$a = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \qquad b = -\frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$

$$c = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Indessen beträgt die Abweichung des benutzten gegenüber dem strengen Ausdruck für $t = 30$ Min. nur mehr 1 %, so daß im Hinblick auf den Näherungscharakter der Rechnung das aus dem ersten gezogene Resultat genügen wird.

Das Verhältnis $\frac{i_{1,0}}{i_{2,0}}$ bezw. $\frac{n_{3,0}}{n_{2,0}'}$ der anfänglichen Aktivitäten zur Zeit $l = 0$ gibt nun Gelegenheit, einen Schluß auf das Verhältnis der Emanationsmengen Ra Em, Th Em zu ziehen,

die, wenn jede mit ihrem Zerfallsprodukt im aktiven Gleichgewicht sich befände, nötig wären, die Mischung $\frac{n_{3,0}}{n'_{2,0}}$ zu bewirken. Aus der Gleichgewichtsbedingung würde folgen:

$$n_{3,0} = \frac{\lambda_0 n_0}{\lambda_3}, \qquad n'_{2,0} = \frac{\lambda'_0 n'_0}{\lambda'_3},$$

und daraus ergibt sich das Verhältnis der Emanationensmengen $\frac{n_0}{n'_0}$

$$\frac{i_{1,0}}{i_{2,0}} \cdot \frac{\lambda_3 \lambda'_0}{\lambda'_3 \lambda_0} = \xi = \frac{n_0}{n'_0}.$$

Mit Einsetzung der Zahlwerte für die Zerfallskonstanten folgt:

$$2.10^{-4} \frac{i_{1,0}}{i_{2,0}} = \xi.$$

Die betreffenden Werte von $\frac{i_{3,0}}{i_{2,0}}$ und ξ erhellen aus folgender Tabelle.

No.	Potential der expon. Drahtes Volt	$i_{1,0}$	$i_{2,0}$	$i_0 = i_{1,0}+i_{2,0}$	$\frac{i_{1,0}}{i_{2,0}}$	ξ	Aktivier.-Zahl
1	500	5.3	1.45	6.75	5.7 : 10^{-4}	7.10^{-4}	11.5
2	500	19.6	1.10	20.70	17.8	35.10^{-4}	35.5
3	480	11.5	1.5	12.0	7.7	15.10^{-4}	22.0
4	450	3.8	1.5	5.3	2.5	5.10^{-4}	9.0
5	450	19.5	1.6	21.1	12.2	24.10^{-4}	36.0
6	450	5.4	1.0	6.4	5.4	11.10^{-4}	11.0
7	450	7.2	0	7.2	[∞]	[∞]	12.0
Mittel	460	10.3	1.2	11.5	8.6	17×10^{-4}	∼ 20

Der Gang der Aktivierungszahlen prägt die starken Schwankungen der Aktivität deutlich aus, die Messungen fanden innerhalb 10 aufeinanderfolgenden Tagen bei günstigem Wetter statt. Den wesentlichsten Schwankungen ist die Ra C-Aktivität, also auch der Gehalt Ra Em der Atmosphäre unterworfen, der Th B-Anteil schwankt dagegen wenig; mit Ausnahme der letzten Beobachtung, in der seine Wirksamkeit sich nicht zeigte.

Die starke Veränderlichkeit der Aktivität macht es wahrscheinlich, daß die aktiven Produkte, die Induktionen akzessorisch sind am Beobachtungsort, als Transportmittel käme die fast nur aus dem SO-Quadranten, also über Land, ziehende Luft-

strömung in Betracht. Der Umstand nun, daß die Induktionen der Wirkung des elektrischen Erdfeldes unterworfen sind, läßt einen entfernten Ursprungsort nicht als wahrscheinlich gelten. Andererseits ergaben Untersuchungen von Boden- und Wasserproben, erstere von verschiedenen Stellen des oberflächlichen Bodens (bis 0.2 m Tiefe) der näheren Umgebung, letztere dem Fjord und dem ca. 1.5 km entfernten Wasserlaufe entnommen, keine merkliche Aktivität. Diese Messungen wurden zu verschiedenen Zeiten mit dem empfindlichen Schmidtschen Elektrometer, das der Expedition von der Firma Spindler & Hoyer in Göttingen, zu dem Zwecke freundlichst überlassen worden war, ausgeführt.

Soweit erkennbar, war das ausschließlich vorherrschende Gesteinsmaterial, aus welchem die den Fjord umsäumenden 200—300 m hohen Hügel, und das weiter im Hintergrund liegende Plateau bestand, tertiärer Basalt, und Basaltschutt von sehr feinem Korn bildete auf ziemliche Erstreckung den Strand und den Boden des schmalen Vorgeländes; der Fuß der Sturzbahn der steil anstehenden Hänge war mit grobem Geröll und Basaltblöcken besät. Wo das feinkörnige Material überwiegt, noch an Stellen von 2.5—3 m über dem Hochwasserniveau, finden sich mit dem Schutt durchmischt zahlreiche Muscheln vor; das weist auf einen rezenten Einbruch der See hin, vielleicht durch Sturmfluten herbeigeführt. Möglicherweise trug die Submersion des Bodens mit dazu bei, dem ohnehin an radioaktiven Substanzen armen Basalt[1]), aus dem der oberflächliche Schutt bestand, noch innewohnenden Rest zu schwächen.

Die Frage nach der Herkunft der Induktionen, namentlich der Th-Gruppe, bleibt offen, vielleicht hätte eine systematische Bodenuntersuchung von größerer Ausdehnung bessere Resultate gezeitigt. Die späte, erst in der zweiten Hälfte des Monats Mai beendete Schneeschmelze vermehrte das sumpfige Terrain; dadurch wurde eine ausgedehnte Untersuchung unmöglich.

d. Meteorologische Beobachtungen.

Zum Studium der atmosphärischen Vorgänge wurde neben der Registrierung von Luftdruck, Temperatur, relativen Feuchtigkeit, eine regelmäßige in vierstündigen Zwischenräumen erfolgende Beobachtung von Wind, Wetter, Wolken und deren Zugrichtung für die Dauer des Aufenthaltes aufrecht erhalten. Die Angaben der Registrierinstrumente sind mittels der dazu mitgeführten Bezugs-

1) v. Mache u. Schwendler, atmosphärische Elektrizität, pag. 142.

instrumente — einem geprüften Aneroid und einem Assmannschen Aspirationspsychrometer — in fortlaufender täglicher Kontrolle gehalten worden. Leider gelang es nicht, das Aneroid, welches an das auf dem Göttinger geophysikalischen Institute vorhandene Normal-(Quecksilber-)Barometer angeschlossen war, auf Island erneut zu vergleichen. Die besuchten Wetterdienststellen, oder die uns als solche bezeichneten, in Reykjavik und Isafjord waren mit Barographen, und mit Aneroid-Barometer die den Verkehr mit Island unterhaltenden Passagierdampfer ausgerüstet, die Korrektionen der Instrumente schienen jedoch nicht bekannt zu sein. Infolgedessen können die im Anhange enthaltenen Angaben des Luftdruckes nicht als absolute Werte gelten.

Die stündlichen Mittelwerte des Luftdruckes (reduziert auf 0° C. und Seehöhe — mittleres Hochwasser im Fjord —), der Temperatur, relativer Feuchtigkeit und Dampfspannung sind im Anhang beigegeben.

Als Monatsmittel der meteorologischen Elemente ergaben sich:

$$p = 757.6 \text{ mm}, \qquad t = +4.4^0 \text{ C.}, \qquad \text{r. F.} = 71\,\%.$$

Wetter und Luftströmung: Das Wetter während des Monats Mai erhielt sein Gepräge durch den in diese Zeit fallenden, doch viel früher erwarteten Übergang vom Winter zum Sommer jener Gegend. Die erste Dekade des Monats stand noch ganz unter der Herrschaft des Winters. In der zweiten Dekade vollzog sich der Wechsel und das nunmehr unbeständige Wetter erhielt sich bis zur Abreise der Expedition; schönes Wetter war von kurzer Dauer. Parallel mit dem Wechsel der Witterung vollzog sich eine Änderung der vorherrschenden Luftströmungen. In der ersten Dekade schwankte die Windrichtung zwischen NW und NO, ging mit dem Umschlag nach dem SO-Quadranten und hielt sich daselbst mit kurzen Ausnahmen bis zum Ende des Monates. Diese dem Fjord entlang wehende Luftströmung zeichnete sich durch stoßartigen Charakter aus. Wie beobachtet, folgten zeitweise mit intermittierender Stille oder schwacher Brise die Stöße in fast regelmäßigen Pausen von 8—10 Min. Die Windstärke variierte hierbei je nach der allgemeinen Wetterlage zwischen 7 m und 18 m. In den Stößen sanken stets Temperatur (um 0.2° bis 0.4° C.) und relative Feuchtigkeit (um ca. 5 %). Nach dem gleichmäßigen Flug der über den Bergen ziehenden Wolken beurteilt, war die dortige Lufströmung stetig; Barometerschwankungen während der Stöße traten nicht ein.

Von den meteorologisch-optischen Erscheinungen seien irisie-

rende Wolken erwähnt, die einmal und unter günstigen Bedingungen zu beobachten Gelegenheit war. Am Abend des 29. Mai standen vereinzelte, duftig zarte Cirro-Cumuli fast bewegungslos und zerstreut liegend am Abendhimmel, dessen tiefes Dunkelblau das anmutige, zwischen grün und rot in den einzelnen Partien der Wölkchen schwankende Farbenspiel wirksam kontrastierte. Die schönste Farbenpracht war an der größten Wolke zu bemerken, die, von schwach ovaler Form mit einem Durchmesser von 2°, im Azimuth der Sonne (N 35° W) stand und 34° von ihr entfernt war; allmählig verblassend währte das Schauspiel 1½ Stunden.

Chronometerkontrolle: Über die Ausübung derselben, die dem Verfasser oblag, sei noch in Kürze berichtet. In Kopenhagen wurde das Sternzeitchronometer in Gang gesetzt und dessen Stand bestimmt; eine zweite Standbestimmung ergab sich in Reykjavik nach der dortigen, in der Seefahrtschule aufgestellten Normaluhr, deren Stand von Zeit zu Zeit durch den Direktor der Schule, Herrn Halldorsson, aus Meridiandurchgängen von Südsternen bestimmt wird. Als Normalzeit Islands gilt die des 15° Grades westlicher Länge von Greenwich.

Während des Aufenthaltes im Dyrafjord wurde in Zwischenräumen von 8—10 Tagen der Stand des Chronometers aus Serien von Sonnenhöhen in der Nähe des ersten Vertikales hergeleitet. Zur Messung der Sonnenhöhen diente ein guter Sextant und künstlicher (Hg) Horizont; bei der großen Helligkeit während der Nachtstunden konnten Sterne nicht genommen werden. Die Höhenmessungen wurden erschwert durch den Mangel eines bei dem meist windigen Wetter notwendigen Schutzdaches für den Quecksilberhorizont, nicht wenige Beobachtungen gingen dadurch verloren.

Die geographische Breite und Länge des Beobachtungsortes, dessen Lage durch Peilung von Objekten bekannter Lage festgestellt wurde, waren einer Spezialkarte des Dyrafjordes [No. 173 Söökaart Arch. Kjöb. 1887] entnommen. Außerdem wurde die Breite mittels mehrerer Messungsserien von Circummeridianhöhen der Sonne nachgeprüft, es ergab sich daraus:

$$\varphi = 65^0\,52.7\,\mathrm{N} \pm 0.1'$$

und nach Karte

$$\varphi = 65^0\,53.5\,\mathrm{N}.$$

Die Abweichung ist mit Rücksicht auf den Zweck der Zeitbestimmung unerheblich.

Uhrvergleiche mit der Normaluhr auf der Seefahrtschule zu Reykjavik ermöglichten auf der Rückreise den Stand des Chrono-

meters für die letzte Zeit des Aufenthaltes in Dyrafjord nachzuprüfen, es ergab sich eine Differenz von 8 Sek., die aus Messungsfehlern allein nicht erklärt werden können, ob dabei vielleicht ein geringfügiger Längenfehler noch eine Rolle mit spielt, war nicht auszufinden, da eine absolute Längenbestimmung trotz mancher Versuche nicht gelang.

Zusammenstellung der Resultate.

1) Potentialgefälle: als Mittelwert ergaben sich 90 Volt/m; unter der Annahme, daß das Potentialgefälle im wesentlichen einfach-periodisch ist, besitzt die zugehörige Amplitude den Wert von 15 Volt/m, andererseits betrug die Streuung der unregelmäßigen Schwankungen ± 60 Volt/m.

2) Leitfähigkeit: es hat sich gezeigt, daß in dem Gang der polaren Leitfähigkeiten meist Parallelität herrscht, wenn man von den kleineren Abweichungen absieht, doch kommen auch vereinzelt Ausnahmen vor.

   Der Mittelwert der Leitfähigkeit beträgt 3.0×10^{-4} ESE. Größere Unterschiede gegen den Mittelwert sind nicht häufig. In weiten Grenzen dagegen schwankte der sog. normale Vertikalstrom, nämlich zwischen 8.7×10^{-17} Amp./cm^2 und 0.4×10^{-16} Amp./cm^2. Als Mittel aus sämtlichen Beobachtungen folgten 3.0×10^{-16} Amp./cm^2.

   Ein Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und der Leitfähigkeit ließ sich nicht nachweisen, ebensowenig eine Beziehung beider zu den erdmagnetischen Störungen. Leitfähigkeit auf See wurde zu $\lambda = 1.1 \times 10^{-4}$ bezw. 1.4×10^{-4} ESE gefunden.

3) Radioaktivität. Soweit die Aktivierungszahlen als Maß dienen, war am Beobachtungsort kein starker Gehalt an radioaktiven Induktionen weder in der Luft noch in den untersuchten Bodenproben vorhanden.

   Die beobachtete Aktivität setzt sich wahrscheinlich aus Zerfallsprodukten der Ra Em und Th Em zusammen.

   Die Schwankungen der Aktivität sind erheblich.

4) Bezüglich des Durchganges des Halleyschen Kometen.

   Von allen beobachteten Vorgängen, sowohl luftelektrischer wie meteorologischer Natur, zeigten sich keine besonderen Erscheinungen, die den Schluß auf eine Einwirkung des Kometen nahe legten, es traten in den der Messung zugänglichen Elementen keine anderen Störungen auf, die nicht auch zu anderen Zeiten aufgetreten sind.

Tabelle I.

Datum	Uhrzeit	$10^4 \lambda_+$ (ESE)	$10^4 \lambda_-$ (ESE)	$q = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}$	$10^4 \lambda$ (ESE)	E Volt/m	$i = 10^{-16}$ Amp./cm²
2. V.	12h mttgs.	2.35	2.04	1.16	4.39		
6. V.	12	2.48	0.89	2.74	3.37		
	8 p. m.	1.45	2.00	0.73	3.45		
	10	2.86	1.10	2.60	3.96		
7. V.	11 a. m.	2.85	1.60	1.78	4.45		
	7 p. m.	2.77	1.70	1.63	4.47		
8. V.	8	2.18	2.00	1.09	4.18		
9. V.	1	2.28	1.19	1.92	3.47		
	4	2.29	1.60	1.44	3.89		
	8	0.46	0.24	1.92	0.70		
10. V.	1	2.08	1.51	1.38	3.59	210	8.4
	4	1.98	1.34	1.48	3.32	235	8.7
	8	1.45	1.02	1.43	2.47	200	5.5
	12	1.5	0.4	3.75	1.90	250	5.2
11. V.	8 a. m.	0.4	0.2	2.00	0.6	200	1.3
	12 mttgs.	1.02	0.8	1.27	1.82	300	6.7
	4 p. m.	1.76	1.0	1.76	2.76	150	4.6
	8	1.91	1.50	1.27	3.41	70	2.6
12. V.	8 a. m.	2.21	2.10	1.05	4.31	33	1.6
	12 mttgs.	2.11	1.19	1.78	3.30	78	2.9
	4 p. m.	2.61	1.43	1.83	4.04	190	4.9
	8	2.50	1.90	1.32	4.40	122	6.0
	12	2.07	1.32	1.57	3.40	160	6.0
13. V.	8 a. m.	1.41	0.89	1.58	2.30	83	2.1
	12 mttgs.	1.82	1.78	1.02	3.60	72	2.9
	4 p. m.	1.70	1.82	0.93	3.50	120	4.7
	8	0.89	0.49	1.82	1.38	120	1.8
	12	1.15	1.04	1.11	2.19	83	2.7
14. V.	8 a. m.	1.35	1.04	1.30	2.39	160	4.3
	12 mttgs.	2.03	1.64	1.24	3.67	108	4.4
	4 p. m.	1.32	0.95	1.39	2.26	128	3.2
	8	1.16	0.98	1.18	2.14	200	4.8
	12	1.24	0.55	2.25	1.79	250	4.9
15. V.	12 mttgs.	0.86	0.81	1.06	1.67	132	2.4
	4 p. m.	1.22	0.68	1.79	1.90	130	2.7
	8	1.22	0.94	1.30	2.16	100	2.4
	12	1.67	1.21	1.38	2.88	61	1.9
16. V.	8 a. m.	1.59	1.47	1.08	3.06	55	1.9
	12 mttgs.	1.33	1.67	0.76	3.00	39	1.2
	4 p. m.	1.52	1.38	1.10	2.90	110	3.6
	8	0.89	0.86	1.04	1.75	50	1.0
	12	1.00	0.79	1.27	1.79	50	1.0
17. V.	8 p. m.	1.25	1.49	0.84	2.74	36	1.1
	12	2.25	1.94	1.16	4.19	20	0.9
18. V.	11 55m a. m.	1.37	1.62	0.85	2.99	14	0.46
	2 00 p. m.	1.35	1.52	0.84	2.87	11	0.35
	4 14	1.82	1.49	1.22	3.31	23	0.84
	6 00	1.60	1.64	0.98	3.24	31	1.11
	8 00	1.79	1.64	1.09	3.43	56	2.13
	10 00	1.98	1.77	1.12	3.75	45	1.87
	12 00	2.83	2.60	1.09	5.43	28	1.69
19. V.	1 48 a. m.	2.28	1.78	1.28	4.06	50	2.25
	2 25	2.13	1.64	1.20	3.77	83	3.45
	3 00	2.65	1.66	1.60	4.31	56	2.68
	3 34	2.22	0.75	2.96	2.97	155	5.11

Datum	Uhrzeit	$10^4 \lambda_+$ (ESE)	$10^4 \lambda_-$ (ESE)	$q = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}$	$10^4 \lambda$ (ESE)	E Volt/m	$i =$ 10^{-16} Amp./cm²
19. V.	4h 12m a. m.	2.45	1.46	1.68	3.91	50	2.17
	5 00	0.50	0.47	1.60	0.97	—25	—0.27
	7 12	1.45	0.90	1.61	2.35	15	0.40
	9 20	2.00	1.42	1.41	3.42	65	2.47
	12 00	1.64	1.27	1.29	2.91	100	3.23
	2 08	1.00	0.51	2.00	1.51	125	2.10
	4 12 p. m.	0.50	0.78	0.64	1.28	165	2.34
	6 30	1.60	1.25	1.28	2.85	155	4.90
	8 15	1.44	0.47	3.07	1.91	145	3.88
	10 14	2.04	1.38	1.48	3.42	94	3.57
	11 00	1.95	0.84	2.38	2.79	138	4.27
	12 00	1.78	0.69	2.58	2.47	111	3.04
20. V.	1 00 a. m.	1.95	1.19	1.64	3.14	106	3.70
	2 00	2.31	1.72	1.35	4.03	78	3.49
	3 00	2.09	1.77	1.19	3.86	89	3.82
	4 00	0.58	0.50	1.16	1.08	183	2.19
	5 00	1.52	0.84	1.85	2.36	164	4.23
	6 00	0.67	0.36	1.86	1.03	280	3.20
	7 00	1.85	1.92	0.97	3.77	122	5.11
	8 00	1.70	1.38	1.23	3.08	128	4.38
	9 00	1.97	1.11	1.77	3.08	138	4.72
	2 35 p. m.	1.72	1.78	0.97	3.50	106	4.12
	4 5	1.98	1.11	1.78	3.09	155	5.32
	6 9	1.49	0.51	2.82	2.00	164	3.64
	8 26	1.49	1.18	1.26	2.67	195	5.78
	9 55	2.33	1.14	2.05	3.47	100	3.85
	11 3	1.86	1.01	1.84	2.87	97	3.09
	12 0	2.11	1.11	1.90	3.22	197	7.05
21. V.	1 00 a. m.	1.52	0.56	2.71	2.08	195	4.52
	2 00	1.40	0.48	2.82	1.88	278	5.81
	3 00	1.30	0.77	1.69	2.07	78	1.79
	4 00	1.86	0.79	2.33	2.65	57	1.68
	5 00	1.50	1.19	1.26	2.69	45	1.34
	4 30 p. m.	1.93	1.01	1.91	2.94	58	1.89
	6 00	1.47	1.70	0.87	3.17	50	1.76
	8 3	1.65	1.33	1.08	2.98	25	0.83
	9 00	1.80	1.37	1.31	3.17	—36	—1.27
	10 40	1.75	1.53	1.14	3.28	72	2.62
	12 00	2.26	1.37	1.65	3.63	100	4.01
22. V.	1 00 a. m.	2.92	1.32	2.21	4.24	67	3.16
	2 00	2.22	1.61	1.39	3.83	75	3.19
	3 25	2.47	1.09	2.27	3.56	122	4.81
	3 55	1.65	1.48	1.11	3.13	73	2.54
	5 00	1.95	1.57	1.24	3.52	80	3.10
	5 58	2.03	2.03	1.00	4.06	34	1.20
	7 5	0.61	2.61	0.23	3.22	—144	—5.15
	7 56	1.97	1.50	1.31	3.47	39	1.50
	9 00	2.45	0.71	3.48	3.16	192	6.73
	9 53	2.21	1.97	1.12	4.18	133	6.16
	11 00	1.96	1.48	1.32	3.44	150	5.73
	12 00	2.30	1.67	1.37	3.97	95	4.19
	1 00 p. m.	2.23	1.37	1.63	3.60	105	4.20
	1 53	1.90	1.57	1.20	3.47	128	4.90
	3 00	1.05	0.51	2.06	1.56	145	2.51
	4 00	1.51	0.89	1.70	2.40	145	3.86
	6 10	1.11	1.00	1.11	2.11	278	6.52
	7 00	0.71	0.66	1.08	1.37	244	3.71

Datum	Uhrzeit	$10^4 \lambda_+$ (ESE)	$10^4 \lambda_-$ (ESE)	$q = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}$	$10^4 \lambda$ (ESE)	E Volt/m	$i =$ 10^{-16} Amp./cm²
22. V.	8h 00m p. m.	1.28	0.48	2.66	1.76	244	4.77
	9 5	1.89	0.92	2.05	2.81	173	5.40
	10 00	2.01	0.88	2.28	2.89	167	5.39
	11 00	2.26	0.80	2.82	3.06	172	6.19
23. V.	0 6 a. m.	2.08	1.11	1.87	3.19	144	5.10
	1 20	2.21	1.45	1.53	3.66	100	4.07
	3 00	2.25	1.70	1.32	3.95	70	3.07
	3 54	2.82	2.25	1.25	5.07	50	2.87
31. V.	11 36 a. m.	1.96	1.37	1.43	3.33	75	2.77
	1 20 p. m.	1.60	1.64	0.98	3.24	62	2.23
	2 5	1.67	1.05	1.59	2.72	122	3.46
	3 6	1.85	1.17	1.58	3.02	137	4.60
	4 00	1.64	1.00	1.64	2.64	137	4.02
	5 10	1.64	0.81	2.02	2.45	131	3.63
	6 50	2.05	1.25	1.64	3.30	127	4.66
	8 00	1.65	1.45	1.14	3.10	117	4.03
	9 00	2.22	1.85	1.20	4.07	100	4.53
	10 00	2.05	1.68	1.22	3.73	107	4.43
	11 10	1.97	1.83	1.08	3.80	55	2.32
	12 00	2.22	1.90	1.17	4.12	75	2.50
1. VI.	1 00 a. m.	1.95	1.47	1.32	3.42	63	2.39
	2 00	2.42	1.65	1.46	4.07	100	4.52
	3 00	2.19	2.49	0.88	4.68	104	5.43
	4 5	2.05	1.96	1.04	4.01	138	6.15
	5 25	2.05	1.65	1.24	3.70	105	4.32
	7 53	1.90	1.65	1.16	3.55	109	4.30
	9 00	1.85	1.39	1.33	3.24	87	3.47
	10 5	1.83	1.53	1.20	3.36	63	2.35
	11 00	1.70	1.70	1.0	3.40	85	3.21
	11 34	2.21	1.83	1.21	4 04	64	2.87
	1 00 p. m.	1.83	1.53	1.20	3.36	74	2.76
	1 57	1.73	1.51	1.14	3.24	75	2.70
	2 57	1.87	1.80	1.04	3.67	108	4.40
	3 57	1.80	0.80	2.25	2.60	134	3.87
	5 5	1.51	1.51	1.00	3.02	88	2.95
	6 00	1.86	0.94	2.00	2.80	108	3.36
	6 47	2.05	1.30	1.58	3.35	128	4.76
	8 00	1.51	1.00	1.51	2.51	108	3.01
	9 00	1.03	2.05	1.50	3.08	—100	—3.30
	9 54	2.01	1.69	1.19	3.70	25	1.03
	11 30	2.20	1.75	1.26	3.95	123	5.40

Tabelle II.

Datum 2. V.					3. V.					4. V.					5. V.				
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1					1	749.5	1.5	74 %	4.3	1	758.3	—1.6	66 %	3.1	1	747.3	+0.3	71 %	3.8
2					2	49.7	1.3	73	4.2	2	57.5	—1.5	68	3.2	2	47.4	—0.5	70	3.5
3					3	49.9	1.7	73	4.3	3	56.5	—1.5	65	3.1	3	47.6	—1.0	69	3.4
4					4	50.3	1.3	72	4.1	4	55.5	—1.5	67	3.2	4	47.9	—1.3	70	3.3
5					5	51.1	0.9	74	4.1	5	54.8	—1.7	68	3.2	5	48.4	—2.0	71	3.2
6					6	51.7	0.5	75	4.0	6	54.2	—1.5	71	3.3	6	48.5	—2.0	68	3.1
7					7	52.6	1.5	76	4.4	7	53.4	—1.3	72	3.4	7	48.9	—2.4	66	2.9
8					8	53.2	1.5	75	4.3	8	52.7	—1.0	71	3.4	8	49.0	—2.0	65	3.0
9					9	54.1	1.3	75	4.2	9	51.8	—0.5	70	3.5	9	49.1	—2.4	68	2.9
10					10	55.3	2.0	76	4.5	10	50.8	—0.5	68	3.5	10	49.6	—2.5	68	2.9
11					11	56.6	2.0	73	4.4	11	49.6	—0.3	69	3.5	11	50.1	—3.3	66	2.7
Mttg.	753.9	4.5	43 %	3.8	Mttg.	57.7	1.0	78	4.2	Mttg.	47.3	—0.2	69	3.6	Mttg.	50.5	—3.1	62	2.7
1	53.7	1.5	48	3.2	1	58.9	1.0	78	4.2	1	48.8	—0.2	68	3.6	1	51.2	—3.3	63	2.7
2	53.5	0.5	58	3.4	2	59.8	0.5	73	3.9	2	48.6	—0.2	68	3.6	2	51.3	—3.5	65	2.6
3	53.0	1.0	73	4.1	3	60.1	0.2	73	3.9	3	48.3	—0.2	67	3.5	3	51.5	—3.7	65	2.6
4	52.2	—0.8	83	3.8	4	60.3	—0.5	73	3.6	4	47.9	—0.5	67	3.4	4	51.7	—4.0	63	2.5
5	51.5	0.5	85	4.3	5	60.9	—1.2	73	3.5	5	47.7	—0.5	67	3.4	5	52.1	—5.2	63	2.3
6	50.9	1.2	81	4.4	6	61.0	—1.5	68	3.2	6	47.2	—0.7	67	3.4	6	52,2	—5.5	66	2.3
7	50.5	1.5	80	4.5	7	61.0	—1.1	65	3.2	7	46.9	—0.5	67	3.4	7	52.2	—4.8	63	2.3
8	50.2	2.2	76	4.6	8	61.0	—1.1	65	3.2	8	46.9	—0.5	67	3.4	8	52.0	—4.5	61	2.3
9	49.8	1.5	74	4.3	9	60.5	—1.5	66	3.2	9	46.7	—0.7	68	3.4	9	52.0	—4.2	61	2.4
10	49.2	2.1	73	4.4	10	60.1	—1.5	67	3.2	10	46.9	—0.7	68	3.4	10	52 0	—4.2	63	2.4
11	49.3	1.5	73	4.3	11	59.8	—1.5	70	3.3	11	46.9	—0.5	70	3.5	11	52.0	—4.2	60	2.3
12	49.5	1.3	73	4.2	12	59.6	—1.6	70	3.2	12	46.8	+0.3	72	3.8	12	52.2	—4.2	63	2.4

U = Zeit des Meridians von 15° W.
p_r = reduzierter Barometerdruck.
T = Temperatur.
rf = relative Feuchtigkeit.
p_d = Dampfspannung.
Mittelwerte auf die volle Stunde bezogen.

Datum	6. V.					7. V.					8. V.					9. V.			
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	753.2	—4.5	60 %	2.3	1	756.4	—2.8	44 %	2.1	1	760.8	—1.7	62 %	3.0	1	764.6	—1.5	65 %	3.1
2	53.2	—4.5	58	2.2	2	56.5	—2.8	46	2.2	2	61.0	—1.9	63	2.9	2	64.4	—1.5	68	3.2
3	53.2	—4.5	55	2.1	3	56.7	—3.0	46	2.1	3	61.2	—1.5	60	2.9	3	64.2	—1.5	68	3.2
4	53.3	—4.5	52	2.0	4	56.7	—3.0	46	2.1	4	61.2	—1.5	58	2.9	4	64.2	—1.5	68	3.2
5	53.3	—4.3	48	2.0	5	56.9	—3.2	50	2.2	5	60.9	—1.2	63	3.1	5	63.9	—1.5	73	3.4
6	53.4	—3.8	46	2.0	6	57.2	—2.5	50	2.4	6	60.9	—1.5	66	3.1	6	63.1	—1.2	73	3.5
7	53.4	—3.4	48	2.1	7	57.1	—2.5	52	2.4	7	61.0	—0.5	66	3.4	7	62.8	—1.0	72	3.5
8	53.9	—3.5	52	2.2	8	57.1	—2.7	53	2.4	8	61.0	+0.5	55	3.3	8	62.6	—0.5	72	3.6
9	54.1	—2.5	54	2.5	9	57.0	—1.8	54	2.7	9	61.1	0.4	63	3.5	9	62.3	—0.3	68	3.5
10	54.1	—2.3	54	2.5	10	57.0	—1.3	51	2.7	10	61.2	0.0	63	3.4	10	61.6	+1.5	66	4.0
11	54.2	—2.0	56	2.7	11	56.9	—0.7	50	2.8	11	61.3	0.3	43	2.7	11	61.6	1.7	68	4.1
Mttg.	54.8	—2.0	57	2.7	Mttg.	57.1	—0.5	52	2.9	Mttg.	61.8	1.5	46	3.1	Mttg.	61.6	1.5	62	3.8
1	55.1	—2.5	58	2.6	1	57.2	—0.3	51	2.9	1	62.4	1.6	50	3.3	1	61.6	1.8	63	4.0
2	55.9	—2.5	66	2.9	2	57.4	0.0	50	2.9	2	62.6	1.5	47	3.2	2	60.0	2.3	67	4.3
3	56.1	—2.5	64	2.8	3	57.7	—0.5	65	3.3	3	62.6	2.0	51	3.5	3	59.8	2.2	65	4.2
4	56.1	—2.5	61	2.7	4	57.9	—0.5	55	3.0	4	63.3	2.5	54	3.8	4	59.8	2.0	66	4.1
5	56.1	—2.5	59	2.7	5	57.9	—0.5	52	2.9	5	63.6	1.5	60	3.8	5	59.6	2.2	66	4.2
6	56.1	—2.5	58	2.6	6	58.1	—0.8	53	2.8	6	63.7	1.0	60	3.6	6	59.5	2.0	65	4.1
7	56.0	—2.7	56	2.5	7	58.4	—0.5	55	3.0	7	64.4	0.5	62	3.5	7	58.9	1.8	68	4.2
8	56.0	—2.7	54	2.5	8	58.9	—1.5	58	2.9	8	64.9	—0.5	63	3.3	8	58.8	1.5	67	4.0
9	56.1	—2.9	50	2.3	9	59.8	—1.9	63	2.9	9	64.8	—0.7	63	3.3	9	58.1	1.5	70	4.1
10	56.1	—2.8	48	2.2	10	60.0	—2.5	62	2.8	10	64.9	—1.2	63	3.1	10	58.2	1.2	69	4.0
11	56.3	—2.7	48	2.3	11	60.2	—2.0	55	2.7	11	65.1	—1.6	65	3.1	11	57.7	0.7	73	4.0
12	56.4	—2.7	46	2.2	12	60.8	—1.5	57	2.8	12	64.7	—1.4	63	3.1	12	57.6	0.5	73	3.9

Datum	10. V.					11. V.					12. V.					13. V.			
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	757.5	0.5	84 %	4.3	1	754.6	1.5	88 %	4.8	1	757.4	2.5	79 %	4.8	1	770.2	1.3	73 %	4.2
2	56.7	0.5	84	4.3	2	54.6	1.5	88	4.8	2	57.4	2.5	75	4.6	2	70.3	0.6	74	4.0
3	56.5	0.3	91	4.4	3	54.8	1.3	91	4.7	3	57.4	2.5	80	4.8	3	70.5	0.0	76	3.8
4	56 5	0.3	92	4.4	4	54.9	1.3	90	4.7	4	57.5	2.5	75	4.6	4	70.5	−0.2	78	3.9
5	56.1	0.5	90	4.5	5	55.0	1.5	89	4.8	5	57.7	2.5	76	4.7	5	70.4	0.8	80	4.3
6	56.0	0.5	92	4.6	6	55.6	1.2	88	4.6	6	58.3	2.5	73	4.6	6	70.3	2 0	75	4.4
7	55.7	1.0	90	4.6	7	55.6	1.5	88	4.8	7	58.5	2.5	73	4.6	7	70.1	4.0	70	5.0
8	55.7	1.0	88	4.6	8	55.5	2.5	85	5.0	8	58.7	2.5	71	4 5	8	70.0	5.3	63	5.2
9	55.6	1.5	90	4.8	9	55.9	2.5	83	4.9	9	59.3	2.0	76	4.5	9	69.9	6.5	62	5.6
10	55.5	2.5	84	5.0	10	56.0	3.5	83	5.3	10	59.9	1.4	86	4.6	10	69.6	7.5	60	6.0
11	55 5	3.0	82	5.1	11	56.0	5.4	78	5.9	11	60.6	1.6	81	4.5	11	69.6	8.0	50	5.6
Mttg.	55.4	3.0	83	5.1	Mttg.	56.1	6 0	74	6.0	Mttg.	61.6	2.0	78	4.6	Mttg.	69.4	9.6	45	5.9
1	55.1	3.5	80	5.2	1	55.9	8.1	48	5.5	1	62.1	2.1	73	4.4	1	69.6	7.5	54	5.6
2	54.9	3.3	82	5.2	2	56.1	6.3	47	4.7	2	62.2	2.8	70	4.6	2	69.6	7.6	60	6.0
3	54.7	3.4	81	5.2	3	55.8	6.5	45	4.6	3	63.7	2.5	66	4.3	3	69.9	6.0	60	5.3
4	54.7	3.2	83	5.2	4	56.1	5.5	48	4.5	4	64.7	2.6	70	4.5	4	69.9	6.0	60	5.3
5	54.5	3.0	84	5.1	5	56.4	6.0	45	4.5	5	65.7	3.3	65	4.5	5	70.1	6.1	60	5.3
6	54.5	3.2	84	5.2	6	56.4	5 0	43	4.0	6	66.6	4.1	64	4.7	6	70.1	6.3	60	5.4
7	54.5	3.2	83	5.2	7	56.5	3.8	45	3.7	7	67.6	4.5	62	4.8	7	70.1	6.2	61	5.4
8	54.5	2.5	87	5.1	8	56.5	4.0	48	3.9	8	68.5	2.8	69	4.5	8	70.1	5.7	63	5.3
9	54.5	2.5	91	5.2	9	57.2	3.3	58	4.2	9	69.6	2.4	71	4.4	9	70.3	3.3	68	4.7
10	54.7	2.3	88	5.0	10	57.2	3.0	70	4.6	10	69.8	2.0	72	4.3	10	70.3	2.8	73	4.7
11	54.6	1.8	92	5.0	11	57.6	2.3	78	4.7	11	70.2	1.7	73	4.3	11	70.4	1.8	80	4.6
12	54.6	1.5	90	4.8	12	57.6	2.0	80	4.6	12	70.5	1.2	74	4.2	12	70.4	1.8	79	4.6

Datum	14. V.					15. V.					16. V.					17. V.		
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	770.2	1.0	78 %	4.2	1	767.8	2.3	92 %	5.2	1	764.8	5.3	92 %	6.4	1	764.8	5.3	92 %	6.4
2	69.9	0.8	78	4.2	2	67.2	2.1	90	5.0	2	64.4	4.2	94	6.0	2	64.4	4.2	94	6.0
3	69.8	0.0	80	4.0	3	67.0	1.8	89	4.9	3	64.1	3.8	93	5.8	3	64.1	3.8	93	5.8
4	69.4	0.6	85	4.3	4	66.6	1.9	88	4.9	4	63.6	4.4	93	6.0	4	63.6	4.4	93	6.0
5	69.1	1.8	84	4.7	5	66.5	2.1	88	5.0	5	63.4	4.7	91	6.1	5	63.4	4.7	91	6.1
6	68.7	2.8	78	4.9	6	66.4	2.8	88	5.2	6	63.6	4.9	90	6.1	6	63.6	4.9	90	6.1
7	67.9	4.8	68	5.2	7	66.3	3.5	86	5.4	7	63.9	4.3	89	5.8	7	63.9	4.3	89	5.8
8	67.5	6.0	60	5.3	8	66.2	3.8	85	5.5	8	63.5	4.5	89	6.0	8	63.5	4.5	89	6.0
9	67.0	7.6	53	5.6	9	66.0	4.6	84	5.8	9	63.3	4.8	89	6.0	9	63.3	4.8	89	6.0
10	66.7	7.9	50	5.5	10	65.7	5.8	80	6.2	10	63.3	5.3	83	6.0	10	63.3	5.3	83	6.0
11	66.5	7.5	52	5.5	11	66.0	6.3	78	6.3	11	63.0	7.3	83	7.0	11	63.0	7.3	83	7.0
Mttg.	66.2	6.3	53	5.0	Mttg.	66.1	6.8	78	6.5	Mttg.	62.6	8.5	75	7.2	Mttg.	62.6	8.5	75	7.2
1	65.7	6.2	48	4.7	1	66.4	7.8	83	7.2	1	62.2	9.3	68	7.3	1	62.3	9.3	68	7.3
2	65.4	7.0	52	5.2	2	66.7	8.3	80	7.3	2	62.3	10.0	66	7.5	2	62.3	10.0	66	7.5
3	65.3	8.1	53	5.8	3	66.2	9.2	78	7.8	3	62.3	9.8	74	7.9	3	62.3	9.8	74	7.9
4	64.9	8.7	50	5.9	4	66.4	9.7	79	8.1	4	62.0	9.3	76	7.7	4	62.0	9.3	76	7.7
5	65.4	7.8	52	5.6	5	66.7	9.0	82	7.8	5	61.8	9.0	74	7.4	5	61.8	9.0	74	7.4
6	64.1	6.6	61	5.6	6	66.3	8.6	86	7.8	6	61.5	9.0	70	7.2	6	61.5	9.0	70	7.2
7	64.0	6.0	66	5.6	7	66.2	7.3	88	7.2	7	61.4	9.3	68	7.3	7	61.4	9.3	68	7.3
8	64.0	6.0	68	5.7	8	65.9	6.8	89	7.0	8	61.4	9.3	70	7.4	8	61.4	9.3	70	7.4
9	63.9	5.6	71	5.7	9	65.7	6.6	91	6.9	9	61.2	8.9	71	7.2	9	61.2	8.9	71	7.2
10	64.0	4.8	76	5.5	10	65.5	6.6	93	7.0	10	61.2	8.3	73	7.0	10	61.2	8.3	73	7.0
11	64.2	4.8	77	5.6	11	65.2	6.2	93	6.8	11	61.2	7.6	73	6.7	11	61.2	7.6	73	6.7
12	64.4	4.5	80	5.6	12	65.0	5.8	92	6.6	12	61.2	6.8	74	6.3	12	61.2	6.8	74	6.3

Datum	18. V.					19. V.					20. V.					21. V.			
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	761.9	7.0	73 %	6.4	1	759.9	4.8	92 %	6.1	1	760.6	3.2	91 %	5.5	1	757.3	7.8	68 %	6.5
2	61.5	7.0	73	6.4	2	59.7	4.6	93	6.1	2	60.3	2.8	93	5.4	2	57.0	8.4	68	6.8
3	61.3	7.0	75	6.4	3	59.8	4.4	93	6.0	3	60.1	2.6	95	5.4	3	56.5	9.8	63	7.3
4	61.4	6.6	76	6.3	4	59.3	4.3	93	6.0	4	60.1	2.8	94	5.4	4	55.9	10.6	58	7.4
5	61.5	6.3	79	6.3	5	59.3	4.5	93	6.1	5	60.0	2.8	93	5.4	5	54.8	10.2	58	7.2
6	61.5	5.8	81	6.2	6	59.4	4.5	94	6.1	6	60.0	2.5	93	5.2	6	54.1	9.7	62	7.2
7	61.5	5.7	83	6.2	7	59.5	5.1	92	6.3	7	59.4	5.3	80	5.9	7	53.9	8.8	66	6.9
8	61.5	5.8	83	6.3	8	59.5	5.8	90	6.6	8	58.7	7.8	73	6.5	8	54.4	8.3	68	6.7
9	61.5	6.0	85	6.5	9	59.6	6.0	89	6.6	9	58.6	9.8	66	7.4	9	54.2	8.7	68	7.0
10	61.5	6.3	87	6.6	10	59.6	6.6	85	6.7	10	58.4	10.7	70	8.2	10	54.0	7.8	71	6.7
11	61.4	7.0	90	7.1	11	59.6	7.3	82	7.0	11	59.0	8.3	78	7.2	11	54.3	7.0	74	6.4
Mttg.	61.4	6.6	90	6.9	Mttg.	59.6	8.0	80	7.2	Mttg.	59.1	9.4	68	7.3	Mttg.	54.4	8.4	70	6.9
1	61.2	6.8	90	7.0	1	59.7	8.0	80	7.2	1	58.5	12.2	57	8.2	1	54.4	10.8	66	8.0
2	61.0	6.8	90	7.0	2	59.7	7.8	83	7.2	2	58.4	12.8	50	8.1	2	54.9	10.8	63	7.8
3	60.8	6.8	81	6.7	3	59.7	8.2	77	7.1	3	58.3	13.5	52	8.7	3	55.3	10.4	66	7.8
4	60.8	6.8	88	6.9	4	59.7	8.7	70	7.1	4	58.3	13.7	50	8.7	4	55.3	11.6	62	8.2
5	60.7	6.7	86	6.8	5	59.9	8.9	68	7.0	5	58.5	13.8	48	8.5	5	55.7	12.7	61	8.8
6	60.6	7.0	85	6.9	6	60.1	8.7	70	7.0	6	58.6	12.3	56	8.2	6	56.0	11.8	63	8.4
7	60.5	5.9	90	6.6	7	60.1	8.3	73	7.0	7	58.8	11.2	60	7.8	7	56.8	10.7	70	8.2
8	60.5	5.8	92	6.6	8	60.5	8.0	73	6.9	8	58.8	10.8	63	7.8	8	57.3	10.7	65	7.9
9	60.5	5.6	91	6.5	9	60.5	7.5	76	6.8	9	59.0	9.7	61	7.1	9	57.9	10.8	67	8.0
10	60.5	4.8	90	6.1	10	60.8	6.3	78	6.3	10	59.1	8.8	63	6.4	10	58.1	9.6	68	7.4
11	60.5	4.8	90	6.1	11	60.8	5.3	85	6.1	11	59.0	6.3	65	6.6	11	58.3	9.4	67	7.3
12	60.5	4.8	90	6.1	12	60.8	4.4	87	5.8	12	58.9	7.2	67	6.2	12	58.4	8.0	68	6.6

Datum	22. V.					23. V.					24. V.					25. V.		
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	758.8	8.3	63 %	7.0	1	761.6	7.4	65 %	6.2	1	760.9	9.0	78 %	7.6	1	757.6	9.8	78 %	8.1
2	59.0	8.0	67	6.6	2	61.5	8.0	68	6.6	2	60.9	8.8	80	7.2	2	57.4	9.3	80	7.9
3	58.7	8.0	66	6.5	3	61.5	7.8	70	6.6	3	60.9	9.2	80	7.8	3	57.2	9.2	80	7.8
4	58.7	8.0	66	6.5	4	61.5	8.2	73	6.9	4	60.9	9.2	80	7.8	4	57.3	9.0	82	7.8
5	58.8	8.2	78	7.2	5	61.6	8.3	70	6.8	5	61.0	9.0	83	7.8	5	57.4	8.6	88	7.9
6	59.4	8.2	73	6.9	6	61.6	8.6	70	7.0	6	61.0	8.8	84	7.8	6	57.5	8.0	92	7.7
7	59.5	8.0	76	7.0	7	61.8	8.6	69	7.0	7	61.2	8.8	84	7.8	7	58.1	7.2	95	7.4
8	59.6	8.2	80	7.3	8	62.0	8.7	70	7.1	8	61.2	9.0	85	7.9	8	58.6	6.0	93	6.8
9	59.6	9.1	75	7.5	9	62.2	8.7	72	7.2	9	61.3	9.2	86	8.1	9	58.8	6.6	93	7.0
10	59.8	10.2	68	7.8	10	62.3	8.6	74	7.2	10	61.4	9.2	87	8.2	10	58.9	6.8	93	7.1
11	59.6	11.0	56	7.5	11	62.4	8.8	73	7.3	11	61.3	9.4	88	8.3	11	59.2	7.2	85	7.0
Mttg.	59.7	12.4	50	7.9	Mttg.	62.5	9.0	67	7.0	Mttg.	61.2	9.8	92	8.7	Mttg.	59.5	7.5	80	7.0
1	59.9	12.0	50	7.6	1	62.8	9.7	63	7.2	1	61.1	10.6	88	9.0	1	60.1	7.2	75	6.6
2	60.0	12.6	58	8.6	2	63.3	10.2	63	7.5	2	61.0	11.4	78	9.0	2	60.5	7.0	72	6.3
3	60.2	11.8	63	8.4	3	63.3	10.2	64	7.5	3	61.0	10.6	82	8.8	3	60.8	7.2	70	6.3
4	60.5	10.6	58	7.4	4	63.1	10.3	64	7.6	4	60.8	10.6	82	8.8	4	61.1	7.4	68	6.3
5	60.5	11.7	56	7.9	5	62.8	10.0	65	7.5	5	60.8	9.8	83	8.3	5	61.4	7.1	66	6.1
6	60.4	12.6	50	8.0	6	62.5	8.8	68	7.0	6	60.8	9.8	83	8.3	6	61.6	6.8	70	6.1
7	60.6	11.8	53	7.7	7	62.3	9.3	69	7.3	7	60.5	10.2	81	8.5	7	61.9	6.2	82	6.4
8	61.2	10.0	57	7.0	8	61.6	9.7	66	7.4	8	60.1	10.0	81	8.3	8	62.2	5.8	80	6.2
9	61.4	9.2	56	6.5	9	61.3	9.5	63	7.1	9	59.5	9.6	80	8.0	9	62.7	5.8	75	5.9
10	61.5	8.4	60	6.3	10	61.1	8.8	70	7.1	10	59.4	9.4	83	8.1	10	62.8	5.8	75	5.9
11	61.6	7.2	69	6.3	11	60.6	8.8	73	7.3	11	58.8	9.8	80	8.2	11	62.8	5.8	74	5.9
12	61.6	6.7	69	6.0	12	60.8	9.0	75	7.5	12	57.6	9.8	77	8.0	12	63.0	5.3	75	5.7

Datum	26. V.					27. V.					28. V.					29. V			
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	763.5	5.0	85 %	6.0	1	754.8	7.0	78 %	6.6	1	744.9	5.4	83 %	6.1	1	646.7	5.3	76 %	5.8
2	63.7	5.0	90	6.2	2	54.0	7.0	78	6.6	2	44.8	4.9	90	6.1	2	46.7	5.6	71	5.7
3	64.0	5.0	92	6.2	3	53.1	7.4	76	6.7	3	44.7	4.8	90	6.1	3	46.7	5.6	70	5.6
4	64.3	4.9	92	6.2	4	52.0	7.8	76	6.9	4	44.7	4.8	92	6.1	4	46.8	5.7	71	5.7
5	64.3	4.8	92	6.1	5	51.0	7.8	78	7.0	5	44.7	5.1	93	6.3	5	46.8	6.0	67	5.7
6	64.3	5.0	85	6.0	6	50.7	8.0	80	7.2	6	44.7	5.6	91	6.5	6	47.0	6.0	66	5.6
7	64.3	5.6	80	6.1	7	50.4	8.6	78	7.4	7	44.7	5.7	90	6.5	7	47.1	6.3	64	5.6
8	64.3	5.8	75	5.9	8	48.7	8.6	82	7.6	8	44.8	6.0	87	6.5	8	47.7	6.3	64	5.6
9	64.2	6.6	74	6.2	9	47.9	9.0	77	7.6	9	44.6	6.8	82	6.7	9	48.0	5.3	65	5.3
10	64.0	7.7	70	6.6	10	47.9	8.6	76	7.3	10	44.6	7.2	81	6.9	10	48.4	5.0	71	5.4
11	63.8	9.2	66	7.1	11	47.5	7.8	75	6.9	11	44.8	7.4	83	7.0	11	48.7	4.1	75	5.2
Mttg.	63.5	9.0	68	7.1	Mttg.	47.5	7.8	70	6.6	Mttg.	45.2	7.6	80	7.0	Mttg.	49.0	4.1	80	5.4
1	63.4	9.0	60	6.6	1	47.5	7.4	76	6.7	1	45.3	7.3	82	7.0	1	49.2	4.6	80	5.6
2	63.2	9.0	62	6.8	2	47.2	7.6	73	6.7	2	45.3	7.5	82	7.0	2	49.3	4.5	80	5.6
3	62.5	9.0	60	6.6	3	47.0	7.8	74	6.8	3	45.3	8.0	76	7.0	3	49.8	3.5	81	5.2
4	62.2	9.0	59	6.6	4	46.5	7.7	80	7.1	4	45.3	8.5	73	7.1	4	50.1	3.7	83	5.4
5	61.5	8.8	62	6.7	5	46.3	7.9	73	6.8	5	45.4	8.1	71	6.8	5	50.8	2.6	75	4.7
6	60.5	9.0	58	6.5	6	46.2	7.6	75	6.8	6	45.4	7.6	74	6.7	6	51.4	2.4	75	4.6
7	60.0	9.0	56	6.4	7	46.1	7.2	75	6.6	7	45.6	6.8	74	6.3	7	51.6	1.8	73	4.3
8	59.5	8.7	60	6.5	8	45.8	7.0	73	6.4	8	45.8	5.9	73	5.9	8	52.1	0.8	76	4.1
9	58.5	7.8	65	6.4	9	45.4	6.7	75	6.3	9	45.9	5.6	71	5.7	9	52.4	0.8	76	4.1
10	57.5	6.8	73	6.3	10	45.4	6.5	75	6.2	10	46.1	5.4	72	5.6	10	52.6	0.8	71	4.0
11	56.5	7.3	68	6.3	11	45.1	6.1	78	6.2	11	46.6	4.6	72	5.3	11	53.2	0.8	66	3.8
12	56.0	7.3	66	6.2	12	45.1	5.6	82	6.1	12	46.8	4.3	76	5.3	12	53.6	0.6	65	3.6

Datum	30. V.					31. V.					1. VI.					2. VI.					3. VI.		
U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d	U	p_r	T	rf	p_d
1	753.9	+0.0	61 %	3.3	1	756.0	3.8	73 %	5.0	1	753.7	4.6	61 %	4.8	1	746.1	3.0	77 %	4.9	1	754.1	3.4	65 %	4.5
2	53.7	—0.2	60	3.3	2	56.1	3.0	76	4.8	2	53.1	4.4	60	4.7	2	45.5	3.6	76	5.1	2	54.4	3.5	66	4.6
3	53.7	—1.2	62	3.1	3	56.1	3.0	77	4.9	3	53.0	4.1	70	5.0	3	45.2	4.0	73	5.1	3	54.7	3.5	66	4.6
4	53.7	—1.2	63	3.1	4	56.0	2.9	80	5.0	4	52.8	4.0	70	5.0	4	45.0	4.6	70	5.2	4	54.9	3.6	67	4.7
5	53.9	—1.2	63	3.1	5	56.0	2.8	80	5.0	5	52.5	4.0	66	4.8	5	44.9	4.6	72	5.3	5	55.2	3.7	65	4.7
6	54.0	—0.6	64	3.3	6	55.8	3.8	73	5.0	6	52.1	4.6	64	5.0	6	44.9	4.8	70	5.3	6	55.3	3.8	64	4.7
7	54.2	0.2	62	3.5	7	55.6	5.5	70	5.6	7	51.8	4.9	57	4.7	7	44.9	5.0	67	5.2	7	55.6	4.0	64	4.7
8	54.3	0.8	61	3.6	8	55.6	6.1	69	5.8	8	51.6	5.6	55	4.9	8	45.0	6.0	65	5.6	8	55.8	4.5	63	4.9
9	54.3	0.8	61	3.6	9	55.6	7.0	61	5.8	9	50.7	6.1	55	5.1	9	45.9	5.8	65	5.5	9	56.0	4.8	61	4.9
10	54.2	1.4	59	3.6	10	55.0	8.2	55	6.0	10	50.4	6.2	56	5.1	10	46.6	5.8	65	5.5	10	56.5	5.0	61	4.9
11	54.0	3.6	60	4.4	11	54.6	8.4	54	6.0	11	50.0	5.8	56	5.0	11	47.0	6.0	65	5.6	11	56.7	6.1	58	5.2
Mttg.	53.7	4.0	59	4.8	Mttg.	54.4	8.6	53	6.1	Mttg.	50.0	4.0	55	4.3	Mttg.	47.6	6.0	65	5.6	Mttg.	56.6	7.0	56	5.5
1	53.1	6.0	58	5.2	1	54.4	8.6	52	6.0	1	49.8	4.8	53	4.5	1	48.0	5.8	66	5.5	1				
2	53.6	6.4	57	5.3	2	54.5	8.8	52	6.1	2	49.6	6.4	51	4.9	2	48.6	7.6	63	6.7	2				
3	54.3	5.8	56	5.0	3	54.4	8.8	52	6.1	3	49.1	6.8	52	5.2	3	49.1	7.0	63	5.9	3				
4	54.5	6.0	56	5.1	4	54.4	8.6	53	6.0	4	48.7	6.5	55	5.2	4	49.4	6.0	65	5.6	4				
5	54.7	6.6	64	5.7	5	54.4	8.3	55	6.0	5	48.6	6.3	60	5.4	5	50.1	5.6	65	5.4	5				
6	54.8	5.8	70	5.7	6	54.5	7.8	56	5.9	6	47.7	5.8	63	5.4	6	50.9	5.3	66	5.3	6				
7	55.6	4.9	76	5.6	7	54.7	7.0	57	5.5	7	47.6	5.7	65	5.4	7	51.7	5.0	65	5.1	7				
8	55.6	4.7	66	5.1	8	55.1	6.3	59	5.3	8	47.1	5.0	68	5.3	8	52.1	4.7	65	5.0	8				
9	55.8	4.8	70	5.3	9	55.1	5.9	60	5.3	9	47.0	4.0	76	5.2	9	52.8	4.0	65	4.7	9				
10	55.8	4.6	71	5.3	10	54.9	5.1	61	5.0	10	46.9	3.8	74	5.1	10	53.3	3.8	65	4.7	10				
11	55.8	4.5	71	5.2	11	54.6	4.8	62	4.9	11	46.7	3.4	75	4.9	11	53.4	3.6	65	4.6	11				
12	56.0	3.9	72	5.0	12	54.8	4.7	61	4.8	12	46.3	2.8	78	4.9	12	53.9	3.5	65	4.6	12				

Ueber einseitige Augen-Exstirpation bei jungen Froschlarven.

Vorläufige Mitteilung.

Von

Bernhard Dürken in Göttingen.

Mit vier Figuren.

Vorgelegt von E. Ehlers in der Sitzung am 23. Dezember 1911.

Seit einigen Jahren beschäftigen mich Untersuchungen über die Beziehungen der Extremitäten zum Gehirn der Wirbeltiere[1]). Dabei handelte es sich zunächst darum, die Lokalisation der Gliedmaßen im gesamten Nervensystem zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurden jungen Froschlarven die embryonalen Anlagen von Gliedmaßen exstirpiert, und da die Voraussetzung, daß zwischen Zentralnervensystem und peripherem Organ echte Entwicklungskorrelationen bestehen, sich bestätigte, gelang es, durch korrelative Entwicklungshemmung in bestimmten Teilen des Zentralnervensystems die Lokalisation der exstirpierten Gliedmaßen zu kennzeichnen.

Vor allem zeigten sich Beziehungen des Mittelhirns zu den Gliedmaßen, und zwar traten Entwicklungshemmungen besonders ausgeprägt auf in seinem Dachteil. Da nun dieser Hirnteil, wie wir u. a. namentlich durch die Untersuchung von Steinitz[2])

1) Über frühzeitige Exstirpation von Extremitätenanlagen beim Frosch. Ein experimenteller Beitrag zur Entwicklungsphysiologie und Morphologie der Wirbeltiere unter besonderer Berücksichtigung des Nervensystems. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 99, S. 189—355. 1911. Taf. X—XVI. — Über das Verhalten des Nervensystems nach Exstirpation der Extremitätenanlagen beim Frosch. Vorläufige Mitteilung einiger Ergebnisse (5 Figg.). Nachricht. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1910.

E. 2) Steinitz: Über den Einfluß der Elimination der embryonalen Augenblasen auf die Entwicklung des Gesamtorganismus beim Frosch. Arch. f. Entw. Mech. Bd. XX, S. 537—578, Taf. 20—21. 1906.

wissen, auch das zentrale Ende des Nervus opticus aufnimmt, so war mit der Lokalisation der Gliedmaßen im Mittelhirn zugleich die Aufgabe gestellt, die Lokalisation der Beine von der Lokalisation der Augen schärfer zu trennen.

Zu diesem Ende exstirpierte ich im Frühjahr 1911 jungen Froschlarven (*Rana fusca*) von 10—11 mm Länge das rechte Auge. Das rechte Auge wurde gewählt, um in den Präparaten Bilder zu erhalten, die sich leicht mit denen nach einseitiger Beinexstirpation vergleichen ließen. Nach Exstirpation der linken Hinterbeinanlage, wie sie in meiner oben genannten Untersuchung angewandt wurde, wird namentlich die gleichseitige Mittelhirnhälfte in Mitleidenschaft gezogen; da der Sehnerv aber gekreuzt verläuft, so mußte das rechte Auge fortgenommen werden, um an der linken Seite des Mittelhirns eine Einwirkung zu erzielen.

Das exstirpierte Auge ist schon ziemlich weit entwickelt. Die Linse hat schon ihre endgültige Form; ihre Zellen im Innern haben sich eben in die Länge gestreckt; eigentliche Linsenfasern sind noch nicht vorhanden. Die Retina weist in ihren zentralen Gebieten bereits eine Schichtung in Zellager und Faserschichten auf, die an den fertigen Zustand erinnert, in den peripheren Teilen besteht sie nur aus dichtgelagerten großen undifferenzierten Zellen; auch in den zentralen, bereits geschichteten Bezirken ist die Differenzierung keineswegs beendet.

Der Dachteil des Mittelhirns (Lobi optici) ist noch gänzlich undifferenziert; er besteht nur aus einer dünnen mehrschichtigen Lage dichtgedrängter Zellen; Fasermassen sind noch nicht vorhanden. Gegen das Zwischenhirn ist die Abgrenzung des Mittelhirndaches noch nicht so schroff wie im ausgebildeten Zustande, wo die Lobi optici mächtige Vorwölbungen bilden. Der Nervus opticus ist noch ein dünner Strang von 18,75 μ Durchmesser, während seine Dicke am Ende der Metamorphose auf dem zur Untersuchung benutzten Stadium 81,25 μ beträgt. Die Chiasmafaserung läßt sich schon eben erkennen. Im Chiasmateil des Zwischenhirns sowie auf seinen Seiten und an den Seitenteilen des Mittelhirns liegen schon reichliche Fasermassen, in denen die schwach erkennbare Opticusfaserung verloren geht, ohne daß es gelingt, sie ein größeres Stück zu verfolgen.

Vom Chondrocranium ist erst wenig gebildet. In größter Ausdehnung besteht noch die bindegewebige Hirnkapsel. In dem uns interessierenden Gebiete sind an knorpeligen Bildungen vorhanden die Para- und Praechordalia; jene sind bereits mit dem sich eben bildenden Knorpel der Gehörkapsel in Verbindung getreten, diese

sind recht dünne Balken, die vorn unterhalb des Vorderhirns bereits mit einander zu einer Platte verschmolzen sind. Seitlich und dorsal vom Gehirn ist noch kein Knorpel vorhanden. Unmittelbar über die dorsale Kante der Praechordalia zieht der Nervus opticus.

Wegen des Ergebnisses der Exstirpation ist noch zu beachten der Entwicklungsgrad der Extremitäten auf dem Ausgangsstadium; wir beschränken uns auf die Hinterbeine. Die Anlage derselben zeigt sich erst als sehr wenig über die Oberfläche hervorragende Verdickung, die aus gleichmäßigen dichtgedrängten Mesenchymzellen besteht, wie ich sie in meiner eingangs erwähnten Abhandlung über Extremitäten-Exstirpation in Tafelfigur 5 abgebildet habe. Allerdings ist hier die Anlage schon etwas größer als dort, doch ist sie geweblich kaum davon zu unterscheiden. Eine nervöse Verbindung mit dem Rückenmark bezw. den Spinalganglien kann noch nicht mit Sicherheit verfolgt werden; das Rückenmark hat erst wenige Fasermassen an dem seitlichen Umfange gebildet, charakteristisch geformte Ganglienzellen sind noch nicht vorhanden; ein bedeutender Größenunterschied zwischen den Lumbalganglien und den übrigen Spinalganglien ist noch nicht zu bemerken.

Die Exstirpation des rechten Auges erfolgte mit dem Galvanokauter; die Zerstörung wurde auf den Augapfel beschränkt; der zentral vom Praechordale liegende Teil des Opticus bleibt dabei erhalten. Die Wunde heilt im allgemeinen gut und ohne Komplikationen.

Bei der Mehrzahl der Tiere verlief die Aufzucht ohne auffällige Erscheinungen. An Stelle des rechten Auges zieht die Haut glatt dahin, der Schädel ist dort nur ganz leicht flach eingedrückt. In manchen Fällen weicht die dorsale Medianlinie des Kopfes von der Medianlinie des Rückens ein wenig nach rechts ab, so daß die Schnauzenspitze ein wenig nach rechts verschoben ist. Im Leben zeigten die Tiere sonst kein absonderliches Verhalten.

Elf Tiere wurden bis gegen Abschluß der Metamorphose aufgezogen; bei der Konservierung war durchweg noch ein Schwanzrest vorhanden. Von diesen elf Exemplaren zeigten nun vier eigentümliche Mißbildungen der Extremitäten, die auffallend an die Mißbildungen erinnern, wie ich sie in meiner erwähnten Abhandlung über Extremitäten-Exstirpation beschrieben und abgebildet habe (Fig. 1).

Mehr als ein Drittel der gegen Ende der Metamorphose konservierten Tiere also besaßen mehr oder minder mangelhaft ge-

bildete Hinterbeine, während die Vorderbeine keine augenfälligen Abweichungen von der Norm aufwiesen.



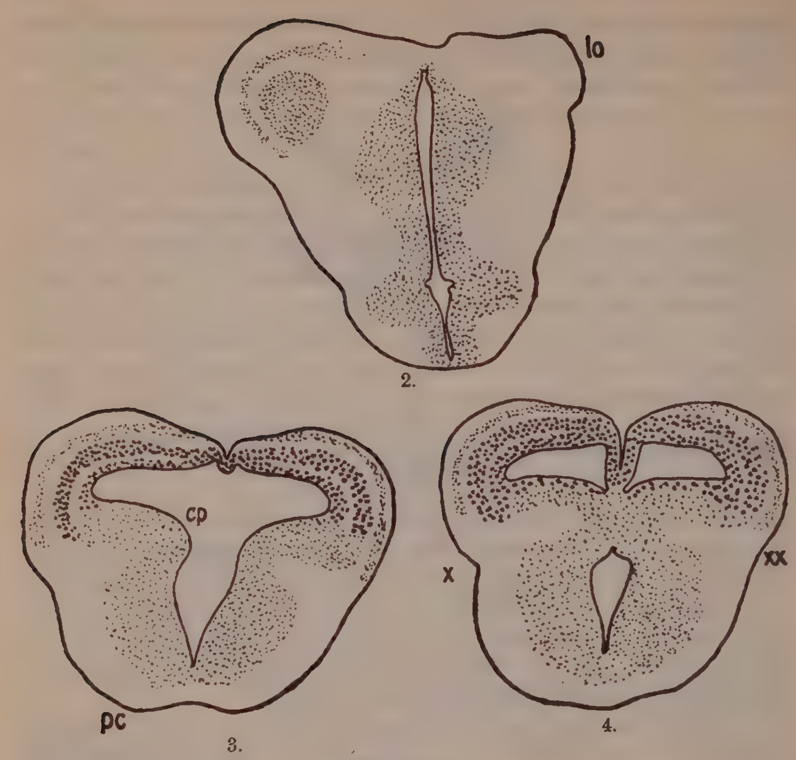
Fig. 1.
Ventralansicht der Hinterbeine eines Frosches nach frühzeitiger Exstirpation des rechten Auges.

Die Mißbildungen betreffen entweder nur die distalen Glieder der Extremität oder erstrecken sich über die ganze Gliedmaße; sie bestehen in Verdrehung der einzelnen Abschnitte zu einander, in Verkürzung und Verdickung der einzelnen Abschnitte und unvollkommener Gliederung überhaupt und besonders der Füße. In einigen Fällen, wie in dem abgebildeten, erscheinen diese Beine vollständig ungeeignet zu normalem Gebrauch.

Die Untersuchung an Schnittserien, die durch die erwähnte Asymmetrie des Schädels erschwert wird, ergab im allgemeinen folgendes:

Der rechtsseitige Nervus opticus fehlt vollständig; auch der bei der Exstirpation des Auges stehengebliebene zentrale Stumpf ist spurlos verschwunden; der linke Opticus ist gut entwickelt. Durch diesen einseitigen Ausfall des Opticus kommt im Zwischenhirn eine leichte Asymmetrie zustande, die aber nur, wegen ihres geringen Grades, kurz nach der Opticuskreuzung deutlich erkannt werden kann; da die Kreuzung der Sehnerven eine vollständige ist, zeigt hinter dem Chiasma der Basalteil des Zwischenhirns rechts eine größere Dicke als links. Anzeichen von Degeneration sind nirgends bemerkbar. An den Seitenteilen des Diencephalon läßt sich ohne genaue vergleichende Messung keine asymmetrische Ausbildung feststellen; daß eine solche aber vorhanden sein muß, folgt aus dem vollständigen einseitigen Ausfall des Opticus, dessen Fasern ja in den Seitenteilen weiterziehen.

Auffallend ist nun weiterhin vor allem das Verhalten des Mittelhirns, das eine stark asymmetrische Ausbildung aufweist.



Figg. 2—4.
Querschnitte durch das Mittelhirn eines Frosches nach frühzeitiger Exstirpation des rechten Auges.
Fig. 2 vordere, Fig. 3 mittlere, Fig. 4 hintere Region des Mittelhirns.
lo lobus opticus; cp corpus quadrigeminum posterius; pc pedunculus cerebri.

Zunächst erscheint der linke Lobus opticus im ganzen verkleinert. Er reicht infolgedessen auch nicht so weit nach vorn wie der rechte, und die Folge weiter davon ist, daß der linke Lobus opticus auf genau orientierten Querschnitten noch nicht getroffen ist, wenn rechts der Schnitt schon die zentraler gelegenen Schichten des rechten Lobus trifft (Fig. 2).

Diese Asymmetrie des Dachteiles läßt sich weit nach hinten verfolgen, und gibt sich auch dann darin zu erkennen, daß über dem Lumen des Ventrikels die rechte Dachhälfte nach links über die Medianlinie hinüberreicht (Fig. 3). Ferner weist auch der Basalteil eine stark asymmetrische Form auf (Fig 3). So erscheint die ganze linke Hirnhälfte verkleinert. Vor allem springt das linke Corpus quadrigeminum posterius längst nicht so weit in das Ventrikellumen vor wie das rechte (Fig. 3); ferner erscheinen die Pedunculi

cerebri asymmetrisch, und zwar ist eine Minderung ebenfalls auf der linken Seite wahrzunehmen. Die Folge davon ist, daß der Endteil der Hypophyse nach links aus der medianen Lage herausgedrängt ist. Verfolgt man die Querschnittserie weiter nach hinten, so wird die Asymmetrie allmählich geringer, doch bleibt sie deutlich erkennbar am linken Lobus opticus bis an die hintere Polkappe, indem der linke Lobus seitwärts nicht so weit über die Kontur des Basalteiles herausreicht und auch nicht so scharf abgesetzt ist wie der rechte (Fig. 4 bei × bezw. ××).

Am Kleinhirn und der Oblongata lassen sich keine anormalen Asymmetrien feststellen.

Ein Ausfall ganz bestimmter Schichten von Ganglienzellen und Fasermassen im Gehirn ist nicht zu verzeichnen. Hierin stimmen meine Ergebnisse überein mit den Resultaten von Steinitz.

Außer dem anormalen Verhalten des Nervensystems ist noch von Interesse die Ausbildung des Chondrocraniums. Wie schon gesagt wurde, zeigt der Knorpelschädel eine allgemein asymmetrische Gestaltung. Diese kommt vor allem dadurch zustande, daß auf der Exstirpationsseite (rechts) die Gehörkapsel weit nach vorn verschoben ist; so kommt es, daß auf Querschnitten rechts schon das Labyrinth angeschnitten ist, wenn links noch das Auge getroffen wird. Damit geht Hand in Hand eine Verschiebung der Nervenaustritte und ihrer Ganglien.

Unter dem Großhirn bildet der Knorpelschädel eine dorsal offene Wanne, die oben durch Bindegewebe geschlossen ist; seitwärts ragen die Knorpelwände etwa bis zum oberen Umfange der Hemisphären hinauf. Während nun links diese seitliche Schädelwand dem normalen Verhalten entsprechend nur dünn ist und sich dorsalwärts ein wenig verjüngt, ist rechts gerade das Umgekehrte der Fall: hier ist die seitliche Knorpelwand auffallend dick; sie übertrifft die linksseitige um fast das Vierfache an Stärke und ihre dorsale Kante, die an das bindegewebige Dach angrenzt, ist namentlich neben dem hinteren Teile der Hemisphären noch zu einem längslaufenden Wulst verdickt. Dieser Wulst tritt auf der Höhe des Zwischenhirns mit der knorpeligen Labyrinthkapsel in Verbindung, deren vordere, nach der Schnauze zu gelegene Wandung aus einer auffallend dicken und plumpen Knorpelplatte besteht. Gegenüber auf der linken Seite dehnt sich hier und noch weiter nach rückwärts der Bulbus oculi aus; die linke Labyrinthkapsel folgt erst ein beträchtliches Stück weiter hinten. Ein Foramen opticum kann in dem näher untersuchten Exemplar rechts

nicht nachgewiesen werden. Der Schädel weist also weitgehende Anomalien auf.

Wie Fig. 1 zeigt, sind beide Hinterbeine höchst mangelhaft gebildet. Die Untersuchung derselben ergab die gleichen Resultate wie bei entsprechenden Mißbildungen der Gliedmaßen, wie sie in meiner oben erwähnten Abhandlung beschrieben wurden: die Beine besitzen Knorpelskelett und Muskulatur, die histologisch keine Besonderheiten darbieten. Die Nerven treten in normaler Weise in die Gliedmaßen ein; ob sie schwächer sind als bei normalen Tieren lasse ich dahingestellt; auch die zugehörigen Spinalganglien scheinen mir normale Größe zu besitzen. Dagegen wird man geneigt sein, den Rückenmarksquerschnitt in der Lumbalgegend für zu klein anzusehen, da beispielsweise der Sagittaldurchmesser des X. Spinalganglions mit dem Sagittaldurchmesser des Rückenmarks in dieser Gegend an Länge fast übereinstimmt. Jedoch müssen erst Beobachtungen an zahlreicherem Material vorliegen, ehe eine sichere Entscheidung zu treffen ist.

Nach den Ergebnissen meiner Untersuchung über frühzeitige Beinexstirpation drängt sich unwillkürlich die Anschauung auf, daß die Mißbildung der Hinterbeine in Zusammenhang steht mit der anormalen Gestaltung des Zentralnervensystems und, da diese verursacht ist durch Exstirpation eines Auges, indirekt durch die frühzeitige Fortnahme des Auges veranlaßt wurde. Für diese Annahme lassen sich wichtige Gesichtspunkte geltend machen.

Nach frühzeitiger Exstirpation des linken Hinterbeines traten im Mittelhirn Entwicklungshemmungen der linken Seite auf, die auf Querschnitten Bilder geben, welche in überraschender Weise denen ähnlich sind, die nach Exstirpation des rechten Auges auftreten. In beiden Fällen ist es die linke Hirnhälfte, welche vorzugsweise in Mitleidenschaft gezogen ist. Nach der Beinexstirpation ist der Dachteil des Mesencephalon links verkleinert und diese Hemmung erstreckt sich bis auf den vordersten Bezirk des linken Lobus opticus (vgl. Fig. 2 in meiner vorl. Mitteilung und Tafelfigur 29 in der ausführlichen Abhandlung); eben hier ist auch durch die Augenexstirpation eine Entwicklungshemmung erzielt (Fig. 2). Ferner ist das linke Corpus quadrigem. posterius nach der Augenexstirpation von einer Hemmung betroffen worden (Fig. 3); das gleiche konnte nach der erwähnten Beinexstirpation festgestellt werden (vgl. Fig. 1 vorl. Mitt. u. Tafelfigur 30 der ausführl. Abhandl.). Es zeigt sich also, daß hier Zentren vorhanden sind, die zum Bein und zugleich zum Auge in Beziehung stehen. Wir haben daher im Mittelhirn das Associationsgebiet zwischen Gesichts-

eindrücken und Beinbewegungen zu suchen, weil eben die Assoziationszentren sowohl in Verbindung mit dem Auge als auch mit dem Bein stehen müssen. Werden nun die Augenzentren von einer starken Entwicklungshemmung betroffen, so kann nach früheren Erfahrungen (Beinexstirpation 1911) diese Hemmung auf angeschlossene Zentren übergreifen; solche Zentren wären hier letzten Endes die Beinzentren; durch Hemmung dieser kann dann, wie 1911 nachgewiesen wurde, eine Verkümmerung der freien Extremität herbeigeführt werden.

So ergibt sich eine interessante Kette von Korrelationen, deren Glieder: Auge—Zentralnervensystem—Extremität, in Entwicklungsabhängigkeit stehen.

Nach einseitiger Beinexstirpation wurde Verkümmerung der übrigen Beine beobachtet; man wird daher auch nach einseitiger Augenexstirpation vielleicht eine Beeinflussung des anderen Auges erwarten. Ob eine solche vorhandenist, möchte ich an dem vorliegenden Material nicht entscheiden. Weitgehende Beeinflussung seiner Entwicklung ist aber schon deshalb nicht möglich gewesen, weil an dem Ausgangsmaterial die Augen schon zu weit entwickelt waren. Dagegen waren die Extremitäten eben erst als wenig hervortretende Mesenchymverdichtungen angelegt, sodaß hier die Korrelationsstörung noch ihre Wirkung tun konnte.

Die Versuche sollen fortgesetzt und dabei auch in zweckentsprechender Weise variiert werden.

Mai 1910

	0-½	½-1	1-1½	1½-2	2-2½	2½-3	3-3½	3½-4	4-4½	4½-5	5-5½	5½-6	6-6½	6½-7	7-7½	7½-8	8-8½	8½-9	9-9½
Mai 4.																			
5.	62.5	55.4	40.6	46.6	50.5	49.4	48.4	46.7	46.6	48.0	48.2	47.4	41.7	44.6	41.0	44.5	44.0	45.4	44.7
6.	53.0	49.0	44.5	42.3	42.5	43.5	43.3	43.7	43.5	41.0	38.0	37.9	37.0	38.2	39.2	38.4	39.4	41.0	41.8
7.	50.4	47.9	46.5	37.8	37.6	32.5	36.6	38.0	40.0	31.8	25.0	24.8	30.4	31.2	35.3	38.8	43.0	46.7	45.5
8.	51.4	52.4	51.4	51.8	52.5	53.2	53.2	53.6	47.8	47.4	43.4	47.5	45.8	47.7	47.8	46.4	47.8	48.4	48.8
9.	52.9	54.2	53.8	52.8	47.8	43.4	48.2	41.2	40.0	31.6	28.5	31.5	36.5	45.1	49.2	47.7	47.8	47.8	47.4
10.	50.3	51.0	47.8	46.5	48.1	50.4	52.8	51.7	43.3	42.5	24.5	31.0	45.0	47.9	45.5	48.7	49.2	48.4	51.0
11.	52.7	52.4	53.8	51.8	47.0	44.8	44.0	28.5	26.4	39.0	29.9	19.6	39.6	39.8	44.4	50.1	48.8	48.3	48.8
12.	51.0	52.6	51.8	50.5	52.7	48.5	51.0	48.5	48.2	46.4	40.5	36.3	40.4	44.6	43.4	49.5	47.5	48.7	48.4
13.	53.5	51.8	51.5	51.4	46.2	46.6	34.8	27.5	22.4	26.8	14.4	32.4	35.1	38.3	38.0	39.5	38.7	45.9	40.8
14.	63.0	60.8	52.8	51.5	52.5	47.6	49.8	44.5	46.0	37.5	33.3	36.4	43.5	38.8	44.2	45.5	40.7	45.0	51.5
15.	56.0	78.8	62.8	58.2	61.8	48.3	29.2	28.5	31.5	29.5	32.5	43.0	47.0	47.5	44.7	50.4	49.5	50.7	48.5
16.	57.5	59.0	51.7	43.5	49.5	51.7	52.0	43.8	31.0	34.0	51.4	49.7	48.5	45.2	44.7	46.0	48.6	46.2	48.5
17.	57.0	55.8	54.4	51.3	54.4	48.5	45.4	47.1	49.3	47.8	48.8	46.4	44.7	46.0	49.4	48.8	54.8	56.4	58.4
18.	59.0	53.7	46.4	45.5	48.5	48.5	45.3	42.5	36.2	42.7	43.4	43.5	37.4	44.0	43.7	42.8	45.4	49.7	49.2
19.	55.0	52.0	52.3	64.6	60.0	47.3	43.5	39.9	35.2	35.5	15.4	17.3	36.8	38.4	37.1	36.3	37.4	42.4	48.2
20.	52.0	53.0	52.7	49.0	53.8	54.5	57.8	47.7	47.8	50.8	48.0	49.9	46.5	46.6	46.0	44.2	42.0	45.4	43.8
21.	55.5	56.9	54.8	55.8	54.2	51.6	51.4	54.1	52.7	47.8	49.3	50.4	48.0	44.4	45.5	49.2	47.8	47.6	47.1
22.	62.8	61.5	47.8	48.2	56.1	51.4	46.8	44.5	48.3	45.2	45.0	45.4	45.8	43.2	43.4	42.5	44.3	43.4	47.7
23.	53.8	53.8	53.5	53.5	52.8	52.8	51.4	50.4	49.3	48.0	48.4	46.5	46.5	44.7	44.9	45.0	46.4	47.0	48.5
24.	56.2	50.0	51.4	52.4	50.4	51.0	50.7	47.0	46.1	48.1	48.9	45.7	39.3	29.2	36 4	42.4	46.4	55.7	58.7
25.	59.0	55.0	55.0	53.0	35.2	37.0	45.0	34.2	10.2	24.5	22.5	33.0	43.5	28.5	32.0	47.2	52.5	63.0	58.5
26.	57.8	61.5	53.5	41.2	47.5	55.2	50.6	48.5	51.0	50.0	40.5	19.8	20.7	47.0	48.0	48.8	33.5	50.6	54.0
27.	58.0	57.3	53.8	54.0	57.6	40.4	41.0	42.1	39.0	26.5	27.2	27,7	29.2	36.0	33.4	42 0	47.5	51.4	55.7
28.	58.5	52.3	54.0	50.0	39.4	30.0	53.7	44.5	37.4	23.5	43.4	54.0	45.7	46.0	48.4	52.4	48.7	48.4	48.5
29.	70.8	52.0	51.5	49.4	53.2	49.5	53.0	43.0	37.0	33.0	27.8	31.8	35.2	38.4	47.0	45.5	49.4	43.6	46.6
30.	56.9	57.4	56.6	55.7	56.8	56.8	53.4	52.3	50.4	51.8	52.7	50.2	44.2	43.4	44.7	47.9	50.8	52.4	49.0
31.	67.5	60.0	55.4	62.0	53.4	35.0	47.5	47.0	24.8	9.8	22.0	35.8	43.4	46.0	40.2	34.7	39.0	50.4	57.0
Juni 1.	64.5	64.8	61.4	56.7	51.5	57.5	53.3	38.7	39.4	35.4	35.8	45.4	48.8	51.2	50.7	48.8	53.8	56.0	60.3
Mittel	55.0	54.0	52.3	50.8	50.4	47.0	47.4	43.7	40.0	38.5	36.8	38.3	40.6	41.9	42.9	45.0	45.6	48.5	49.5

Mai 1910

	0-½	½-1	1-1½	1½-2	2-2½	2½-3	3-3½	3½-4	4-4½	4½-5	5-5½	5½-6	6-6½	6½-7	7-7½	7½-8	8-8½
Mai 6.																	
7.	1013	1032	1063	0913	0813	0883	0975	1038	1063	0964	0901	0907	1013	1032	1038	1032	1051
8.	1151	1107	1141	1157	1160	1156	1150	1131	1014	1009	1007	1137	1164	1179	1188	1158	1153
9.	1177	1168	1159	1159	1121	0981	1001	1006	1014	0991							
10.	1093	1126	1174	1151	1137	1153	1156	1103	0985	0838	0751	0884	1058	1093	1128	1182	1191
11.	1167	1163	1157	1143	1110	0873	0853	0820	0725	0724	0765	0912	1099	1113	1162	1181	1189
12.	1097	1106	1140	1131	1150	1123	1105	1086	1075	1046	1015	0985	1048	1062	1091	1164	1186
13.	1164	1165	1169	1167	1080	1016	0868	0978	0880	0716	0810	0927	1032	1090	1128	1155	1136
14.	0902	0972	1043	1113	1143	1136	1113	1072	1061	0832	0809	0984	0937	0902	1066	1190	1156
15.	1053	0737	0667	0655	0878	0995	0995	0925	0831	0597	0761	1018	1142	1194	1116	1018	1007
16.	0917	0959	1029	1077	1128	1114	1064	0982	0935	0989	0970	1087	1115	1101	1125	1137	1140
[illegible]	[illegible]	1116	1117	1077	1089	1082	1021	1047	1113	1157	1160	1126	1092	1156	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1045	1042	108.	1026	1055	0991	1091	1063	1116	1119
19.	1152	1052	0974	1057	1083	0979	1081	1032	0895	0752	0717	0794	0949	0972	1038	0982	1019
20.	1131	1146	1067	0965	0935	1085	1108	1011	1089	1129	1136	1140	1117	1110	1141	1129	1113
21.	1149	1154	1126	1077	1024	1040	1102	1138	1082	1043	1086	1091	1095	1069	1062	1101	1123
22.	1085	1092	1088	1031	1011	1050	1077	1052	1057	1045	1094	1074	1114	1091	1094	1112	1132
23.	1162	1164	1160	1150	1158	1164	1160	1155	1152	1145	1150	1145	1143	1139	1144	1141	1139
24.	0965	1035	1122	1102	1110	1134	1147	1092	1173	1110	1126	1103	1058	0956	0960	1047	1079
25.	0578	0578	0766	1010	1246	1072	0958	0779	0724	0900	1038	1038	1022	0870	0830	0976	1023
26.	1216	1170	1118	1134	0973	0920	1050	1157	1175	1179	1026	0731	0757	0947	1043	1147	1125
27.	1153	1029	0956	0868	0844	0770	0905	0931	0954	0915	0865	0825	0898	1048	1155	1151	1174
28.	1103	1090	1018	0825	0674	0807	1027	1014	0897	0843	0800	0807	0944	1134	1123	1189	1186
29.	1097	1060	0972	0978	1029	1024	0989	0969	0978	0930	0801	0856	0978	1098	1194	1170	1195
30.	1165	1151	1162	1155	1143	1065	1026	1041	1072	1045	1061	1038	1021	1036	1150	1153	1156
31.	1075	1093	1057	1096	1073	0798	0808	0710	0595	0630	0769	0991	1110	1169	1124	1040	1045
Juni 1.	1094	1150	1165	1125	1096	1026	0912	0859	1027	0922	0969	1086	1151	1176	1178	1128	1160
Mittel	1077.0	1059.2	1059.0	1045.9	1040.0	1015.6	1030.1	1012.7	0982.0	0942.5	0943.5	0985.6	1037.4	1068.8	1095.9	1114.8	1119

Mai 1910

	0—½	½—1	1—1½	1½—2	2—2½	2½—3	3—3½	3½—4	4—4½	4½—5	5—5½	5½—6	6—6½	6½—7	7—7½	7½—8	8—8½	8½
Mai 9.																		
10.	2120	2119	2083	2085	2074	2066	2089	2128	2147	2132	2096	1961	1979	1984	1992	2034	2045	20
11.	2039	2037	2036	2051	2120	2195	2124	2200	2141	2097	2084	2053	1979	2028	2045	2060	2077	20
12.	2093	2084	2091	2091	2098	2114	2113	2102	2093	2073	2082	2042	2039	2055	2049	2064	2079	20
13.	2084	2078	2077	2094	2100	2148	2158	2187	2110	2173	2157	2073	2087	2051	2035	2029	2024	20
14.	2094	2147	2127	2120	2102	2082	2080	2276	2066	2086	2129	2119	2052	2014	2049	2045	2046	20
15.	2200	2229	2221	2169	2149	2105	2152	2193	2300	2020	2058	2037	2032	2042	2014	1999	2012	20
16.	2251	2276	2223	2202	2153	2132	2135	2107	2175	2203	2127	2092	2098	2084	2066	2094	2105	21
17.	2137	2153	2144	2179	2189	2200	2199	2174	2133	2132	2135	2128	2105	2116	2129	2126	2101	20
18.	2117	2021	2136	2170	2169	2125	2095	2097	2090	2084	2081	2065	2049	2025	2013	2024	2036	20
19.	2058	2177	2159	2113	2104	2122	2178	2228	2180	2162	1994	1924	1909	1891	1879	1859	1849	18
20.	2008	2027	2074	2088	2034	2016	1998	1967	1963	1963	1968	1966	1965	1952	1950	1946	1943	18
21.	1860	1861	1872	1880	1888	1878	1869	1865	1865	1862	1869	1870	1870	1869	1869	1867	1876	18
22.	1883	1903	1950	2016	1990	1952	1936	1902	1895	1875	1876							
23.	1976	1976	1976	1985	1982	1982	1981	1980	1978	1977	1984	1985	1986	1985	1986	1986	1987	19
24.	2013	2005	2023	2019	2029	2036	2051	2054	2027	2022	2025	2022	2013	1973	1920	1936	1920	19
25.	2181	2176	2248	2239	2210	2262	2329	2360	2329	2293	2212	2111	2069	2041	2030	2041	2018	20
26.	2144	2122	2129	2138	2270	2284	2169	2106	2088	2079	2038	2070	2030	1960	1949	2010	2018	20
27.	2034	2149	2234	2149	2144	2107	2050	2052	2072	2112	2176	2104	2052	2034	2048	2043	2021	1
28.	2144	2267	2324	2221	2198	2266	2306	2333	2252	2253	2172	2098	2079	2088	2121	2137	2136	2
29.	2252	2270	2306	2316	2280	2244	2234	2293	2270	2234	2117	2132	2024	2020	2061	2079	2100	2
30.	2059	2068	2084	2093	2101	2133	2133	2122	2080	2079	2038	2097	2080	2085	2100	2106	2113	2
31.	2154	2111	2174	2154	2244	2306	2280	2280	2176	2112	2057	2018	2014	2012	2005	1987	1967	1
Juni 1.	2156	2138	2126	2144	2140	2154	2190	2185	2158	2180	2041	2003	2023	2046	2054	2049	2040	2
Mittel	2096.1	2112.0	2130.5	2121.7	2125.6	2133.5	2129.7	2138.3	2120.7	2102.3	2078.0	2046.0	2023.9	2014.7	2014.8	2022.5	2023.9	2

Halb-Stundenmittel der Deklination (Wert) 33° +

½-10	10-10½	10½-11	11-11½	11½-12	12-12½	12½-13	13-13½	13½-14	14-14½	14½-15	15-15½	15½-16	16-16½	16½-17	17-17½	17½-18	18-18½
47.4	48.3	49.7	51.0	52.7	55.0	55.4	56.3	56.6	58.4	55.5	*55.0*	*58.5*	*54.0*	*53.0*	52.4	50.7	51.0
42.5	44.5	45.5	45.5	46.8	47.9	49.7	52.5	54.0	53.8	54.5	54.0	53.3	53.4	52.6	52.4	51.0	51.5
45.8	48.5	48.8	51.8	49.3	49.0	49.5	52.6	53.5	53.0	54.2	56.5	52.2	50.3	53.4	54.5	51.0	42.8
48.8	50.0	53.0	54.8	56.8	57.1	57.5	59 0	59.5	59.3	60.0	60.8	61.0	59.7	61.3	60.0	58.2	54.9
50.4	49.4	50.8	52.2	54.0	55.4	57.4	57.8	59.8	59.4	*59.3*	61.4	61.4	62.4	60.0	60.1	60.2	59.0
52.2	52.8	51.2	53.3	56.0	57.4	56.8	57.8	60.0	61.4	62.0	62.0	63.0	62.6	63.0	63.4	59.8	59.2
49.5	51.5	53.3	53.8	56.5	57.0	57.8	58.3	58.9	61.8	61.2	65.0	64.6	64.4	65.2	64.0	65.0	66.0
48.0	49.9	54.0	53.0	55.0	56.5	58.0	59.5	59.5	59.0	62.5	61.0	62.5	65.5	63.7	62.5	59.6	59.2
39.5	41.7	59.5	42.4	22.8	30.5	42.8	61.0	53.7	49.5	41.6	24.8	40.4	63.5	63.3	63.5	61.5	60.9
48.5	50.8	51.5	52.8	54.5	55.0	55.7	60.5	56.5	63.5	61.4	63.5	55.6	52.0	46.2	53.4	58.9	65.5
41.5	48.8	51.2	60.7	60.5	64.6	62.4	59.5	61.8	63.7	65.3	64.8	63.0	58.3	57.9	57.6	55.5	54.7
45.8	49.2	49.2	52.7	61.5	64.5	61.6	58.2	54.7	49.7	44.8	48.8	52.6	57.0	60.5	60.7	60.6	61.4
58.5	59.5	52.4	55.4	55.4	64.0	63.7	64.0	65.0	64.0	61.8	62.8	66.5	65.5	63.7	61.5	61.4	61.5
52.8	54.7	58.0	53.1	57.2	52.9	42.4	34.2	21.4	19.2	13.8	16.5	20.4	45.4	56.5	61.9	65.5	70.4
50.0	48.5	48.4	43.6	52.4	64.3	61.9	60.8	57.3	59.4	62.8	49.7	50.3	67.5	57.4	63.3	61.2	60.8
45.8	49.0	49.7	53.4	54.6	62.4	67.7	67.8	64.8	60.9	63.0	66.4	63.6	64.5	58.5	56.5	57.6	57.4
52.6	56.4	53.2	53.0	59.8	59.7	61.8	62.3	61.8	63.9	61.8	62.8	60.9	60.0	58.1	55.9	55.8	52.5
55.0	54.3	55.5	57.1	58.4	59.8	59.2	63.1	63.7	63.2	61.2	59.4	58.6	57.8	57.5	55.7	54.5	52.8
50.5	51.4	54.1	57.3	59.2	59.7	62.6	63.0	62.8	62.4	60.8	59.0	59.0	58.9	59.2	57.4	58.0	55.4
44.8	49.8	46.7	43.8	42.7	42.0	35.8	36.8	52.3	59.0	73.7	74.4	75.5	72.4	71.1	71.2	75.2	78.5
57.2	66.5	61.6	61.0	62.5	66.0	66.5	69.5	62.2	68.7	58.0	55.4	69.0	70.7	68.2	71.5	78.4	60.5
51.8	52.5	52.0	56.4	53.8	60.8	59.5	49.5	49.5	39.4	56.0	61.4	66.4	69.0	62.6	64.3	64.5	66.4
56.0	57.0	57.7	58.8	52.8	57.0	61.9	60.8	55.2	62.5	63.9	59.0	59.5	62.3	58.6	60.0	60.4	61.5
48.6	46.7	45.5	49.5	59.3	57.8	51.0	55.7	46.5	47.7	53.6	47.0	60.5	65.0	70.0	59.8	56.5	66.4
50.3	50.8	52.4	56.6	50.8	52.0	58.4	61.4	58.8	57.5	59.2	61.0	60.8	60.2	62.0	63.3	62.4	60.8
57.7	53.9	56.5	62.4	58.4	64.4	65.4	67.0	67.5	66.8	66.5	66.0	66.0	62.0	67.4	65.0	57.7	57.7
54.6	57.3	52.5	49.0	49.7	51.6	47.0	45.5	60.4	64.3	68.8	67.7	73.3	65.5	61.5	62.5	63.4	57.4
60.5	60.5	60.4	60.5	62.3													
50.2	51.6	52.4	53.1	53.8	56.5	56.6	57.6	56 9	57.5	58.0	57.2	59.1	61.1	60.5	60.6	60.2	59.5

Halb-Stundenmittel der Horizontal-Intensität 0.1 + ...

…-8½	8½-9	9-9½	9½-10	10-10½	10½-11	11-11½	11½-12	12-12½	12½-13	13-13½	13½-14	14-14½	14½-15	15-15½	15½-16	16-16½	16½-17	17-17½
																		114
	1076	1090	1102	1105	1104	1093	1100	1132	1145	1121	1152	1155	1147	1194	1194	1174	1172	120
	1151	1158	1160	1155	1159	1136	1151	1163	1165	1171	1179	1174	1177	1179	1191	1195	1223	125
								1201	1176	1166	1173	1175	*1175*	1171	1185	1229	1237	125
	1177	1173	1189	1175	1175	1164	1161	1172	1184	1170	1166	1173	1175	1175	1177	1173	1192	120
	1181	1171	1166	1163	1162	1161	1160	1158	1162	1164	1168	1171	1153	1188	1180	1188	1195	120
	1175	1163	1152	1153	1152	1144	1148	1145	1151	1148	1165	1186	1158	1170	1191	1174	1174	11
	1151	1135	1110	1103	1101	1117	1153	1295	1383	1251	1252	1279	1386	1322	1283	1239	1214	120
	1128	1173	1168	1158	1141	1148	1152	1151	1139	1155	1177	1168	1158	1172	1273	1326	1386	13
	1147	1166	1147	1154	1154	1159	1135	1127	1157	1163	1166	1161	1176	1167	1203	1258	1286	130
	1153	1141	1120	1127	1165	1161	1135	1139	1135	1185	1236	1268	1305	1325	1266	1231	1201	12
	1134	1142	1146	1148	1155	1157	1155	1164	1155	1202	1312	1411	1429	1411	1490	1420	1281	12
	0990	1129	1145	1127	1104	1157	1158	1199	1152	1189	1300	1339	1328	1410	1311	1243	1227	12
	1122	1114	1098	1124	1137	1140	1138	1186	1195	1237	1228	1236	1269	1238	1287	1236	1200	12
	1117	1107	1128	1146	1138	1147	1143	1142	1150	1151	1173	1188	1191	1195	1235	1269	1287	12
	1129	1124	1132	1129	1127	1122	1129	1126	1126	1127	1153	1164	1170	1174	1181	1183	1181	11
	1139	1136	1137	1133	1130	1134	1133	1140	1143	1141	1143	1149	1152	1161	1172	1178	1188	11
	1092	1108	1047	1059	1089	1184	1250	1321	1372	1389	1452	1385	1256	1248	1238	1222	1216	11
	1118	1152	1116	1131	1137	1159	1176	1200	1227	1219	1230	1226	1289	1323	1272	1302	1360	13
	1147	1177	1188	1140	1149	1117	1238	1194	1205	1241	1289	1257	1307	1243	1218	1225	1242	12
	1189	1190	1177	1167	1166	1112	1179	1170	1176	1197	1217	1213	1258	1276	1337	1334	1327	12
	1161	1172	1129	1164	1197	1192	1168	1181	1193	1203	1278	1312	1356	1466	1421	1418	1401	13
	1172	1181	1175	1174	1151	1151	1165	1176	1194	1200	1282	1274	1247	1258	1252	1227	1211	12
	1115	1131	1146	1155	1132	1136	1199	1171	1177	1189	1182	1174	1183	1186	1227	1208	1183	12
	1080	1113	1142	1161	1207	1212	1242	1304	1309	1349	1309	1267	1316	1286	1281	1311	1297	13
	1185	1181	1161	1162	1161													
0	1126.2	1142.0	1143.7	1145.2	1145.3	1154.5	1163.9	1178.9	1189.6	1197.0	1224.6	1234.4	1240.8	1250.6	1253.8	1246.5	1243.9	124

Halb-Stundenmittel der Vertikal-Intensität 0.5 ··· + Tafelwert.

-9	9-9½	9½-10	10-10½	10½-11	11-11½	11½-12	12-12½	12½-13	13-13½	13½-14	14-14½	14½-15	15-15½	15½-16	16-16½	16½-17	17-17½
													2029	2046	2072	2090	2096
38	2038	2040	2038	2047	2015	2003	2002	2003	2004	2004	2005	2014	2026	1997	1983	1986	2000
32	2086	2091	2094	2101	2117	2080	2068	2063	2057	2044	1997	1979	1966	2050	2105	2091	2159
38	2088	2089	2097	2098	2097	2040	1990	1969	1978	1976	1986	1995	1997	2011	2043	2046	2054
34	2046	2050	2058	2063	2072	2037	2043	2001	1964	1955	1985	1932	1900	1930	1971	2004	2012
35	2056	2050	2049	2051	2049	1983	1953	1974	1980	1986	2018	2024	2040	2049	2063	2047	2011
40	2046	2056	2071	2057	2058	2074	2007	1986	2009	2044	2080	2105	2107	2108	2121	2141	2140
15	2118	2107	2108	2081	2071	2040	2037	2017	2052	2144	2176	2185	2180	2173	2169	2158	2163
74	2060	2087	2108	2119	2115	2086	2013	1994	1977	1969	1993	2031	2084	2123	2129	2130	2132
52	2060	2056	2064	2053	2078	2082	1990	1990	2035	2049	1998	1905	1804	1833	1968	2014	2009
41	1853	1810	1787	1743	1749	1793	1857	1941	1989	2021	2022	1969	1869	1884	1902	1961	1970
67	1890	1951	1974	1972	1969	1976	1991	2009	2015	1969	1961	1975	1944	1944	1959	1958	1959
81	1878	1903	1925	1936	1887	1838	1807	1801	1828	1840	1855	1865	1885	1911	1931	1924	1880
80	1981	1974	1908	1887	1896	1913	1939	1961	1975	1991	2000	2000	2007	2023	2036	2044	2047
35	1956	1948	1943	1980	2032	2022	2012	1992	2007	1987	2047	2050	2028	2025	2040	2058	2056
22	2039	2032	2005	2009	2031	2047	2087	2087	2058	2061	2064	2028	2027	2054	2066	2030	1991
28	2043	2050	2016	2021	2056	2059	2074	2097	2097	2135	2110	2097	2090	2088	2102	2115	2104
42	1942	2007	2000	1925	1866	1924	1948	1947	1942	1951	1962	1985	2012	1994	2007	2034	2051
23	2111	2102	2086	2072	2077	2114	2133	2139	2166	2167	2153	2149	2135	2097	2100	2103	2118
00	2095	2108	2113	2106	2115	2117	2070	2116	2144	2113	2093	2093	2054	2006	1973	1993	2021
00	2079	2081	2070	2055	2057	2061	2071	2068	1928	2108	2214	2186	2144	2136	2100	2022	2021
069	1994	2015	2031	2036	2041	2066	2073	2071	1941	1946	1946	1959	1952	1948	1946	1987	2003
046	2049	2043	2036	2028	2025	2028											
16.5	2021.0	2029.2	2026.0	2019.6	2020.4	2016.9	2003.1	2010.3	2007.0	2021.8	2035.2	2019.8	2012.1	2020.2	2038.2	2045.2	2047.5

Greenwich Zeit

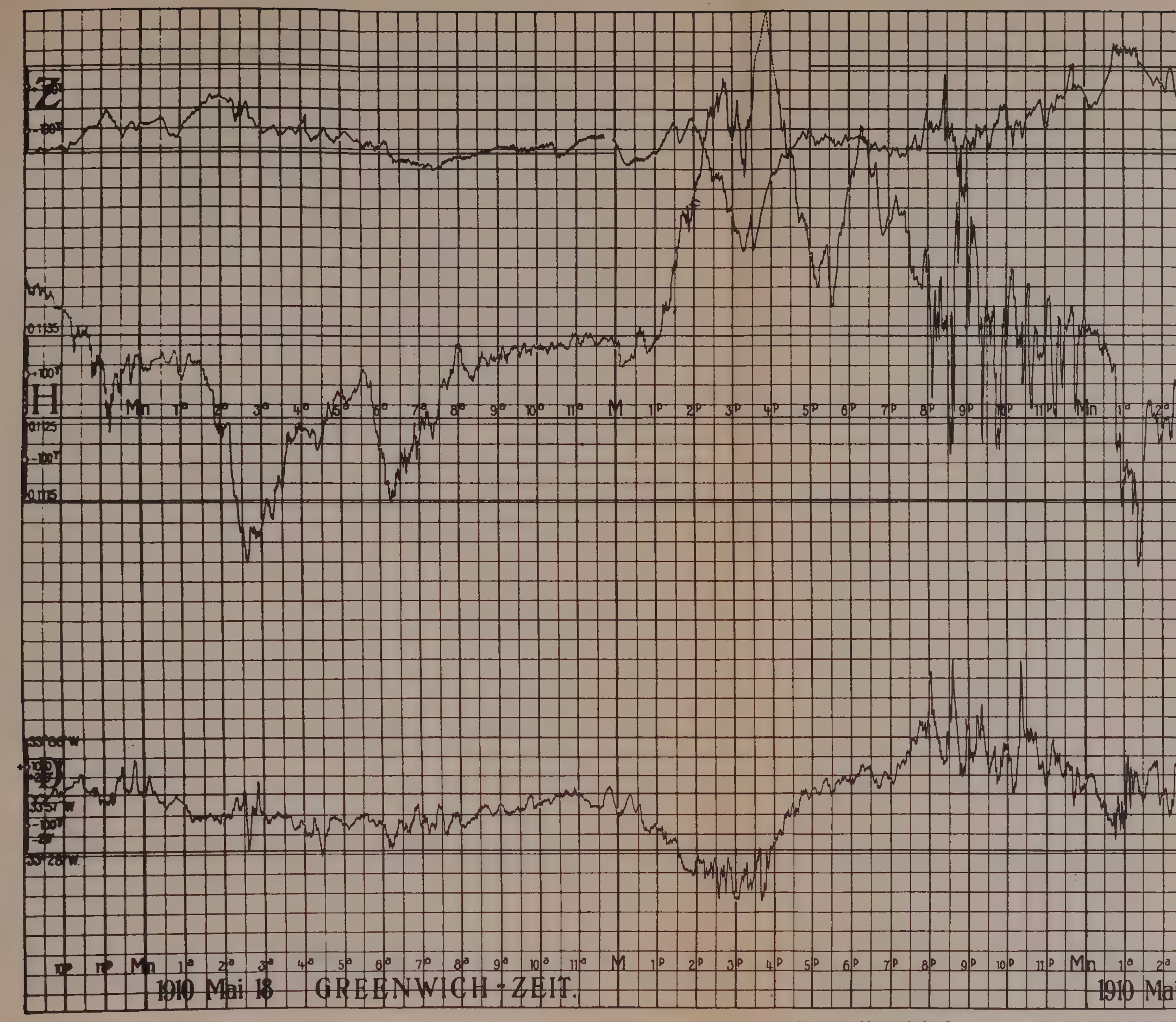
…-19	19-19½	19½-20	20-20½	20½-21	21-21½	21½-22	22-22½	22½-23	23-23½	23½-24	Tgl. Schw.	Tages Mittel
												33°
			54.7	56.5	60.3	68.4	89.3	74.5	72.6	67.1		
.9	57.3	57.7	57.0	48.0	57.4	48.6	54.5	58.1	50.1	55.6	21.5	49.0
.0	52.7	53.5	48.5	60.5	66.0	57.5	57.0	48.7	57.4	55.5	29.0	48.2
.5	53.7	54.8	*54.6*	*54.0*	*54.0*	*54.1*	*54.0*	*54.0*	*54.0*	*54.0*	31.7	46.0
.4	54.9	53.8	55.2	57.3	58.0	61.0	65.8	61.8	54.2	54.1	22.4	54.2
.8	59.1	62.8	69.8	79.4	73.8	81.0	73.2	61.7	56.8	57.8	52.5	54.4
.5	56.4	56.4	55.5	54.0	53.8	53.0	53.8	54.0	54.8	54.5	38.9	53.0
.8	74.5	83.5	76.6	72.7	61.6	56.5	60.5	59.5	51.8	55.5	63.9	54.3
.0	*56.0*	*54.8*	*54.2*	*53.8*	53.6	54.0	55.9	54.5	55.8	54.5	29.2	53.4
.4	59.5	58.3	61.5	66.6	69.3	71.1	72.6	59.5	76.5	68.8	62.1	48.4
.8	62.9	54.4	52.5	52.4	55.9	57.5	57.5	57.3	58.5	56.6	30.2	52.2
.4	56.9	60.6	57.1	56.5	60.4	56.8	59.0	62.7	66.7	54.8	49.3	54.7
.9	67.1	72.4	76.5	71.0	60.6	59.7	74.0	70.2	59.9	57.4	45.5	54.8
.4	57.9	57.3	60.8	60.2	56.5	58.4	64.1	58.8	60.4	65.0	21.8	56.8
.6	75.5	89.5	89.8	86.4	85.5	74.4	84.3	76.3	73.2	65.7	75.7	52.9
.4	75.0	76.5	71.3	70.4	56.7	65.6	61.2	58.2	64.4	63.8	61.1	52.9
3.0	61.8	70.5	60.7	55.0	58.8	58.0	56.7	58.6	60.6	57.7	28.5	55.1
0.8	65.3	69.0	65.4	64.5	61.6	63.8	61.9	59.8	59.8	62.5	24.6	56.2
2.3	52.4	52.5	52.5	53.4	54.2	55.4	55.8	55.0	54.7	54.5	21.2	53.1
4.6	55.2	52.0	55.7	56.7	61.5	67.4	102.0	87.0	67.6	47.5	57.3	56.3
0.7	88.0	90.4	90.9	84.4	72.8	64.8	72.0	77.0	68.5	55.5	61.7	58.3
7.8	82.4	77.5	78.8	94.0	80.0	77.0	77.0	73.0	70.0	62.0	85.0	52.2
3.8	64.4	65.0	74.8	87.5	70.4	70.6	64.4	59.3	62.8	62.7	67.7	55.6
3.9	62.7	61.5	62.9	65.4	65.8	120.0	68.8	66.5	60.4	61.3	93.5	55.1
0.8	77.4	87.5	77.6	80.5	73.4	73.4	75.9	72.4	65.4	68.8	64.0	56.2
0.0	59.8	59.8	59.0	59.4	58.8	59.2	59.9	58.9	58.3	59.8	43.0	53.5
9.8	59.3	60.0	62.8	64.4	64.5	67.1	71.0	80.0	72.8	82.0	38.6	59.5
3.6	52.5	58.7	63.7	61.8	66.0	64.0	62.5	62.6	64.0	68.5	63.5	53.2
0.5	63.0	64.8	64.5	65.6	63.4	64.8	65.7	63.1	61.5	61.2	47.5	53.9

Greenwich-Zeit

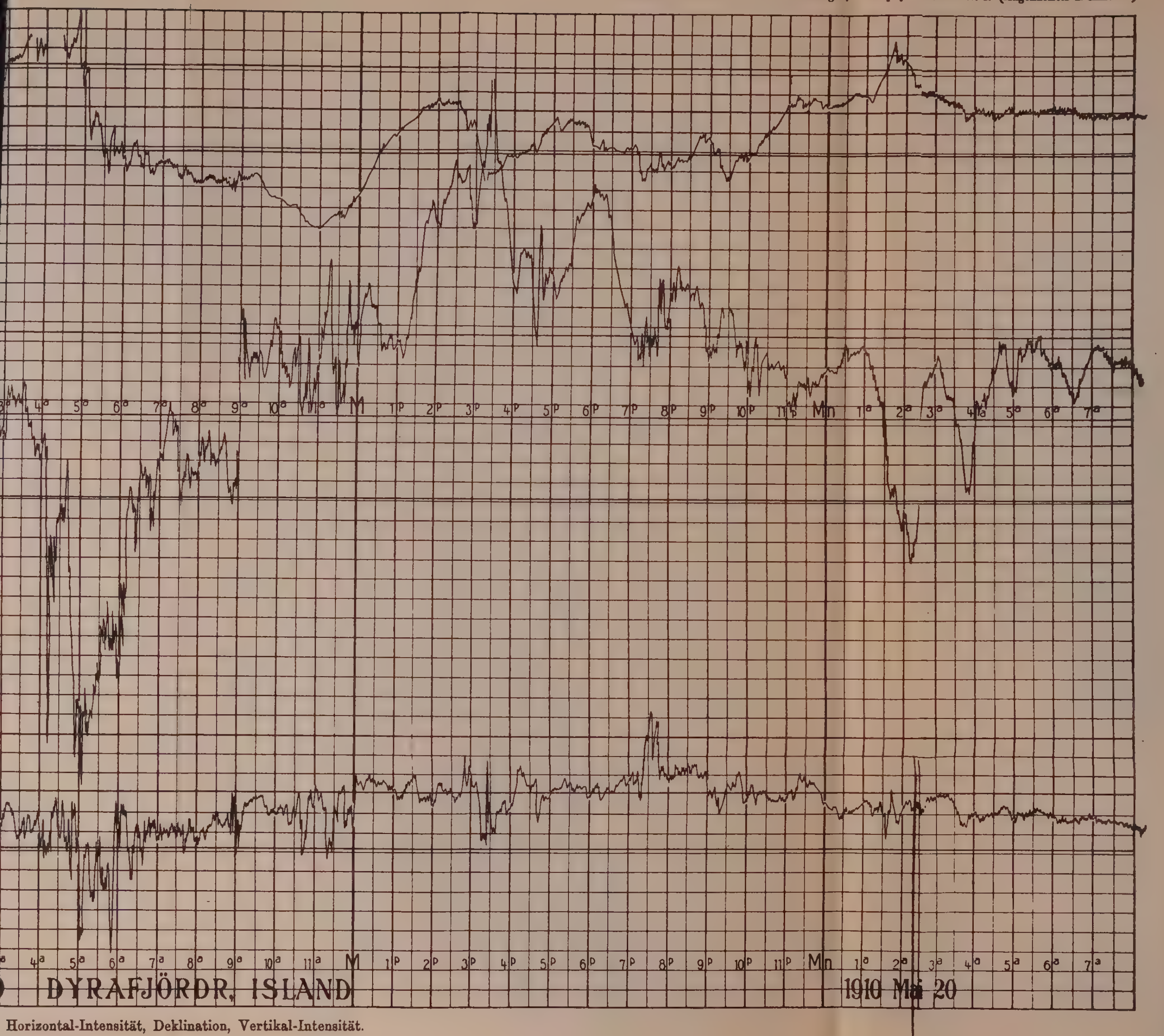
…7½-18	18-18½	18½-19	19-19½	19½-20	20-20½	20½-21	21-21½	21½-22	22-22½	22½-23	23-23½	23½-24	Tgl. Schw.	Tagesmittel 0.1 +
1140	1132	1148	1176	1204	1163	1180	1151	1125	1105	1119	1014	0989		
1247	1248	1263	1244	1213	1197	1190	*1180*	*1170*	*1160*	*1160*	1158	1158	450	1101.6
1267	1243	1242	1239	1219	1216	1241	1240	1207	1156	1195	1187	1167	260	1169.7
1276	1302	1278	1292	1264	1187	1115	1138	1111	1159	1194	1180	1165		
1247	1193	1197	1210	1193	1190	1190	1188	1192	1185	1175	1173	1168	496	1143.1
1266	1349	1301	1266	1184	1163	1196	1155	1171	1167	1156	1118	1085	625	1113.2
1207	1210	1201	1217	1215	1208	1197	1191	1187	1179	1170	1178	1169	232	1168.3
1239	1188	1232	1196	1223	1227	1161	1144	1157	0950	0950	0739	0915	670	1124.6
1328	1262	1258	1280	1238	1208	1193	1170	1161	1163	1173	1156	1135	577	1139.3
1334	1296	1267	1254	1201	1181	1179	1183	1164	1165	1132	1103	1115	737	1091.7
1182	1198	1265	1282	1216	1194	1200	1210	1202	1169	1091	1130	1091	390	1141.3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1303	1383	1303	1308	1234	1186	1295	1204	1161	1184	1161	1167	1157	560	1177.8
1318	1299	1196	1155	1195	1221	1181	1169	1147	1130	1125	1100	1114	693	1118.2
1270	1246	1216	1169	1178	1152	1157	1153	1132	1139	1146	1150	1156	352	1150.6
1280	1276	1251	1224	1151	1164	1186	1191	1151	1178	1158	1133	1112	244	1150.1
1181	1178	1178	1178	1179	1174	1175	1176	1151	1172	1167	1165	1165	138	1128.9
1211	1242	1261	1248	1282	1240	1241	1256	1200	0849	0872	1013	0966	143	1153.2
1238	1361	1290	1168	1091	1119	1139	1137	1171	1187	1224	1224	1012	496	1166.6
1187	1283	1302	1257	1228	1199	1104	0777	0982	1058	1046	*1106*	*1166*	782	1084.7
1224	1241	1258	1208	1173	1147	1107	1196	1224	1202	1219	1166	1170	527	1133.4
1241	1215	1214	1216	1184	1193	1216	1181	1013	1129	1155	1163	1143	567	1119.5
1359	1340	1227	1253	1203	1199	1168	1131	1140	1180	1075	1093	1117	792	1139.2
1180	1183	1186	1173	1173	1176	1180	1180	1174	1176	1177	1172	1172	481	1131.6
1249	1237	1211	1217	1204	1206	1224	1205	1176	1131	1049	1034	0983	228	1143.9
1271	1241	1267	1260	1220	1227	1210	1184	1198	1197	1187	1196	1127	754	1134.5
1252.5	1257.1	1244.2	1229.3	1203.2	1194.6	1185.8	1167.4	1159.6	1140.8	1129.4	1121.5	1112.1	479.1	1136.5

Greenwich-Zeit

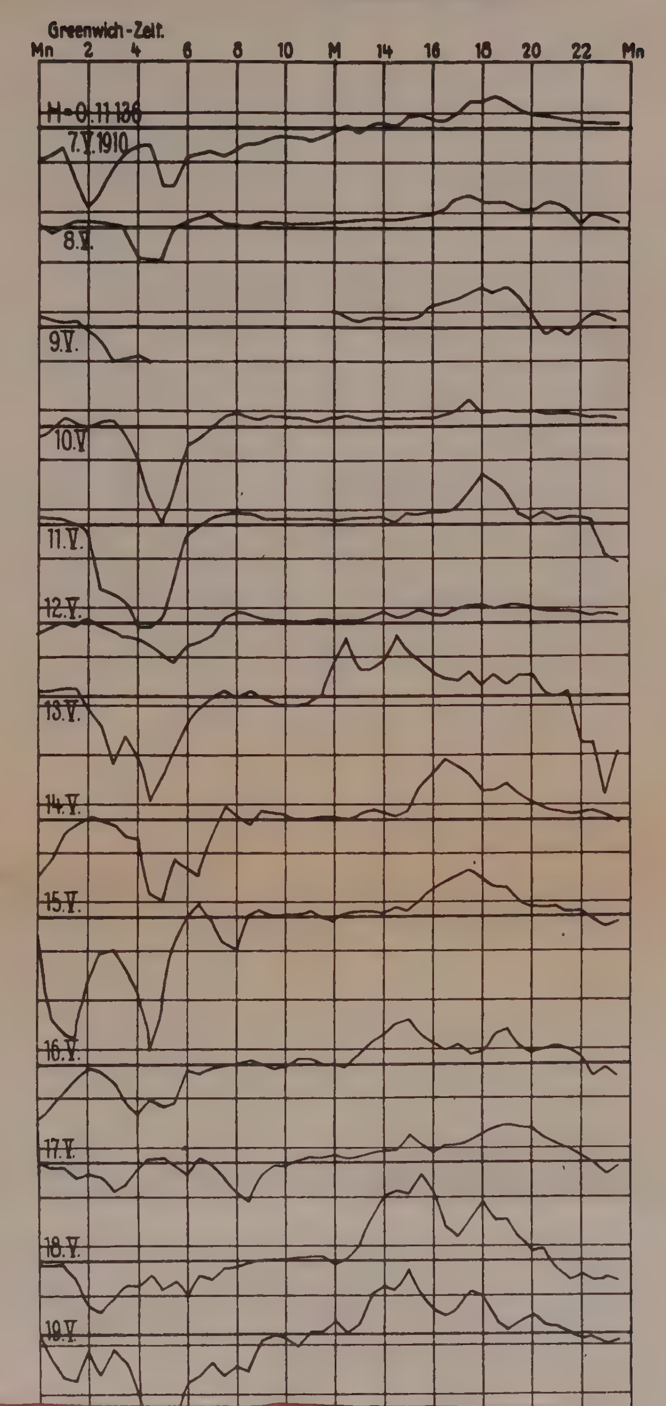
…8	18-18½	18½-19	19-19½	19½-20	20-20½	20½-21	21-21½	21½-22	22-22½	22½-23	23-23½	23½-24	Tgl. Schw.	Tages Mittel
	2050	2008	1986	1996	2002	2025	2023	2050	2038	2060	2074	2091		}2045.7
	2020													
	2148	2039	1990	2022	2028	2025	2041	2041	2008	2078	2108	2100		2063.2
	2079	2076	2060	2056	2035	2037	2033	2035	2029	2034	2061	2081		2056.0
	1975	1966	1962	1954	1958	1961	1969	2017	2104	2170	2129	2147		2042.1
	1949	1990	1997	1981	1982	1984	2013	2042	2053	2067	2107	2110		2042.7
	2162	2067	2087	2089	2089	2086	2081	2089	2106	2130	2158	2183		2095.6
	2157	2145	2111	2069	2057	2087	2096	2107	2147	2139	2160	2116		2128.6
	2131	2122	2104	2102	2005	2044	2053	2062	2073	2114	2136	2113		2102.2
	1994	1975	1966	1984	2035	1985	1995	2023	2011	2038	2084	2092		2034.4
	1911	1906	1861	1863	1873	1907	1877	1873	1919	1980	2012	2016		1952.8
	1955	1933	1882	1850	1874	1864	1865	1884	1879	1903	1931	1931		1955.4
	1852	1822	1828	1886	1869	1867	1851	1849	1841	1871	1864	1880		1869.3
	2059	2046	2021	1996	1989	1974	1938	1977	2064	2074	2075	2016		1969.6
	2009	1913	1910	1964	1979	2005	1978	1962	2000	2029	2061	2176		2004.6
	1953	1967	1952	1940	1964	2115	2311	2241	2146	2203	2154	2170		2103.3
	2090	2092	2079	1986	1948	1994	1951	1961	2092	2032	2034	2030		2068.6
	2070	2090	2104	2106	2108	2097	2084	2041	2061	2066	2103	2124		2044.5
	2054	2068	2018	1987	1998	2072	2149	2176	2153	2190	2220	2258		2144.7
	2028	2027	2024	2031	2034	2021	2013	2033	2036	2046	2052	2057		2196.0
	2057	2068	2079	2090	2102	2097	2098	2104	2115	2134	2269	2203		2095.2
	1991	2010	2046	2048	2070	2089	2094	2100	2104	2116	2122	2134		2060.2
.8	2032.5	2015.7	2003.2	2000.0	2000.0	2016.0	2024.4	2028.9	2046.6	2070.2	2091.1	2096.6		2048.1

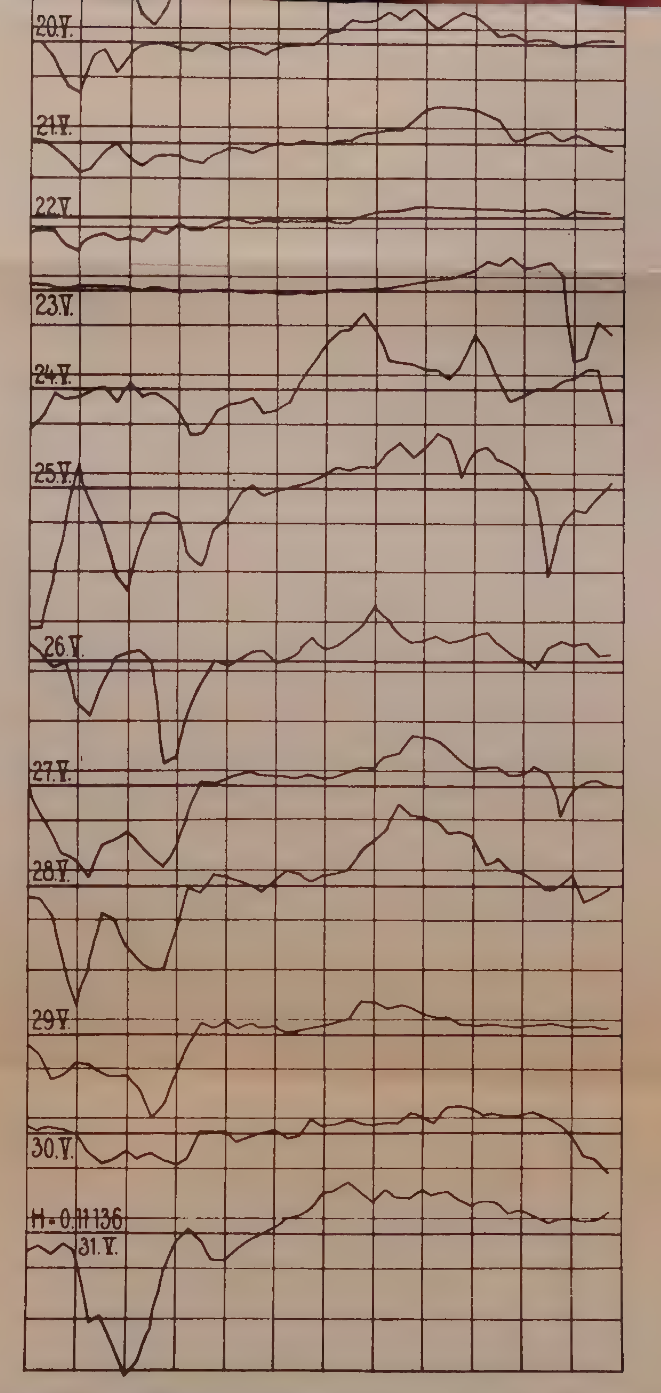


Tafel 1. Magnetische Störung vom 18.—20. Mai 1910 Isl



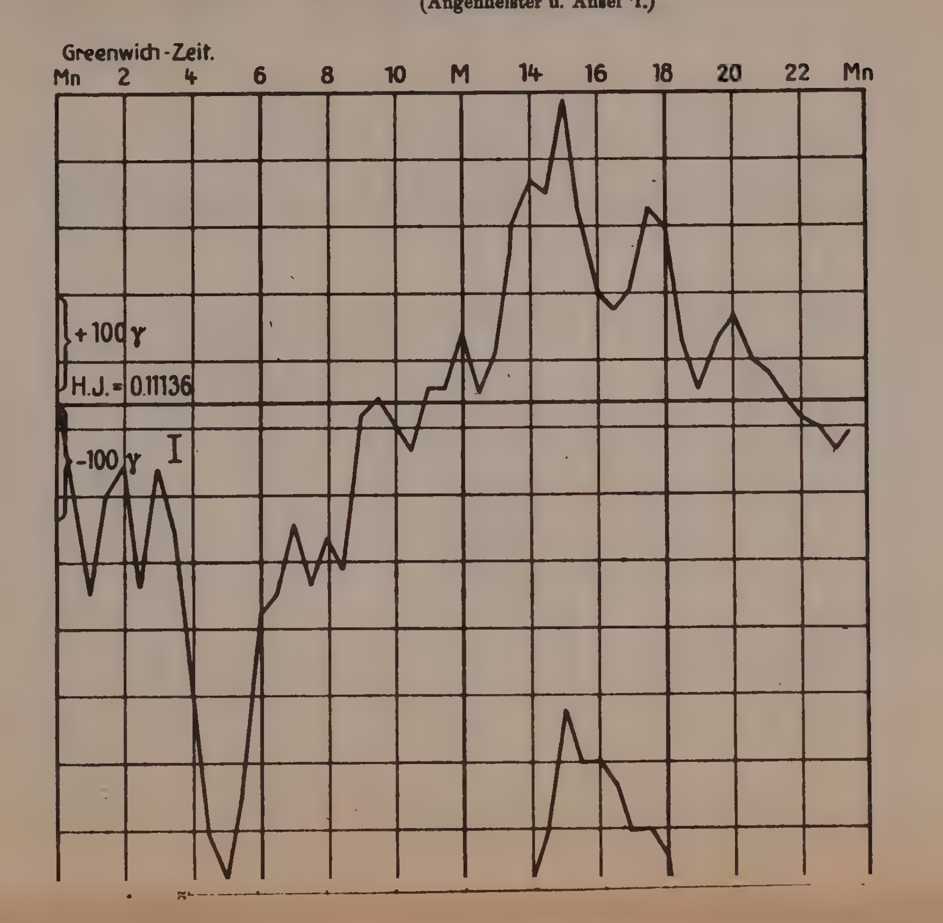
Horizontal-Intensität, Deklination, Vertikal-Intensität.

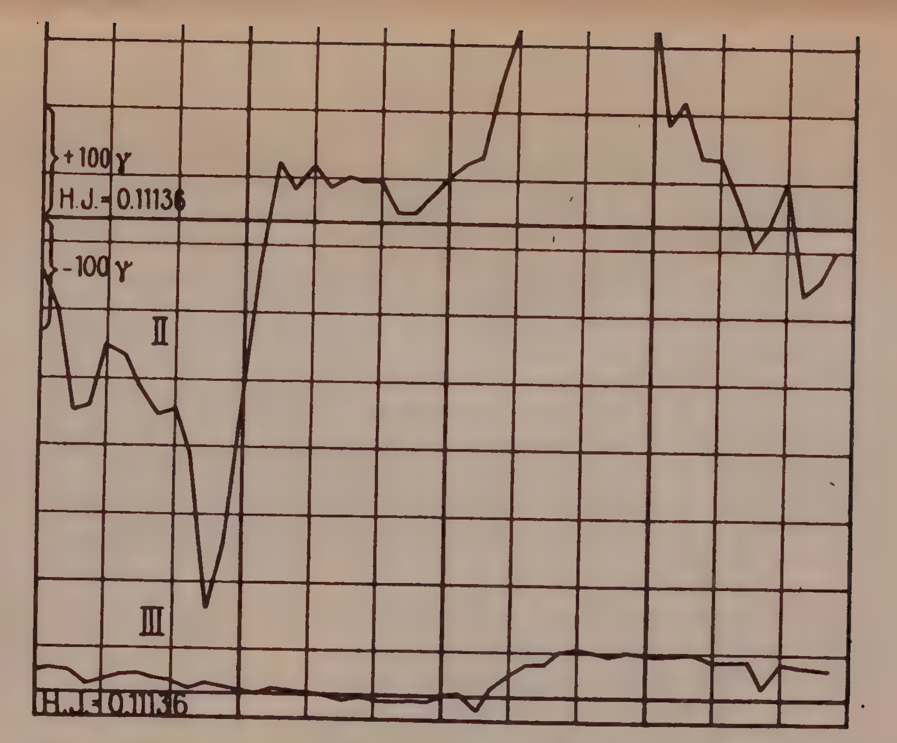

Greenwich-Zeit.
Mn
2
4
6
8
10
M
14
16
18
20
22
Mn
H = 0.11136
7.V.1910
8.V.
9.V.
10.V.
11.V.
12.V.
13.V.
14.V.
15.V.
16.V.
17.V.
18.V.
19.V.



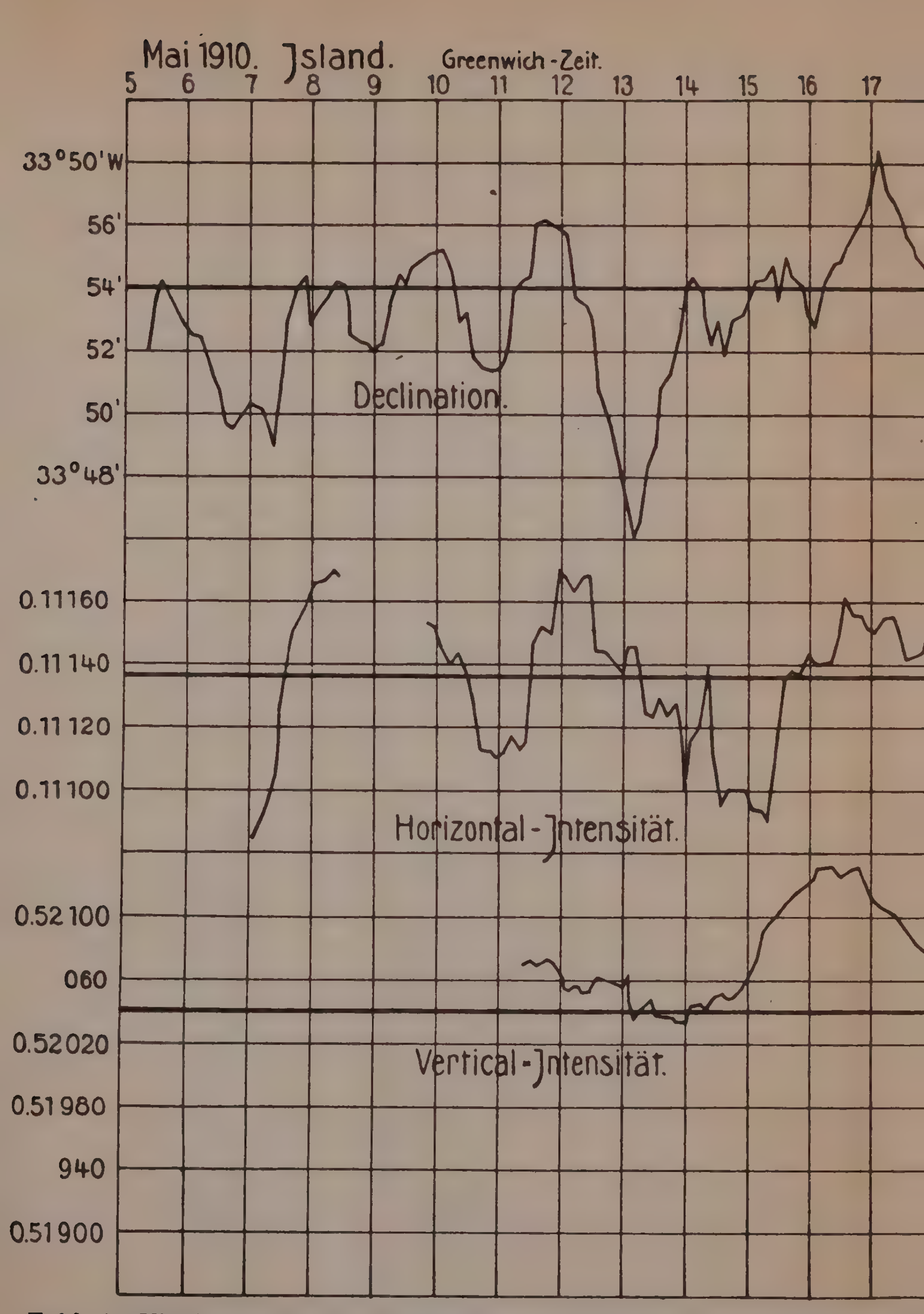
Tafel 2. Gang der Horizontal-Intensität während der Registrierzeit in Island.

(Angenheister u. Ansel I.)

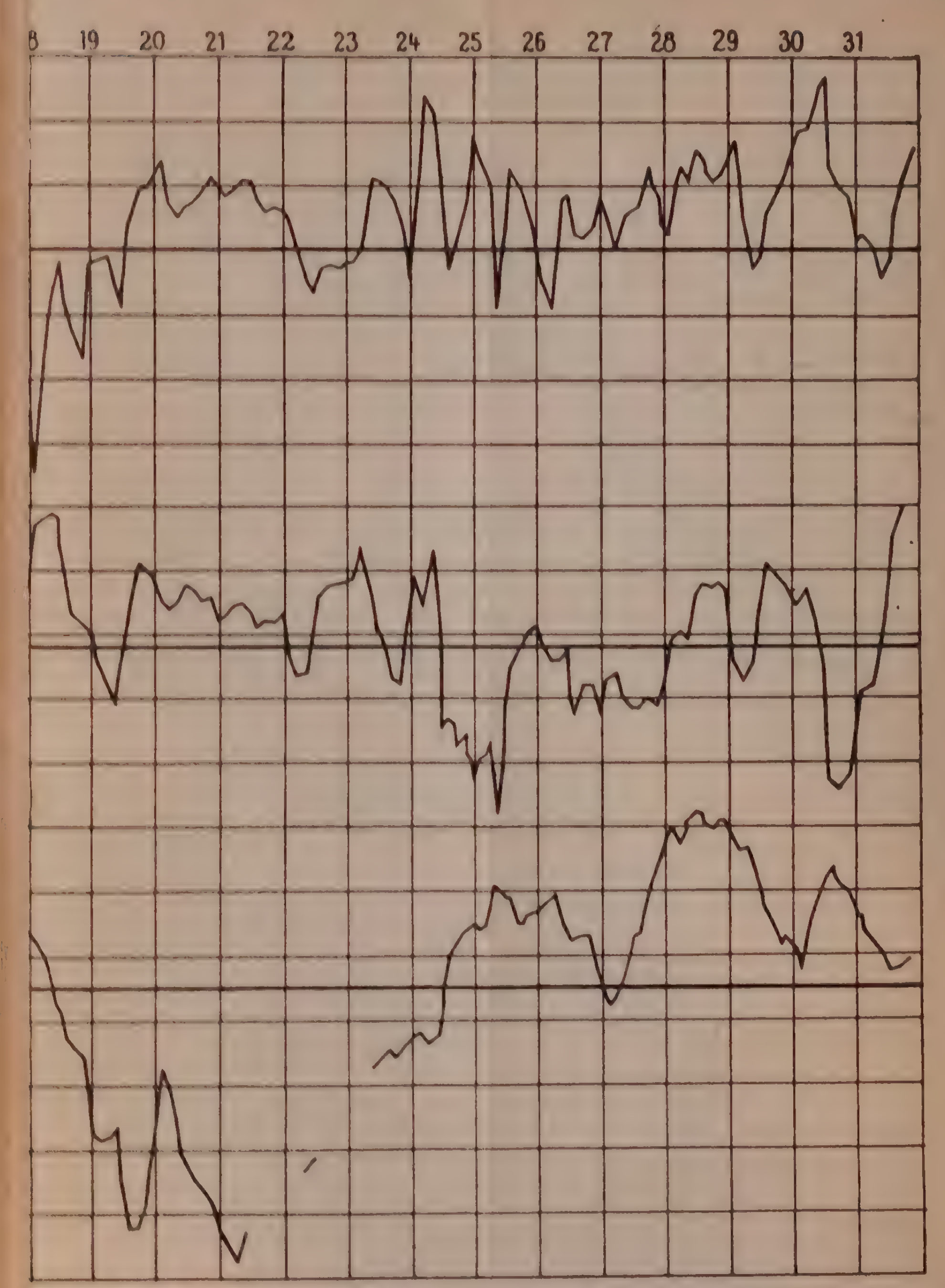




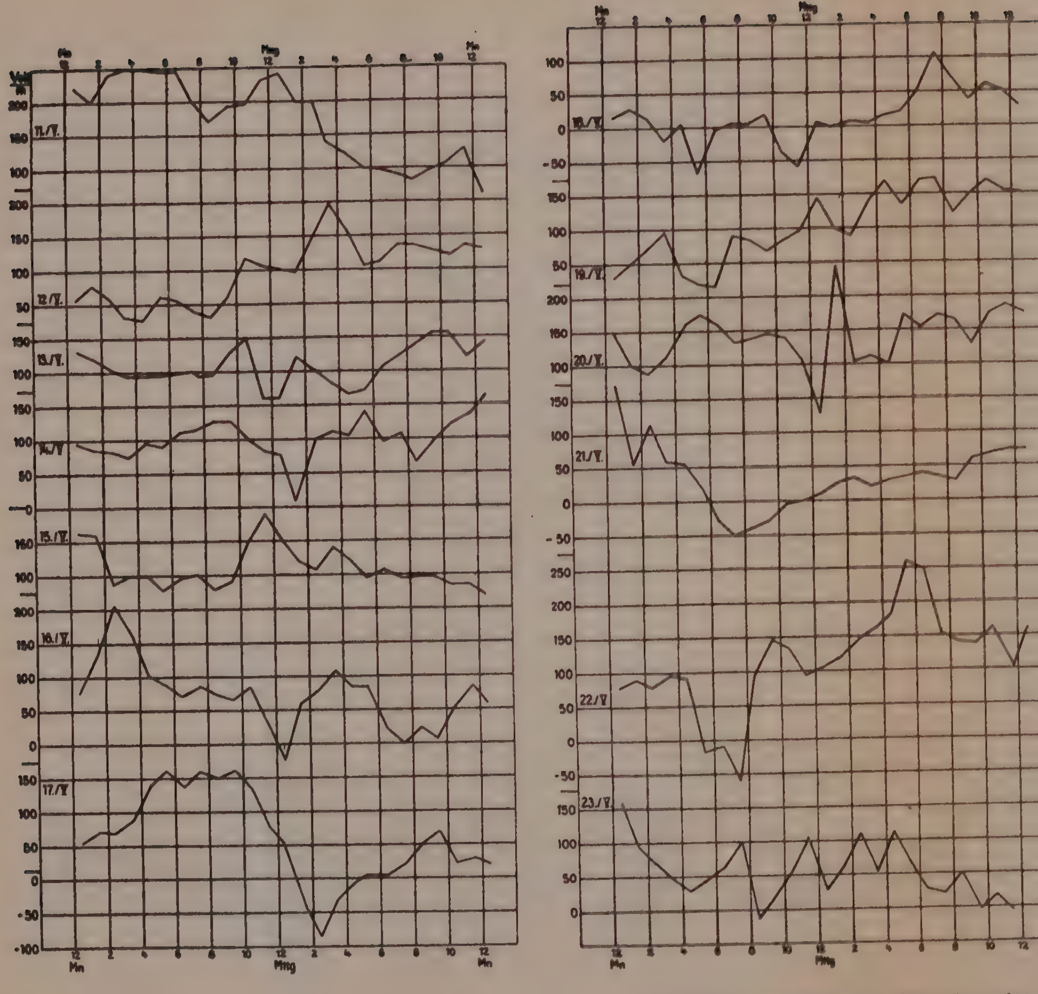
Tafel 3. Gang der Horizontal-Intensität an drei charakteristischen Tagen.



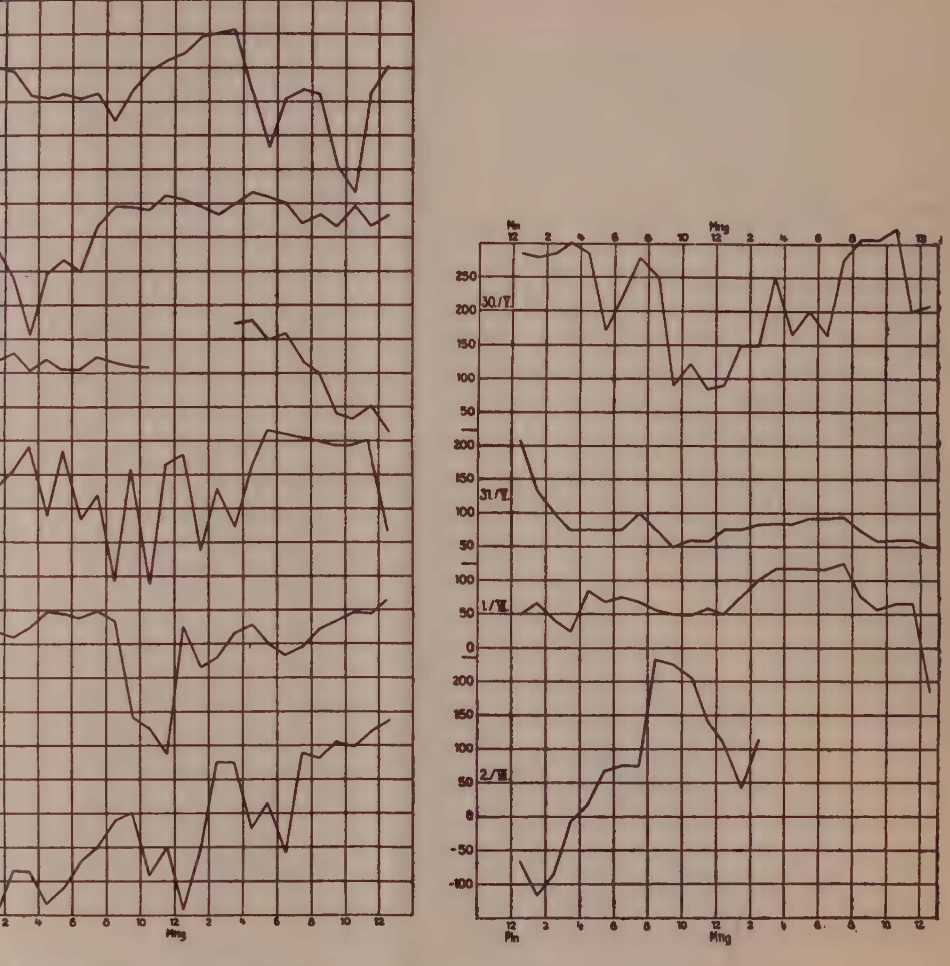
Tafel. 4. Mittelwerte über Zeitintervalle von je 24 Stunden, deren Anfangspunkte
jedesmaligen Intervalls; Island Mai 1910, für



ım je 3 Stunden auf einander folgen; eingetragen für die Zeitpunkte der Mitte des
)eklination, Horizontal- und Vertikal-Intensität.

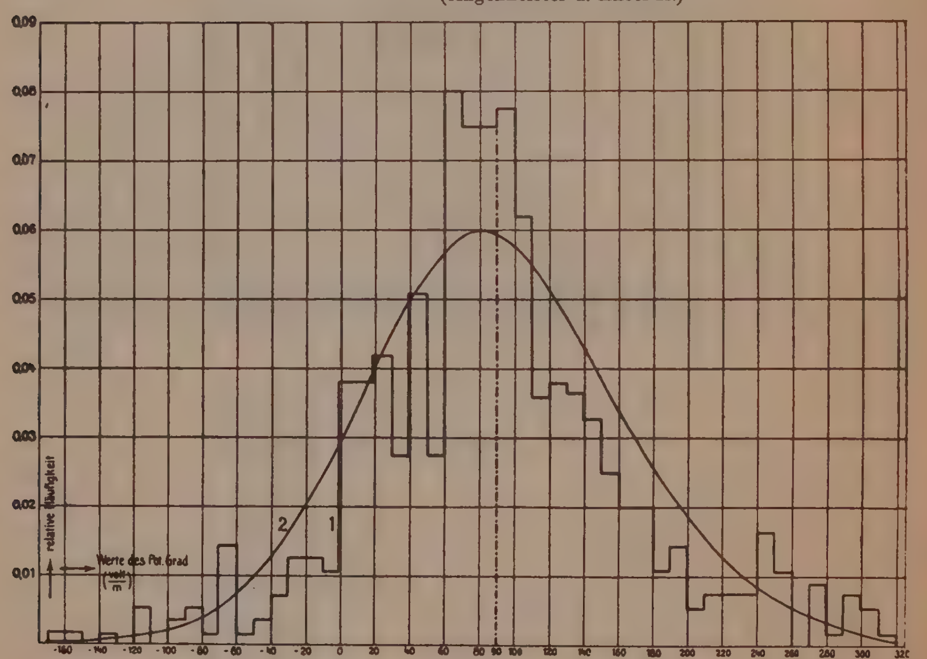


Tafel 1. Gang der Stundenmitte



ktrischen Potentialgefälles.

Nachrichten von der K. G. d. W. in Göttingen, math.-phys. Kl. 1912 Heft 1.
(Angenheister u. Ansel II.)



Tafel 2. Werte des Potentialgradienten, geordnet nach relat. Häufigkeiten.

Volt/m 300 250 200 150 100 50 0 -50

relat. Feuchtigkeit -90% -80% -70%

Temperatur 10° 9° 8° 7° 6° 5° 4° 3°

Potentialgefälle

4×10^{-4} 3×10^{-4} 2×10^{-4} 1×10^{-4} E.S.E.

$\lambda_{+}+\lambda_{-}$ λ_{+} λ_{-}

Zeit

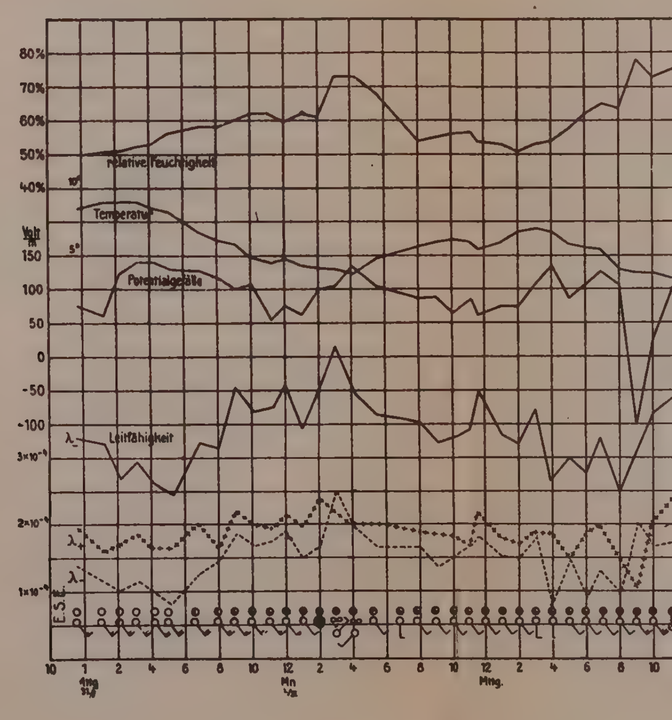
12 Mng. 18/V. 2 4 6 8 10 12 Mn. 19/V. 2 4 6 8 10 12 Mng. 2 4 6 8 10 12 Mn. 20/V. 2 4 6 8 10

Zeichen-Erklärung:

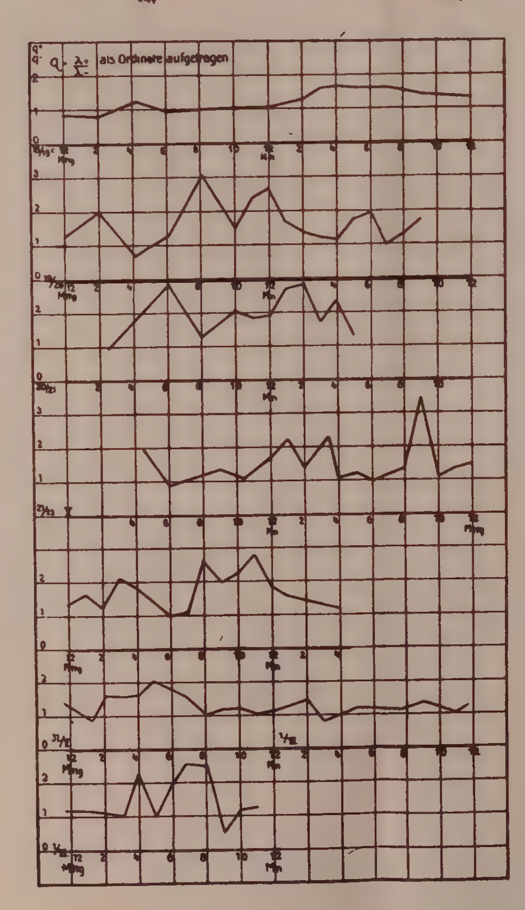
- ● = bedeckt
- ◔ ◑ ◕ = ¼ · ½ · ¾ bedeckt
- ○ = klar
- · = Regen
- ■ = Nebel ∞ = Dunst
- ∾ = Tau
- = Windstärke in ½ Beaufort-Skale (NW 3)
- ++++ = λ_{+} Leitfähigkeit
- ---- = λ_{-}

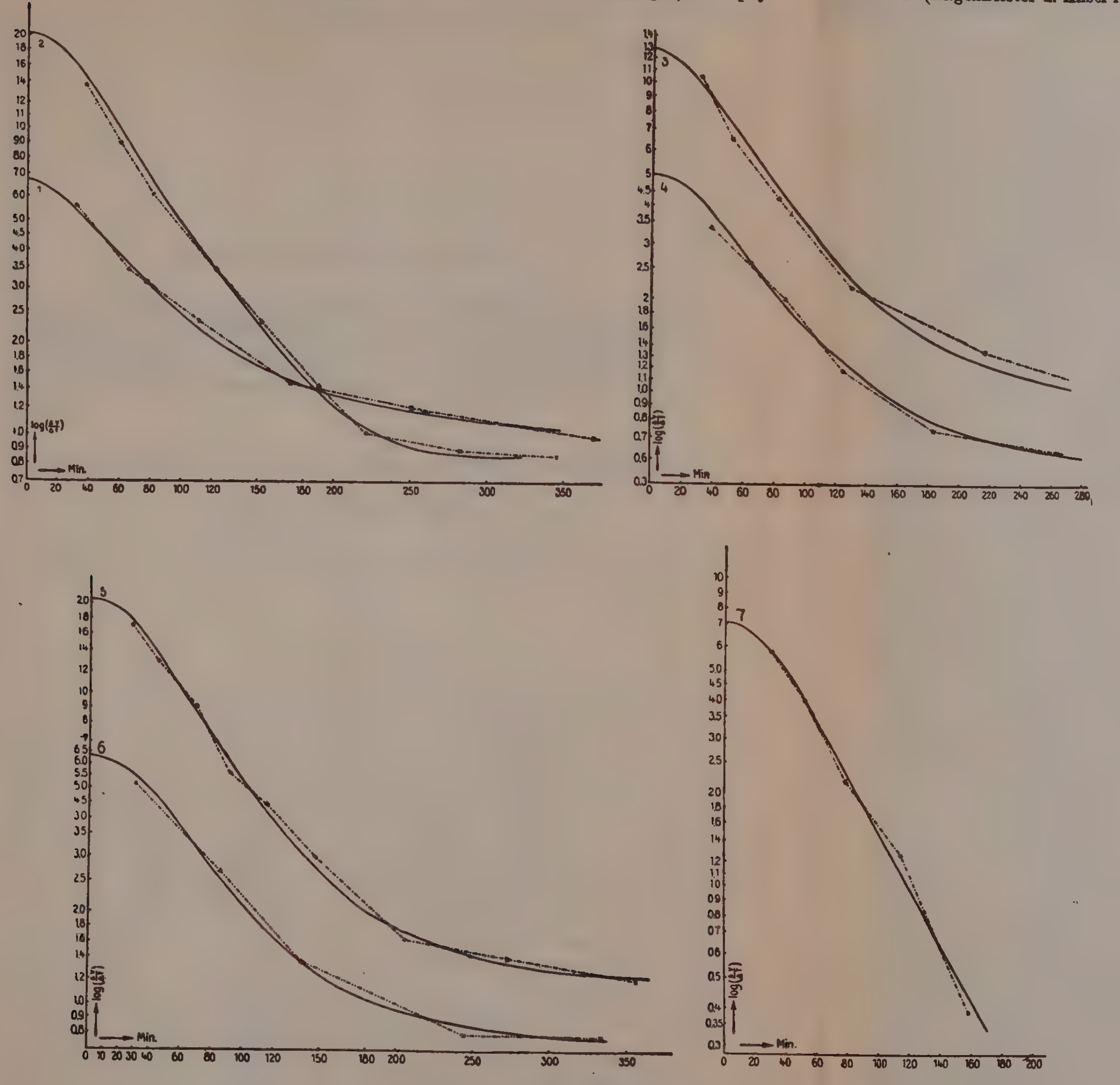
Beide sind in absol. Mass angegeben

Massstab: 2 cm = 1×10^{-4} E.S.E.



relative Feuchtigkeit
Temperatur
Potentialgefälle
E.S.E.
Leitfähigkeit
relative Feuchtigkeit
Temperatur
Potentialgefälle
Leitfähigkeit
Mn
Mn
Mttg
Mn





Tafel 4. Abklingungskurven.

Ueber Erdbebenwellen.

V. Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus dem Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten longitudinalen Erdbebenwellen, und einige andere Beobachtungen über Erdbebenwellen.

Von

Karl Zoeppritz †, Ludwig Geiger und Beno Gutenberg.

Mit 20 Figuren und einem Vorwort von E. Wiechert.

Vorgelegt von E. Wiechert im Teil A in der Sitzung vom 7. März 1908, im Ganzen in der Sitzung vom 29. Juli 1911.

Vorwort.

(Von E. Wiechert.)

Karl Zoeppritz wurde geboren in Mergelstetten (Württemberg) am 22. Oktober 1881. Er studierte teils in Freiburg teils in München und bestand im Jahr 1905 in Freiburg das Doktorexamen als Geologe, im Jahr 1906 in Karlsruhe das badische Oberlehrerexamen. In der letzten Zeit des Studiums machte er sich mehr mit der Physik und Geophysik vertraut. 1906 siedelte er nach Göttingen über, wurde im Sommer dieses Jahres Assistent am geophysikalischen Institut der Universität und so mein lieber Mitarbeiter. Es lag ihm die Bearbeitung der Erdbebenregistrierungen ob; schnell fand er sich hinein und schon im Herbst begannen unsere gemeinschaftlichen Arbeiten über die Laufzeitfunktionen und ihre Verwertung zur Erforschung des Erdinnern. Im Winterhalbjahr 1907/08 beschäftigten ihn die sehr weitgedehnten Rechnungen der Arbeit, die im Folgenden veröffentlicht wird. Aber schon um die Jahreswende machte sich die Infektions-Krankheit — damals noch unerkannt — bemerkbar, die im Frühjahr überwältigend hervortrat und ihn am 20. Juli 1908

im Alter von noch nicht 27 Jahren dahinraffte. Mit äußerster Anspannung setzte er seine wissenschaftliche Tätigkeit unter den Fittigen des Todes fort, in bewundernswerter Energie jede Minute verwertend, die dem Siechtum abgerungen werden konnte.

Es war ihm nicht vergönnt, die Arbeit ganz zu vollenden. Zwar ist ein großer Teil der Rechnungen ausgeführt, jedoch mit Lücken, ohne Kontrollen, noch ungeeignet für die Veröffentlichung. Aber das sind Dinge, die nachgeholt werden konnten, es gelang jedenfalls, die Hauptresultate zu gewinnen und in einem für den Druck geeigneten Manuskript darzustellen, das seine junge Gattin niederschrieb. Dieses Manuskript legte ich der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften am 7. März 1908 vor. Es ist im Folgenden bis auf ganz wenige unwesentliche redaktionelle Aenderungen abgedruckt. Hier und da habe ich einige Sätze ausgelassen, die ohne Bedeutung sind und sich auf Bezeichnungen etc. beziehen. Die betreffenden Stellen sind dann durch Punkte: . . . gekennzeichnet. Da ich sachlich keine Aenderung für erlaubt hielt, ist auch ein kleiner Fehler nicht ausgemerzt worden, der in den mathematischen Ueberlegungen noch geblieben war, der aber glücklicher Weise keinen merklichen Schaden getan hat. (S. 127, Anmerkung.) Ich hatte auch Veranlassung an einer anderen Stelle der Arbeit, eine sachliche Ergänzung einzufügen. (S. 142, Anmerkung.)

Da der mathematische Teil der Zoeppritzschen Arbeit unvollendet war, ergab sich für die Veröffentlichung eine große Schwierigkeit. Es mußten alle Formeln von neuem abgeleitet werden, alle Zahlenrechnungen wiederholt werden. Dieser Aufgabe haben sich die Herren Doktoren L. Geiger und B. Gutenberg in hingebender Weise unterzogen. B. Gutenberg übernahm die Bearbeitung der Formeln, L. Geiger die Bearbeitung des Beobachtungsmaterials und beide gemeinsam führten die Neurechnungen aus. Hierbei gingen die Bearbeiter im Sinne von Dr. Zoeppritz einen Schritt weiter, indem L. Geiger nicht nur das verhältnismäßig kleine Beobachtungsmaterial verwertete, das Dr. Zoeppritz zur Verfügung stand, sondern auch das weit vergrößerte Material, welches den späteren Jahren zu danken ist. Dadurch ist es möglich gewesen, der von Zoeppritz erdachten Methode zur Erforschung des Erdinnern schon jetzt eine sehr vergrößerte Bedeutung zu geben, und es gewinnen zugleich die Arbeiten von Geiger und Gutenberg einen selbständigen Wert. —

Tragisch ist das Geschick des jungen Gelehrten, der mit hoher Begabung unermüdlichen Fleiß und eiserne Zähigkeit verband. Ganz wollte er sich der Wissenschaft hingeben, der er sicher noch große

Dienste geleistet haben würde, und mußte doch die eben begonnene Arbeit schon wieder verlassen! — Das Geophysikalische Institut verlor in ihm einen treuen Mitarbeiter von herzgewinnender Persönlichkeit.

A. Ueber die Amplitude der sogenannten ersten Vorläufer in Erdbebendiagrammen und über einige Beobachtungen an Erdbebenwellen.

(Von K. Zoeppritz †.)
(Redigiert von E. Wiechert.)

I. Ueber die Amplitude der direkt kommenden und der einmal an der Erdoberfläche reflektierten Longitudinalwellen.

§ 1. Eine neue Methode zur Feststellung des Weges der Erdbebenstrahlen im Innern der Erde.

Vor kurzem hat E. Wiechert[1]) eine Methode angegeben, um bei gegebener Laufzeitkurve die Geschwindigkeit elastischer Wellen in verschiedenen Tiefen der Erde zu berechnen. Auf Grund eines bis zu nicht sehr großen Entfernungen reichenden Beobachtungsmaterials haben E. Wiechert und ich nach dieser Methode zunächst das Resultat gefunden, daß die Geschwindigkeit der Dilatations- wie der dilatationsfreien Wellen von der Erdoberfläche aus nach der Tiefe zu schnell wächst, daß dieses schnelle Anwachsen aber in einer Tiefe von ca. 1500 km plötzlich aufhört. Wir haben in der zitierten Arbeit zunächst mit konstanter Geschwindigkeit für größere Tiefen als die erwähnten 1500 km gerechnet. Auf Grund eines zu größeren Entfernungen reichenden Beobachtungsmaterials konnten wir alsdann in einem Nachtrag[2]) zu der oben zitierten Arbeit das Resultat aufstellen, daß jenseits 1500 km die Geschwindigkeitszunahme, wenigstens für die Dilatationswellen, nicht nur aufhört, sondern sogar in eine Geschwindigkeitsabnahme übergeht.

Bei dem Versuch, den genaueren Verlauf dieser Geschwindigkeitsabnahme klarzulegen, ergibt sich nun folgende Schwierigkeit: Es zeigt sich, daß die Laufzeitkurve für weite Entfernungen mit

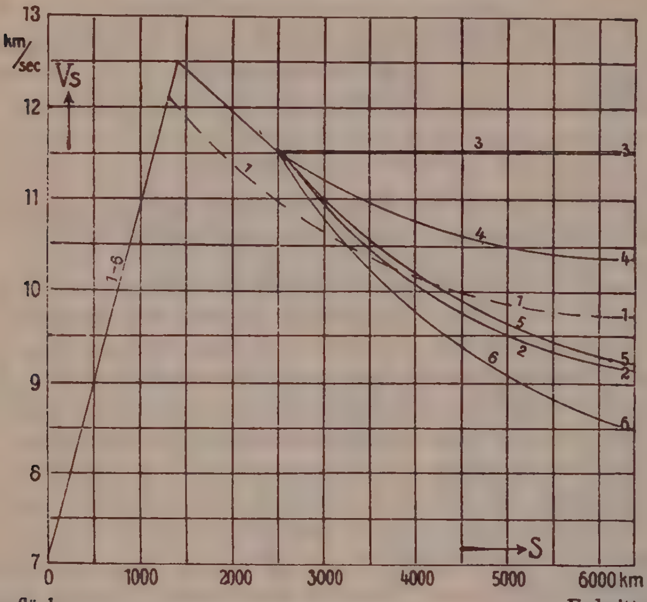
---

1) „Ueber Erdbebenwellen" I, diese Nachrichten 1907, S. 415.

2) Der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen berichtet am 28. Juli 1907; Vergl. die eben zitierte Arbeit, Anmerkung auf S. 508 (Separatabzüge S. 94), ferner den Bericht auf der Naturforscher-Versammlung 1907, Phys. Zeitschrift, 9, 1908, S. 36.

großer Schärfe, d. h. auf etwa 1 Sekunde bekannt sein müßte, damit man den genauen Geschwindigkeitsverlauf in größeren Tiefen der Erde durch Rechnung daraus ableiten könnte. Um dies zu zeigen gebe ich in der unten stehenden Figur und in Tabelle 1

Geschwindigkeit (V_s) der longitudinalen Wellen im Erdinnern in ihrer Abhängigkeit von der Tiefe (S) unter der Erdoberfläche.



Erdoberfläche. Erdmittelpunkt.

einige verschiedene Arten der Geschwindigkeitsverteilung in größeren Tiefen und die daraus folgenden Laufzeitkurven, darunter, unter „1", die in dem erwähnten Nachtrag aufgestellte. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Laufzeitkurven sind so gering, daß auf Grund des heute vorliegenden Beobachtungsmaterials es nicht zu entscheiden ist, ob eine und welche der angegebenen Geschwindigkeitskurven oder etwa noch eine weitere, den gezeichneten ähnliche Kurve die wahren Verhältnisse im Erdinnern wiedergibt. Es wird auffällig erscheinen, daß bei den Kurven Nr. 2—6 noch ein Knick in der Geschwindigkeitsabnahme in etwa 2500 km Tiefe gezeichnet ist. Warum ein solcher Knick angenommen ist, wird weiter unten dargelegt werden. Vorläufig merken wir das Resultat an, daß der Unterschied zwischen Geschwindigkeitskurve 1 und 2 in der Laufzeit sich nur in der Differenz weniger Sekunden äußert, also vorläufig noch ganz im Bereich der Beob-

achtungsfehler liegt. Es erhebt sich somit die Frage: geben uns die Erdbebendiagramme kein anderes Mittel als die Laufzeit an die Hand, um zu etwas sichereren Schlüssen über die elastischen Verhältnisse gerade in größeren Tiefen zu gelangen? Die Ant-

Tabelle 1. Laufzeitfunktionen für die 1. Vorläufer[1]).

Entfernung in 10^3 km	Göttinger Laufzeit-Funktionen			Zoeppritzsche Annahmen					
	1906 Wiechert-Zoeppritz sec.	1911^{I} Geiger-Gutenberg sec.	1911^{II} K.Wegener sec.	1. sec.	2. sec.	3. sec.	4. sec.	5. sec.	6. sec.
1	136	136	136	136	136	136	136	136	136
2	257	257	258	257	257	257	257	257	257
3	358	358	358	358	358	358	358	358	358
4	442	442	442	441	441	441	441	441	441
5	512	512	518	510	510	510	510	510	510
6	572	579	586	573	573	573	573	573	573
7	631	643	650	640	636	636	636	636	636
8	688	702	700	704	698	698	698	698	698
9	743	750	750	768	760	760	760	760	760
10	795	797	802	830	820	820	820	820	820
11	844		848	890	878	878	878	878	878
12	888		888	949	935	935	935	935	935
13	929			1006	989	989	989	989	989
14				1059	1043	1035	1041	1043	1043
15				1107	1096	1073	1087	1095	1096
16				1148	1145	1103	1127	1144	1147
17					1191	1127	1158	1188	1196
18					1230	1144	1183	1226	1239
19					1257	1155	1198	1253	1275
20					1268	1159	1204	1264	1292

wort lautet befriedigend: die Vergleichung der Amplituden der verschiedenen Welleneinsätze derselben Station und verschiedener Stationen liefert in der Tat, wie ich zeigen will, einigen Anhalt zur Beantwortung der eben aufgeworfenen Frage.

Um die Amplituden der Vorläufereinsätze überhaupt wirksam miteinander vergleichen zu können, sind gewisse Ueberlegungen vorauszuschicken, auf die ich jetzt eingehen will. Ich beschränke

---

1) [Die von Zoeppritz gegebene Tabelle umfaßt nur die Zahlen der Rubriken 1—6; es entsprechen dem die in der Figur dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen. Die Rubrik 1 kennzeichnet einen ersten Versuch, die Laufzeitfunktion, welche Zoeppritz und ich 1906 aufstellten, so zu modifizieren, daß die Samoa-Beobachtungen über Tongabeben eingeordnet werden. — Die Rubriken unter der Ueberschrift „Göttinger-Laufzeit-Funktionen" sind von mir zugefügt worden. E. Wiechert.]

mich im Folgenden auf die Betrachtung der Dilatationswellen, also der ersten Vorläuferwellen. Auch sind eine Reihe von Vernachlässigungen gemacht, die den Ergebnissen den quantitativen Charakter nehmen. Doch sind die zu erwartenden Intensitätsunterschiede so bedeutend, daß die Resultate durch diese Vernachlässigungen nicht allzusehr beeinflußt werden. Die Voraussetzungen der Berechnung sind folgende: Ich denke mir den Erdbebenherd in der Erdoberfläche liegend. Die unmittelbare Nähe des Herdes schließe ich von der Betrachtung aus. Ich denke mir um den Herd als Mittelpunkt eine Kugel, von der die eine Hälfte durch die Erdoberfläche abgeschnitten ist. Der Ausgangspunkt meiner Berechnung ist der, daß ich annehme, durch jedes cm^2 dieser Halbkugel trete der gleiche Betrag elastischer Wellenenergie nach außen hindurch. Schon dagegen wird sich manches einwenden lassen. Je nach dem individuellen Verlauf eines Bebens ist möglicherweise der nach verschiedenen Richtungen ausgestrahlte Energiebetrag durchaus nicht derselbe. Doch existieren noch keine zuverlässigen Messungen über die Größe dieses Unterschieds. Wir sind deshalb genötigt, besonders auch, wenn nähere Kenntnis des Bebenverlaufs mangelt, von den Unterschieden nach verschiedenen Richtungen abzusehen.

Weiter vernachlässige ich auch die Absorption auf dem Weg des Erdbebenstrahls. Diese wird sich späterhin wohl unschwer in Rechnung ziehen lassen, doch fehlen über die Größe der Absorption in verschiedenen Tiefen des Erdinneren noch alle Messungen, und es scheint auch durchaus nicht erlaubt, den von Angenheister für Oberflächenwellen gefundenen Wert auf die Dilatationswellen anzuwenden. Der Einfluß der Absorption wird sich im ganzen in der Weise geltend machen, daß unsere, ohne Berücksichtigung der Absorption berechneten Werte für große Entfernungen etwas zu groß ausfallen. Als weitere Voraussetzung nehme ich an, daß die Reflexion an der Erdoberfläche so erfolgt, als ob sie gegen den leeren Raum stattfände und als ob die Oberfläche vollständig eben wäre. Ich sehe also von Unregelmäßigkeiten ab, die für die reflektierten Wellenarten durch Unebenheiten der Oberfläche an der Reflexionsstelle zweifellos verursacht werden. Der Einfluß solcher Unebenheiten entzieht sich zur Zeit noch gänzlich der Berechnung, wird sich jedoch im allgemeinen in einer Art diffuser Zerstreuung der Wellenenergie, also in einer Schwächung der reflektierten Wellenarten äußern.

Unter den gemachten vereinfachenden Voraussetzungen kann man nun die in jeder Herdentfernung zu erwartenden Amplituden

der Dilatationswellen zu berechnen in folgender Weise vorgehen: Wir teilen die oben erwähnte Halbkugel in inhaltsgleiche Zonen, deren Mittelpunkte auf dem zur Erdoberfläche senkrechten Radius liegen. Um diesen Radius herrscht natürlich Rotationssymmetrie. Durch jede dieser inhaltsgleichen Zonen wird der gleiche Betrag an Wellenenergie ausgestrahlt. Wir haben uns zu fragen, auf welche Zone der Erdoberfläche verbreitet sich schließlich die durch eine jede inhaltsgleiche Halbkugelzone ausgetretene Energiemenge? Dann verhalten sich die Energien an der Oberfläche offenbar umgekehrt wie die erreichten Zonen der Erdoberfläche, die Amplituden also umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus diesen Zonen[1]). Ich messe jedoch mit einem Horizontal- bezw. einem Vertikalseismographen nicht die Amplitude der einfallenden Welle in der Richtung der Wellennormale, sondern die Horizontal- bezw. Vertikalverrückungen, die die Erdoberfläche beim Einfall und der gleichzeitigen Reflexion einer Dilatationswelle erfährt. Ich habe also die Amplitudenverhältnisse der einfallenden Wellen noch mit den entsprechenden Faktoren zu multiplizieren, die den Uebergang von der Amplitude der einfallenden Welle zur Größe der Oberflächenverrückung angeben. Diese Faktoren sowohl wie die Bestimmung der Größe der Erdzone setzen die Kenntnis der Sinus i-Kurve mithin auch der Laufzeitkurve schon voraus.

Wir werden also eine bestimmte Laufzeitkurve und entsprechend eine Sinus i-Kurve zugrunde legen, werden mit dieser die zu erwartenden Amplitudenverhältnisse berechnen. Die so erhaltenen Werte haben wir mit den Beobachtungswerten zu vergleichen und können nun rückwärts so schließen: Wenn für gewisse Entfernungen die berechneten und die gemessenen Amplituden sehr stark, d. h. etwa um das Mehrfache ihres Betrages von dem zu erwartenden Betrag abweichen, so muß die Sinus i-Kurve und entsprechend die Laufzeitkurve in diesem Bereich etwas andere Gestalt haben als wir sie der Rechnung zugrunde gelegt haben.

§ 2. Methode der Amplitudenberechnung.

Die hauptsächlichsten Vernachlässigungen der Berechnung waren oben schon auseinandergesetzt. Wir waren von der An-

1) [Diese Formulierung ist nicht zutreffend, und es sind daraus Rechenfehler entstanden, die aber glücklicherweise wenig bedeutungsvoll waren. Nicht die Größe der Zonen auf der Erdoberfläche sondern die Größe der Zonen auf den Wellenflächen ist entscheidend. Es sind also die Projektionen der Zonen der Erdoberfläche auf die Wellenflächen zu benutzen, was einer Multiplikation des an der Erdoberfläche gemessenen Flächeninhalts mit $\cos i$ entspricht. —
E. Wiechert.]

nahme ausgegangen, daß durch inhaltsgleiche Zonen unserer Halbkugel um den Herd gleiche Energiebeträge hinausgestrahlt würden, und fragen uns nun, wie groß ist die Zone Z der Erdoberfläche, auf die sich die durch eine Halbkugelzone z ausgetretene Energie verbreitet. Ich bezeichne den Winkel am Herd zwischen dem Erdradius und der Richtung des Strahles mit i. Dieser Winkel ist derselbe, wie der Einfallswinkel des Erdbebenstrahls beim Wiederauftauchen an der Erdoberfläche. Der Inhalt der zu i_1 und i_2 gehörigen Zone z beträgt dann $2\pi r^2 \times (\cos i_1 - \cos i_2)$, d. h. um inhaltsgleiche Zonen auf unserer Halbkugel zu erhalten, brauchen wir der Differenz $(\cos i_1 - \cos i_2)$ nur stets gleiche Werte zu geben. Gehen wir zur zugeordneten Zone Z über, so haben wir unserer Sinus i-Kurve zu entnehmen, welche Oberflächenentfernung Δ_1 zu dem Werte i_1 und welche Δ_2 zu dem Werte i_2 gehört. Die Breite der Zone Z ist dann $= \Delta_2 - \Delta_1$. Um den Inhalt der Zone Z zu finden habe ich weiter zu beachten, daß gleich breite Zonen sich verhalten wie $\sin\omega$, wo ω der Winkel zwischen den Erdradien ist, welche zum Herd und zur Mitte der Zone Z gehören. Man findet mithin den Inhalt der Zone Z in willkürlichem, aber für alle Entfernungen gleichem Maße und in genügender Annäherung:

$$Z = (\Delta_2 - \Delta_1) \times \sin\omega.$$

Umgekehrt wie die so erhaltenen Größen verhält sich die Energie der einfallenden Dilatationswellen[1]). Ziehen wir also aus den gefundenen Werten die Quadratwurzel, so bekommen wir Zahlen, die sich verhalten wie die reziproken Amplituden der einfallenden Longitudinalwellen. Aus diesen Größen haben wir schließlich noch die Verhältnisse der Horizontal- bezw. Vertikalverrückung der Erdoberfläche herzuleiten, denn diese Größen sind es, die wir mit unsern Seismographen messen. ...

In ganz ähnlicher Weise lassen sich bei vorgelegter Sinus i-Kurve die zu erwartenden Verhältnisse der Horizontal- und Vertikalverrückungen der einmal an der Erdoberfläche reflektierten Longitudinalwellen berechnen. Wie bei den direkten Wellen verhalten sich die Energien umgekehrt wie die Flächen der Kugelzonen, auf die sich die zum zweiten Mal aus der Tiefe auftauchenden Wellen verbreiten. ... Dabei haben wir jedoch noch nicht berücksichtigt, daß die Wellen bei der Reflexion einen mit der Entfernung wechselnden Teil ihrer Energie als Transversal-

---

1) [Gemäß der zum vorigen Paragraphen gemachten Anmerkung ist $(\Delta_2 - \Delta_1) \sin\omega$ zu ersetzen durch $Z \cos i = (\Delta_2 - \Delta_1) \sin\omega \cos i$. —
E. Wiechert.]

welle weiterschicken. Wir haben also die Amplituden noch mit einem für die Reflexionsstelle, also für die halbe Entfernung maßgebenden Schwächungsfaktor zu multiplizieren. . . . In solcher Weise lassen sich bei jeder vorgelegten Sinus i-Kurve die zu erwartenden Horizontal- und Vertikalverrückungen für den direkten, wie für den einmal reflektierten Welleneinsatz berechnen. Will man nicht Diagramme verschiedener Stationen und verschiedener Herdentfernung vergleichen, sondern die Aufzeichnung eines einzelnen Seismographen, so ist es bequemer, das Verhältnis der Horizontalverrückung bei der direkten Welle zu derjenigen bei der einmal reflektierten Welle zu berechnen. (Entsprechendes gilt für die Vertikalverrückung.)

§ 3. Resultate der Rechnung.

Der wirklichen Amplitudenberechnung habe ich verschiedene Sinus i-Kurven zugrunde gelegt. Jeder einzelnen Sinus i-Kurve ordnet sich eine bestimmte Laufzeitkurve, eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung im Erdinnern und schließlich nach unsern Rechnungen eine bestimmte Amplitudenkurve zu. Ich gebrauche im folgenden der Kürze halber den Ausdruck Amplitudenkurve. Gemeint ist natürlich eine Kurve, die die Größe der Horizontal- bezw. Vertikalverrückung beim direkten oder einmal reflektierten Welleneinsatz in Abhängigkeit von der Herdentfernung angibt. Ausdrücke wie direkte Horizontalamplitudenkurve sind danach ohne weiteres verständlich. Als Einheit für alle Bodenverrückungen ist die Amplitude der direkten Welle, gemessen in der Richtung der Wellennormale, bei einer Herdentfernung von 1000 km ($\Delta = 1$ Megameter) und zwar für den gleich noch zu besprechenden Fall 1 gewählt. Die Kurven, die das Verhältnis der Horizontal- bezw. Vertikalverrückung des direkten Welleneinsatzes zu der des einmal reflektierten, ebenfalls in Abhängigkeit von der Herdentfernung angeben, seien Vergleichskurven genannt. . . .

Ich stelle zunächst Amplituden und Vergleichskurven, wie sie bei homogener Erde zu erwarten sind gegenüber den entsprechenden Kurven, wie sie bei der Annahme 1 resultieren. (Siehe Figur und Tabelle 1, Seite 124, 125). Die zur Annahme 1 gehörige Geschwindigkeitsverteilung im Erdinnern bedeutet in einer äußeren Mantelschicht eine starke Geschwindigkeitszunahme nach einem einheitlichen, nahezu linearen Gesetz und im Kern eine ähnliche Geschwindigkeitsabnahme. Bei homogener Erde überwiegt von $\Delta = 2$ bis zum Gegenpunkt $\Delta = 20$ dauernd die direkte Welle

im Horizontal- wie im Vertikalseismometer die einmal reflektierte Welle. Dieses Resultat weicht durchaus ab von dem, was uns die Seismogramme lehren. Hier ist nämlich gerade umgekehrt innerhalb eines ziemlich weiten Entfernungsbereichs der reflektierte Einsatz der stärkere.

Dieses überraschende Resultat müssen wir aber gerade erwarten, wenn wir die oben skizzierte Annahme 1 unserer Berechnung der Amplituden- und Vergleichskurven zugrunde legen. Fassen wir die Amplitudenkurven, die sich bei Annahme 1 ergeben, näher ins Auge, so ist zunächst der Abfall der direkten Amplitudenkurven bei $\varDelta = 5$ Megameter bemerkenswert. Dieser Abfall ist bedingt durch die plötzliche Aenderung in der Steigung der Sinus i-Kurve bei $\varDelta = 5$ Megameter und ist charakteristisch für die Herdentfernung, die die Grenze bildet zwischen Stoßstrahlen, die noch nicht in den inneren Erdkern eindringen und solchen, die dies tun. Da die reflektierten Welleneinsätze an dieser Stelle keinen Abfall erleiden, so überwiegt von dieser Herdentfernung ab auf einen weiten Entfernungsbereich der reflektierte Welleneinsatz den direkten und zwar in Horizontal- wie in Vertikalseismometer. Wie später unter „Beobachtungsmaterial“ näher dargelegt werden wird überwiegt in der Tat von $\varDelta = 4{,}5$ an der reflektierte Einsatz den direkten bei Horizontal- und Vertikalseismograph. Wir haben hierin einen Beweis zu erblicken, daß die zugrunde gelegte Sinus i-Kurve 1 im großen und ganzen den wirklichen Verhältnissen entspricht.

Daraus folgt aber weiter, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Erdinnern ebenfalls im allgemeinen den in Kurve 1 dargestellten Verlauf hat. Die Kurve 1 wurde allein aus Laufzeitbeobachtungen gewonnen. Die Frage ist, ob uns die Betrachtung der Amplitudenverhältnisse nicht noch weiter zu führen vermag als die Zeitbeobachtung. Der Beobachtung zugänglich sind vorläufig einerseits Laufzeiten, andrerseits unsere Vergleichskurve. Auch die Amplitudenkurven werden sich bei weiterer Verbreitung messender Seismographen experimentell nachprüfen lassen. Die Sinus i-Kurve dagegen ist, bis jetzt wenigstens, nur sekundär aus der Laufzeitkurve hergeleitet. Nun äußert sich die Grenze des inneren Erdkerns in der Laufzeitkurve durch eine plötzliche Krümmungsänderung, in der Sinus i-Kurve durch eine Aenderung der Steigung, in unserer Vergleichskurve dagegen durch einen bedeutenden Sprung in der Ordinate selbst. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Stelle einer Krümmungsänderung bei einer Kurve, die durch einzelne, mit unvermeidlichen Fehlern behaftete

Beobachtungspunkte gegeben ist, sich viel weniger scharf bestimmen läßt als die Herdentfernung, bei deren Ueberschreitung auf einmal in den Diagrammen die reflektierte Welle sehr stark und überragend gegenüber der direkten Welle hervortritt. Es wird sich wohl mit Leichtigkeit diese kritische Herdentfernung ermitteln lassen. Damit ist alsdann mit hinreichender Genauigkeit die Herddistanz gefunden, von der an die vorher steil herabfallende Sinus i-Kurve einen nahezu horizontalen Verlauf annimmt. Mit der so gefundenen Entfernung wird sich eine genauere Berechnung der Tiefe vornehmen lassen, in der der innere Erdkern seine Grenzen hat.

§ 4. Vergleichskurven, angewandt auf grössere Herdentfernungen.

Verfolgen wir unsere auf der Annahme 1 (Tabelle 1, Seite 125) basierenden Amplituden- bezw. Vergleichskurven zu größeren Entfernungen, so überwiegt von $\varDelta = 10$ Megametern an wieder der direkte Welleneinsatz den der reflektierten Welle. Hier macht sich nämlich bei den reflektierten Wellen derselbe Intensitätsabfall geltend, den wir vorhin bei der direkten Welle, bei $\varDelta = 5$ Megametern kennen gelernt haben. Da in Wirklichkeit der reflektierte Einsatz schon von $\varDelta = 4{,}5$ Megametern an der stärkere ist, so sollte man erwarten, daß umgekehrt nun auch schon bei $\varDelta = 9$ Megameter der Intensitätsabfall sich in der Weise äußerte, daß von dieser Entfernung ab die direkte Welle wieder die stärkere wäre. Dies wird jedoch durch das Beobachtungsmaterial nicht bestätigt. Tatsächlich überwiegt, wie unten noch näher ausgeführt werden wird, in $\varDelta = 10$ Megameter der reflektierte Einsatz sehr deutlich den direkten. Wie dies zu erklären ist, wage ich zur Zeit nicht zu entscheiden. Möglicherweise hängt die Unstimmigkeit damit zusammen, daß nach unserer Annahme 1 die Geschwindigkeitszunahme im Erdmantel ganz unvermittelt in eine Geschwindigkeitsabnahme im Kern übergeht, während tatsächlich vielleicht ein mehr allmählicher Uebergang stattfindet. Besteht der Mantel, der durch Geschwindigkeitszunahme ausgezeichnet ist, aus Silikatgesteinen, der Kern mit Geschwindigkeitsabnahme im wesentlichen aus Eisen, so brauchen wir doch keine allzu scharfe Grenze zwischen Steinmantel und Metallkern zu erwarten. Kennt man doch bei Meteoriten alle Uebergänge von sog. Steinmeteoriten zu reinen Eisenmeteoriten.

Aus der Herdentfernung von 10—13 Megameter steht mir zur Zeit kein einwandfreies Beobachtungsmaterial zur Verfügung. Wohl aber konnte ich an verschiedenen Beben aus einer Herdentfernung von etwa 13—14 Megameter die Beobachtung machen, daß der erste Welleneinsatz nur äußerst schwach hervortritt. (Vergl. unten „Beobachtungsmaterial.“) Nach unserer Annahme (1) wäre indes zu erwarten, daß von $\Delta = 10$ bis zum Gegenpunkt dauernd der erste Welleneinsatz bei weitem der stärkere wäre. Ich habe deshalb noch eine zweite Annahme (2) der Amplitudenberechnung zugrunde gelegt, bei der eine Laufzeitkurve (2) resultiert, die sich nur so wenig von der Laufzeitkurve (1) unterscheidet, daß wohl noch auf lange hinaus auf Grund von Zeitbeobachtung allein beide Kurven als gleichberechtigt gelten müssen. Für die Geschwindigkeitsverteilung im Erdinneren ergibt sich die Kurve (2), die durch eine verstärkte Geschwindigkeitsabnahme in einer Tiefe von ca. 2470 km (Erdradius = 3900 km) ausgezeichnet ist. In der Amplitudenkurve aber macht sich diese Geschwindigkeitsabnahme in der Weise geltend, daß hier noch einmal für Horizontal- und Vertikalseismometer auf eine gewisse Strecke der reflektierte Einsatz den direkten überwiegt. Es soll hier durchaus nicht behauptet werden, daß die Annahme (2) die Verhältnisse in der Natur in Wirklichkeit richtig wiedergäbe. Die Absicht ist vielmehr darzutun, daß der genauere Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung im Erdkern sich allein auf Grund von Zeitbeobachtung bei dem heutigen Stand der Erdbebenbeobachtung wohl schwerlich wird mit Sicherheit ermitteln lassen, daß jedoch die Berücksichtigung der Intensität der Einsätze voraussichtlich mit Erfolg diese Lücke auszufüllen vermag. In noch größerer Herdentfernung überwiegt dann wieder der direkte Einsatz in Uebereinstimmung mit dem, was wir nach unserer Rechnung erwarten müssen.

Um zu zeigen wie gering der Einfluß der Geschwindigkeit in diesen tieferen Schichten auf die Laufzeit ist, sind noch einige weitere Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung (vergl. die Figur Seite 124) gemacht worden. Die sich dabei ergebenden Laufzeitkurven sind in Tabelle 1 gekennzeichnet.

II. Beobachtungen an Erdbebendiagrammen.

§ 5. Zwei verschiedene Arten von Erdbeben.

Es sollen im folgenden eine Anzahl von Beobachtungen an Erdbebendiagrammen mitgeteilt werden, die untereinander nur in

sofern in losem Zusammenhang stehen, als sie vielleicht dazu beitragen können, das verwickelte Bild eines Erdbebendiagramms mehr und mehr in seinen Einzelheiten zu klären. Zunächst möchte ich ausdrücklich auf einen gewissen Unterschied zwischen zwei verschiedenen Typen von Erdbeben hinweisen, von denen der erste Typus besonders geeignet ist für das Studium der Vorläuferwellen. Es sind dies Erdbeben mit einem einzigen kräftigen Einsatz. Beispiele für diesen Bebenstypus sind das Erdbeben vom 21. Januar 1906 (Herd im Meer einige 100 km von Tokio) und das Erdbeben vom 31. März 1907 (Herd in der Nähe der Tongainseln). Bei derartigen Beben treten alle Einsätze der verschiedenen Wellen, seien es nun direkt ankommende oder irgendwie reflektierte, sehr scharf hervor. Solche Beben sind deshalb zum Studium der sog. Vorläuferwellen besonders und fast allein geeignet. Die sog. Hauptwellen sind bei derartigen Beben oft überraschend klein, und es zeigt sich so aufs deutlichste, daß für die Stärke der Vorläufereinsätze einerseits, der sog. Hauptwellen eines Diagramms andrerseits, ganz verschiedene Faktoren maßgebend sind. Vermutlich ist die Sachlage die, daß besonders starke Hauptwellen nur dann zustande kommen, wenn bei der das Erdbeben hervorrufenden Zerreißung und Verschiebung von Erdschichten besonders große Massen beteiligt sind. Man wird sich etwa folgendes Bild vom Vorgang eines Bebens machen können: Gewisse deformierende Kräfte in den äußersten Erdschichten, die besonders in den von Erdbeben heimgesuchten Teilen unserer Erdoberfläche auftreten, wachsen an, bis die Festigkeit der Gesteine überschritten wird, und ein Riß erfolgt. Die Gesteinsmassen zu beiden Seiten des Risses bezw. des Rißsystems werden einer neuen Gleichgewichtslage zustreben. Die ursprünglich potentielle Energie wird sich dabei in kinetische Energie verwandeln. Allmählich wird durch Strahlung und Reibung die Energie unter mehrfachem Wechsel zwischen ihrer kinetischen und potentiellen Form aufgezehrt. In dem Ausdruck für die kinetische Energie $\frac{1}{2} mv^2$ kann entweder m oder v einen besonders großen Wert annehmen. Nur wenn m einen großen Wert hat, werden nach der hier dargelegten Vermutung langperiodige Hauptwellen kräftig erregt. Umgekehrt ist ein starker Vorläufereinsatz nur dann zu erwarten, wenn die Geschwindigkeit v im Ausdruck der kinetischen Energie besonders groß ist. Beben vom zweiten Typus, nämlich solche mit schwachem Vorläufereinsatz und starken Hauptwellen, sind z. B. das San Franzisko-Beben vom 18. April 1906 und die beiden Tongabeben vom 19. Dezember 1906 und vom 2. Januar 1907. Besonders lehr-

reich ist ein Vergleich des San Franzisko-Bebens und des Bebens am 21. Januar 1906. Bei beiden lag der Herd etwa 9000 km von den Europäischen Erdbebenstationen entfernt. Während nun der erste Einsatz in den Horizontalkomponenten am 21. Januar in den Europäischen Stationen etwa doppelt so groß war als beim San Franzisko-Beben, betrug die Maximale der Hauptwellen am 21. Januar nur etwa den fünfzigsten Teil derjenigen vom San Franzisko-Beben. Würde man also nur nach der Stärke des ersten Einsatzes urteilen, so müßte man, ausgehend vom San Franzisko-Beben beim Beben vom 21. Januar 1906 eine 100 mal so große Amplitude der Hauptwellen erwarten, als sie wirklich eingetreten ist.

Wir bemerken hier ganz außerordentliche Unterschiede, die offenbar auf den verschiedenen Vorgang der Auflösung zurückzuführen sind. Die Verschiedenheit des Auslösungsvorgangs markiert sich auch deutlich in dem Bild der ersten Vorläufer einer Station, die so weit vom Herd entfernt ist, daß die verschiedenen Einsätze sich nicht gegenseitig überlagern und so das Bild trüben. Am 21. Januar 1906 und am 31. März 1907 haben wir in gleicher Weise, sofort mit Beginn des Bebens, einen starken Maximalausschlag, von dem die Amplitude nach wenigen Schwingungen auf weniger als etwa $^1/_4$ herunter sinkt. Ganz anders beim San Franzisko-Beben und den beiden Tongabeben vom 19. Dezember 1906 und dem vom 2. Januar 1907. Hier folgen dem ersten Einsatz noch eine ganze Reihe fast ebenso starker Ausschläge, was wir etwa so deuten dürfen: Dem ersten auslösenden Ruck schließen sich weitere, bald kräftigere, bald minder kräftige Zerreißungen an, die in ihrer Gesamtheit zu riesigen Massenbewegungen und entsprechend starken Hauptwellen Anlaß geben. Es gewinnt so den Anschein, als entständen besonders kräftige Hauptwellen immer dann, wenn durch eine derartige mehrfache Auslösung allmählich besonders große Gesteinsmassen in Bewegung geraten. Nach dieser, nur mit Vorbehalt geäußerten Vermutung, kehre ich zurück zu dem, was uns die Diagramme heute schon mit Sicherheit lehren. Ich stelle im folgenden eine Reihe von Erfahrungssätzen auf, die teilweise auch schon von andern Beobachtern in ähnlicher Form ausgesprochen worden sind aber doch auch andrerseits so oft nicht beachtet werden, daß es nützlich scheint, sie mit hier anzuführen.

§ 6. Beobachtungen an Vorläuferwellen.

1. Zum Studium der Natur der verschiedenen Vorläuferwellen sind nur solche Erdbeben geeignet, die aus einem einzigen, kräftigen Stoß bestehen. Auch zum Studium der Hauptwellen sind solche Beben natürlich geeignet, doch sind die Hauptwellen bei diesem Bebentypus oft so schwach entwickelt, daß sie bei großer Herdentfernung zur exakten Messung nicht mehr geeignet sind. Ein Beispiel hierfür ist das Tongabeben vom 31. März 1907.

2. Wollen wir Aufschluß über den Verlauf des Bebenvorganges, so dürfen wir bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse über die Hauptwellen nicht diese, noch dazu, wie sie in einer weit entfernten Station auftreten, zu Rate ziehen. Das beste Bild des Bebenverlaufes liefert vielmehr, wie es scheint, die Aufzeichnung der ersten Vorläufer in einer recht weit entfernten Station. Hier stört jedenfalls am wenigsten die gegenseitige Ueberlagerung der verschiedensten Wellenarten. Auch die Frage, wie stark die Bewegung im Herd gedämpft ist, und ob dort irgend welche Eigenschwingungen erregt werden, wird am besten an Hand der Aufzeichnung der ersten Vorläufer in einer Station mit großer Herdentfernung sich entscheiden lassen. Wollte man aus der Abnahme der Schwingungen in der Phase der Hauptwellen eines Fernbebendiagramms einen Schluß ziehen auf das Abklingen der Schwingungen im Erdbebenherd, so würde man ganz verschiedene Werte für die Dämpfung dieser Schwingungen erhalten, je nach der Herdentfernung der benutzten Station. Als Beispiel hierfür möchte ich anführen, daß beim Kalabrischen Erdbeben am 8. September 1905 die Amplitude der Hauptwellen nach dem Göttinger Diagramm nach etwa 9 Minuten auf etwa $^1/_{10}$ der Maximalamplitude gesunken ist, während sie in Samoa[1]) $^1/_2$ Stunde nach dem ersten Maximum noch fast ebenso groß ist wie im Maximum selbst.

Aehnlich liegen die Verhältnisse beim Beben vom 21. Januar 1906. Nach den in Japan erhaltenen Diagrammen[2]) ist die Amplitude nach etwa 3 Minuten auf weniger als $^1/_5$ gesunken, während in Göttingen die Phase der Hauptwellen ein ganz allmähliches Anschwellen und entsprechende Abnahme zeigt. Auf ein Maximum

---

1) Herr Dr. F. Linke gestattete mir freundlichst die Einsicht in das dort erhaltene Diagramm.

2) Vergl. die Wiedergaben in Bulletin of the Imperial Earthquake Investigation Committee. Vol. 1, Nr. 3. Tokio 1907.

der Vertikalbewegung z. B. folgt etwa 3 Minuten später ein zweites, fast ebenso großes Maximum, und weitere 3 Minuten später beträgt die größte Amplitude im Vertikalseismometer noch mehr als halb soviel, sodaß man auch hier unter Berücksichtigung der Hauptwellen, wie sie in Göttingen registriert werden, auf eine ganz andere Dämpfung der Bewegung im Herd schließen müßte als unter Berücksichtigung der japanischen Aufzeichnungen. Ein richtiges Bild des Bebenvorgangs gewährt auch hier wieder, wie ich glaube, die Aufzeichnung des ersten Einsatzes einer weit entfernten Station, z. B. in Göttingen. (Vergl. die Wiedergabe des Diagramms in E. Wiechert und K. Zoeppritz „Ueber Erdbebenwellen", Tafel III.).

3. Ist der erste Einsatz eines Bebens und der in den Göttinger seismischen Wochenberichten und in dieser Arbeit mit P_{R1} bezeichnete Einsatz durch longitudinale Bewegung verursacht? Es wird heute von den meisten Seismologen angenommen, daß der erste Einsatz P durch Longitudinalwellen, die sich durchs Erdinnere fortpflanzen, verursacht wird. Die gleiche Annahme liegt der öfter zitierten Arbeit „Ueber Erdbebenwellen" zugrunde. Indessen kann sie doch noch nicht als allgemein anerkannt gelten. (Vergl. z. B. F. Omori, „Seismograms showing no preliminary tremor", in dem oben zitierten Heft.) Ich möchte deshalb den Beweis, daß es sich bei den ersten Vorläufern um Longitudinalbewegung handelt zunächst damit stützen, daß ich nochmals, wie schon wiederholt von anderen Seiten geschehen, eine Reihe neuerer Erdbeben anführe, die in Göttingen mehr oder weniger genau aus Westen oder Osten eingetroffen sind. Ist unsere Annahme richtig, so muß bei derartigen Beben die Ostwestkomponente stärkere Ausschläge zeigen als die Nordsüdkomponente. Solche Beben sind die folgenden: 4. April 1905 Indien, 15. April 1907 Chilpancingo (Mexiko), 22. Dezember 1906 Semirjetschensk, Kopal, 4. Januar 1907 Nias und Babi, 24. Oktober 1906 Chodschent, Katta-Kurgan, 21. Oktober 1907 Karatag. Bei den genannten sechs Beben ist nicht nur der Einsatz P, sondern auch der mit P_{R1} bezeichnete in der Ostwestkomponente bei weitem der stärkere.

Gerade das Umgekehrte, Ueberwiegen der Nordsüdkomponente beim Einsatz P (und P_{R1} soweit erkennbar) zeigen folgende Beben, bei denen die Bewegung aus nahezu nördlicher oder südlicher Richtung zur Göttinger Erdbebenstation gelangt ist: Kalabrische Erdbeben 8. September 1905 und 24. Oktober 1907, Nordpazifisches Erdbeben 16. August 1906 und die Tongaerdbeben 19. Dezember 1906, 2. Januar 1907 und 31. März 1907. Die Reihe dieser Beben

ließe sich noch beliebig erweitern. Wir dürfen somit zweifellos als Ursache des P- und P_{R1}-Einsatzes Longitudinalwellen annehmen, wie es ja auch die Theorie fordert[1]).

Wir können aber nun auch noch einen Schritt weiter gehen und prüfen, ob das Verhältnis der Vertikalbewegung zur Horizontalbewegung bei diesen beiden Einsätzen so groß ist, wie wir es erwarten müssen, wenn die Einsätze den direkt kommenden und den einmal an der Erdoberfläche reflektierten Longitudinalwellen entsprechen. Als Grundlage dient uns die Formel 127, die E. Wiechert in der oft zitierten Abhandlung, „Ueber Erdbebenwellen" angibt.

Tabelle 2.

Datum	Herd und Herdentfernung	Phase	Periode (Sekunden)	Horizontal-Bewegung in μ	Vertikal-Bewegung in μ	Horizontalbewegung / Vertikalbewegung beobachtet	Horizontalbewegung / Vertikalbewegung berechnet
21. I. 06	östl. Japan ca. 9200	P	5—6	19,7	42	0,47	0,44
		P_{R1}	5—6	35	55	0,64	0,62
22. XII. 06	Semirjetschensk ca. 5000	P	9	41	75	0,53	0,59
			2,5	8,6	20	0,43	
		P_{R1}	9	65	75	0,86	1,1
			2,5	5,5	4,4	1,22	
31. III. 07	Tonga-Archipel 15600	P	5	7	33	0,21	0,20
3/4. XII. 06	ca. 7200	P	3	13,7	25	0,55	0,48
		P_{R1}	4,5	5,9	6	0,98	0,82
21. X. 07	Karatag 4700	P	9—10	100	193	0,52	0,6
		P_{R1}	8—10	266	254	1,05	1,1
19. XI. 06	Westaustralien	P_{R1}	6	7,9	16	0,49	0,52
14. IX. 06	Neuguinea 13600	P_{R1}	6	2,6	4,4	0,59	0,49

1) [Die obigen Erwägungen sind zwar bedeutungsvoll aber nicht bindend, da der Fall der in der Vertikalebene schwingenden Transversalwellen hätte berücksichtigt werden müssen. E. Wiechert.]

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen dem gemessenen und dem zu erwartenden Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalbewegung, wie es in der vorletzten und letzten Spalte angegeben ist, befriedigend. Die Abweichungen liegen, wie ich glaube, durchaus in den Grenzen der Beobachtungsfehler. Da nämlich das Vertikalseismometer nur eine Schwingungsdauer von etwa 4—5 Sekunden besitzt, so ändert sich die Vergrößerung für die in Betracht kommenden Perioden der Bodenbewegung sehr stark mit der Bodenperiode. Nun läßt sich die Periodenlänge selber, besonders wenn mehrere Perioden gleichzeitig vorkommen und sich überlagern, nur schwer mit der Genauigkeit messen, die wegen des eben angedeuteten Umstandes erforderlich wäre. Alle einzelnen Erdbeben zeigen einen bedeutend größeren Wert für das Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalbewegung beim Einsatz P_{R1} als beim Einsatz P, genau wie wir es erwarten müssen.

4. Hier sollen einige Ausmessungen des Stärkeverhältnisses der beiden Einsätze P und P_{R1} im Horizontal- und Vertikalseismometer angeführt werden zur Prüfung, wie weit die Erdbebenbeobachtung in Uebereinstimmung ist mit unsern in § 3 und 4 erhaltenen Resultaten.

In der folgenden Tabelle ist, im großen und ganzen nach der Herdentfernung geordnet, dieses Verhältnis angegeben, bezw., wenn der eine Einsatz so klein ist, daß er nicht mehr deutlich als solcher hervortritt, eine untere Grenze für dieses Verhältnis.

Tabelle 3.

Datum	Herd und Herdentfernung in km	Erdbebenstation	Phase	Periode sec.	Doppelte horizontale Amplitude in μ	Doppelte Vertikalamplitude in μ	Horizontalamplituden-Verhältnis	Vertikalamplituden-Verhältnis
8. IX. 05	Calabrien 1500	Göttingen	P P_{R1}	5—10 X [1]	41 X	15 X	> 1	> 1
23. X. 07	Calabrien 1500	Göttingen	P P_{R1}	3 X	27 < 1,5	1,6 < 1	> 1,8	1,6
4. XII. 05	Herd? ca. 2900	Göttingen	P P_{R1}	5—6 X	35 < 14	32 < 9	> 2,5	3,6
21. X. 05	Batum 3100	Göttingen	P P_{R1}				> 2	2

1) Das Zeichen X bedeutet: es ist kein deutlicher Einsatz erkennbar.

Datum	Herd und Herdentfernung in km	Erdbebenstation	Phase	Periode sec.	Doppelte horizontale Amplitude in μ	Doppelte Vertikalamplitude in μ	Horizontalamplituden-Verhältnis	Vertikalamplituden-Verhältnis
21. X. 07	Karatag	Wien	*P* *P*R1	9 9—10			1/2,7	
		Graz	*P* *P*R1	9—10 9—10			1/3,9	
	4600	Göttingen	*P* *P*R1	9—10 8—10	100 266	193 254	1/2,7	1/1,3
22. XII. 06	Semirjetschensk	Göttingen	*P*	9 2,5	41 8,6	75 20	1/1,6 b. 9 S. 1,6bei 2,5 S.	1 bei 9 Sek. 4,6bei 2,5 S.
			*P*R1	9 2,5	65 5,5	75 4,4		
4. IV. 05	Indien 5680	Göttingen	*P* *P*R1				1/1,1	
26. IX. 05	Herd? ca. 5400	Göttingen	*P* *P*R1					1/1,3
23. VII. 05	Innerasien	Göttingen	*P* *P*R1	11 10	15 21		1/1,4	
9. VII. 05	Innerasien	Göttingen	*P* *P*R1					1/1,1
3/4. XII. 06	Herd? ca. 7200	Göttingen	*P* *P*R1	3 4,5	25 6	2,3	1,1	
27. VIII. 04	Rocky Mountains $\varphi = 55^0$ N, $\lambda = 120^0$ W ca. 7400	Göttingen	*P* *P*R1				> 1	
26. u. 27. VI. 04	Kamtschatka 8200	Göttingen	*P* *P*R1				> 1	
21. I. 06.	Meer südöstl. von Japan 9200	Göttingen	*P* *P*R1	5—6 5—6	19,7 35	42 55	<1/1,8	<1/1,8
4. I. 07	Nias 9500	Göttingen					ca. 1	> 1
15. IV. 07	Chilpancingo 9900	Straßburg	*P* *P*R1				1/2,3	
	9900	Göttingen	*P*	18 6	86	35	1/2,1	1,1
			*P*R1	18 6	178	33		
	10500	Graz	*P* *P*R1				1/3,5	

Datum	Herd und Herdentfernung in km	Erdbebenstation	Phase	Periode sec.	Doppelte horizontale Amplitude in μ	Doppelte Vertikalamplitude in μ	Horizontalamplituden-Verhältnis	Vertikalamplituden-Verhältnis
15. IV. 07	Chilpancingo 12600	Tiflis	P P_{R1}				} < 1	
30. VIII. 06	Tacna-Arica	Göttingen	P P_{R1}	4 4		ca. 1,8 ca. 1,8		} 1
19. XI. 06	Westaustralien	Göttingen	P P_{R1}	unmeßbar 6	 7,9	klein 16	} < 1	} < 1
14. IX. 06	Neuguinea 13600	Göttingen	P P_{R1}	unmeßbar 6	 2,6	klein 4,4	} < 1	} < 1
31. III. 07	Tonga-archipel 16500	Göttingen	P P_{R1}	5 X	9 X	3 X	} > 1	} > 7

Wie aus der Tabelle leicht zu entnehmen ist, tritt für sehr kleine und für sehr große Herdentfernungen in der Tat das ein, was wir erwarten müssen, nämlich ein bedeutendes Ueberwiegen des P-Einsatzes. Umgekehrt ist für mittlere Entfernungen, ebenfalls in Uebereinstimmung mit unseren Rechnungen, der Einsatz P_{R1} der stärkere. Während nun aber nach unserer Rechnung, wenn die Annahme 1, § 1, zugrunde gelegt wird, der P_{R1}-Einsatz erst von $\Delta = 5$ Megameter an der stärkere sein sollte, tritt dieses Ueberwiegen in der Natur schon für kleinere Entfernungen ein. Die Grenze liegt nach meinem Beobachtungsmaterial vorläufig zwischen 3000 und 4600 km Herdentfernung. Eine engere Eingrenzung der Entfernung war mir bisher aus dem rein zufälligen Grund nicht möglich, weil mir kein stärkeres Erdbeben mit scharfem Einsatz aus den letzten Jahren bekannt ist, dessen Herd etwa 3500 bis 4500 km von den europäischen Stationen entfernt war. Wir müssen daraus schließen, daß schon in geringerer Entfernung, nämlich von wo an der Einsatz P_{R1} der stärkere wird, die Longitudinalwellen beginnen, in der Tiefe in den metallischen Erdkern einzudringen, dem entsprechend müssen wir annehmen, daß auch die Laufzeitkurve schon etwas früher einen flachen Verlauf annimmt. Die kritische Herdentfernung wird sich mit weiter fortschreitender Erdbebenbeobachtung sehr genau ermitteln lassen.

Die berechnete „Vergleichskurve 1“ läßt sich, wie wir sahen, kurz etwa folgendermaßen charakterisieren: für kleine und große Herdentfernungen überwiegt der direkte Welleneinsatz, in mitt-

leren Entfernungen umgekehrt der der einmal reflektierten Wellen. Die „Vergleichskurve 2“ unterscheidet sich von ihr nur insoweit, als bei ihr in der Gegend von 13 bis 14 Megameter noch einmal der reflektierte Einsatz überwiegt. Was lehrt uns demgegenüber unser freilich noch recht lückenhaftes Beobachtungsmaterial? Ganz übereinstimmend mit der Rechnung zeigt es für kleine und sehr große Entfernungen einen stärkeren P- als P_{R1}-Einsatz. Auch die mittlere Zone mit überwiegender reflektierter Welle tritt hervor, jedoch etwas verschoben gegenüber unserer zugrunde gelegten Annahme. Sie reicht nämlich statt von 5 bis 10 Megameter von 4,5 bis gegen 7 Megameter. Von da an bis etwa 9000 ist wieder P stärker, dann aber auf ein ziemlich großes Entfernungsintervall, nämlich von etwa 9 bis gegen 14 Megameter überwiegt wieder der einmal reflektierte Einsatz. Erst für noch größere Entfernungen stimmt, wie bemerkt, die „Vergleichskurve“ mit den Beobachtungen wieder überein. Wie die Abweichungen vielleicht zu erklären sind, darauf möchte ich, solange das Beobachtungsmaterial noch so lückenhaft ist, nicht näher eingehen. Nur folgendes sei bemerkt: Die Verschiebung der ersten Zone mit überwiegendem P_{R1} Einsatz zu kleineren Herdentfernungen bedeutet wohl nur eine Korrektion an derjenigen Herdentfernung, von der an die Stoßstrahlen in den metallischen Erdkern eindringen. Dagegen weist die zweite Zone mit überwiegendem P_{R1}-Einsatz, nämlich die von 9000 bis gegen 14000 km reichende, auf gewisse Unregelmäßigkeiten der Geschwindigkeitsverteilung in tieferen Teilen des Erdkörpers hin, die aus der Laufzeitkurve sich wegen ihres zu geringen, nur noch wenigen Sekunden sich bemessenden Einflusses nicht mehr erschließen lassen.

§ 7. Beobachtungen an den sogenannten Hauptwellen.

Während wir die hauptsächlichsten Einsätze in der Gruppe der Vorläufer heute schon befriedigend zu deuten verstehen, fehlen uns in Bezug auf die Hauptwellen zur Zeit noch die erforderlichen Kenntnisse zu einer zuverlässigen Aufklärung der Besonderheiten dieser meist lang ausgedehnten Phase. Solche Kenntnisse werden sich nur durch die systematische Vergleichung der Diagramme von gedämpft schwingenden Apparaten erlangen lassen. Daß in der Phase der Hauptwellen auch die von Rayleigh als möglich erwiesenen sog. Rayleighschen Oberflächenwellen eine Rolle spielen, scheint nicht zweifelhaft, allein genauere Untersuchungen über diesen Gegenstand stehen noch aus. Bekanntlich bestehen die Rayleighwellen aus elliptischen Schwingungen und zwar in der Ebene, die durch die Vertikale und die Verbindungslinie Herd-

Station festgelegt ist. Man kann deshalb versuchen, in allen Diagrammen für das Maximum der Vertikalbewegung in der Phase der Hauptwellen eine Laufzeitkurve aufzustellen. Ist die Vermutung richtig, daß wir es hierbei mit wahren Oberflächenwellen zu tun haben, so muß die Laufzeitkurve eine Gerade darstellen, die rückwärts verlängert durch den Nullpunkt geht. Soweit meine Beobachtungen gehen, ist dies in der Tat einigermaßen der Fall. Es ergibt sich gleichzeitig, daß die Geschwindigkeit, mit der das Maximum der Vertikalbewegung längs der Erdoberfläche weiterschreitet, 2,9 km/sec. beträgt. So kompliziert das Gesamtbild der Hauptwellen auch ist, so finden wir doch auch ganz überraschende Regelmäßigkeiten. Diese berechtigen uns, wie ich glaube, zu folgendem wichtigen Schluß: Die mannigfach wechselnden Wellengruppen, wie wir sie in der Phase der Hauptwellen bei einem Fernbebendiagramm wahrnehmen, werden nicht sowohl durch die Interferrenz verschiedenartiger, im Erdbebenherd erzeugter Schwingungsperioden verursacht, als vielmehr durch die Gesetze der Wellenausbreitung bis zu einer entfernten Station hin. Ganz überraschend ist z. B. die Uebeinstimmung der Hauptwellenphase bei den beiden Tongabeben vom 19. Dezember 1906 und vom 2. Januar 1907. Jede einzelne Wellengruppe, sei sie nun kürzer oder länger, wiederholt sich in gleicher Weise bei beiden Beben. Das deutliche Maximum in der Bewegung der Ostwestkomponente, also transversal zur Richtung Herd-Station, ist von keinem entsprechenden Maximum in der Vertikalkomponente begleitet. Wir haben hier also eine transversale Wellengruppe innerhalb der Gesamtheit der Hauptwellen, für die ebenfalls eine Laufzeitkurve aufzustellen wäre, um ihre Natur als Oberflächenwellen zu erweisen, doch müßten wir dazu in der Lage sein, von einem großen Erdbeben genügend aufgelöste Diagramme aus 1000, 2000, 3000 u. s. w. bis etwa 16000 oder gar 20000 km Herdentfernung vergleichen zu können. Erst wenn das Netz der Beobachtungsstationen noch weit ausgedehnter sein wird, dürfen wir einwandfreie Klarlegung der Natur aller hier in Frage kommenden Wellengruppen erhoffen [1]).

---

1) [Als Dr. Zoeppritz diese Ausführungen niederschrieb, waren ihm offenbar die Darlegungen nicht gegenwärtig, die ich selbst in § 15 und 16 des I. Teiles der Arbeiten „Über Erdbebenwellen“ gegeben habe (Diese „Nachrichten“ etc. für 1907, S. 415): Der Schluß über die Laufzeitkurve des Maximums der Vertikalbewegung in den Hauptwellen ist darum nicht ohne weiteres zutreffend. — Das Auftreten von transversalen Wellengruppen wurde schon mehrfach vor Dr. Zoeppritz bei der Bearbeitung der Göttinger Registrierungen bemerkt. — Auch ich nehme in der zitierten Arbeit an, daß für das Auftreten der verschiedenen Wellen-

§ 8. Besondere Einsätze.

Außer den aus der Wellenreflexion an der Erdoberfläche sich ergebenden Einsätzen zeigen einige Erdbeben mit besonders scharfem Einsatz auch noch einige weitere auffallende Wellengruppen, deren Natur zur Zeit noch nicht sicher aufgeklärt ist. Man wird an gewisse Reflexionen im Innern der Erde, etwa an der Grenze zwischen Steinmantel und Metallkern denken. Doch ist es durchaus nötig, über diese Einsätze noch weiteres Beobachtungsmaterial zu sammeln. Eine Schwierigkeit erhebt sich dabei in sofern, als öfters Zweifel entstehen werden, ob ein bestimmter Einsatz einem neuen Stoß im Herd seine Entstehung verdankt oder der Besonderheit der Wellenfortpflanzung. Hierüber wird eine sichere Entscheidung oft nur durch Vergleich von Diagrammen aus verschiedener Herdentfernung möglich sein. So glaube ich, daß der Einsatz zwischen P und P_{R1} in dem Bebendiagramm vom 21. Januar 1906 wirklich der Einsatz einer besonderen Wellenart ist. Denn wenn ein neuer Stoß im Herd die Ursache gewesen wäre, so müßte dieser Stoß natürlich auch in dem Herd nahe gelegenen Stationen hervortreten. Tatsächlich ist bei der Registrierung des Bebens vom 21. Januar 1906 in Japan, speziell aber in Formosa [1]) kein neuer Stoß etwa 80 Sekunden nach dem ersten zu erkennen. Noch einen weiteren Einsatz zeigt das Beben vom 21. Januar 1906 und zwar 29 Minuten nach Beginn des Bebens in Göttingen. Möglicherweise haben wir hierin den Einsatz der auf der abgewandten Seite der Erde reflektierten Longitudinalwellen zu sehen oder auch der zweimal auf der abgewandten Seite reflektierten Wellen. Wenigstens beträgt die Laufzeit ungefähr soviel, als man für diese Wellengruppe erwarten müßte. Jedenfalls aber ist dieser im Vertikalseismometer deutlich hervortretende Einsatz nicht durch einen neuen Stoß im Herd verursacht, wie sich ebenfalls aus dem Vergleich mit den japanischen Kurven ergibt.

Auch beim Beben vom 22. Dezember 1906 tritt ein auffallender Einsatz und zwar einige Zeit vor dem Eintreffen der Transversalwellen hervor, doch vermag ich nicht mit Sicherheit zu entscheiden, ob wir es dabei nicht vielleicht mit einem erneuten Stoß im Herd zu tun haben.

---

gruppen die Ausbreitung der Wellen über die Erdoberfläche wesentlich ist. Ich denke dabei auch an ein Mitwirken von Eigenschwingungen der Erdrinde.

E. Wiechert.]

1) Vergl. die Tafeln zu F. Omori (l. c.).

B. Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus dem Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten longitudinalen Erdbebenwellen.

Von

Ludwig Geiger und Beno Gutenberg.

§ 1. Einleitung.

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung der Arbeiten über Erdbebenwellen von Wiechert, Zoeppritz und Geiger[1]), die ebenfalls in diesen Nachrichten erschienen sind und die weiterhin als „Erdbebenwellen I, II, III, IV" zitiert werden sollen.

Inhalt von I: Theorie der Ausbreitung der Erdbebenwellen.
„ „ II: Empirisch gewonnene Laufzeitfunktion der 1. und 2. Vorläufer bis zu 13000 km Herddistanz und Sinus des Einfallswinkels i als Funktion der Herddistanz.
„ „ III: Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern.
„ „ IV: Herglotzsche Methode zur Strahlenberechnung. Referenzfunktion.

In diesem vorliegenden V. Teil werden Beobachtungen über das Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen mitgeteilt. Es wird gezeigt, daß man eine Hypothese über die Sin $i_0(\varDelta)$-Funktion machen kann, die sowohl den beobachteten Bodenverrückungsverhältnissen als auch den früher beobachteten Laufzeiten gut genügt. Die Berechnung der Wege der 1. Vorläufer verfeinert unsere Kenntnis über die Konstitution des Erdinnern.

§ 2. Symbole elastischer Wellen.

Longitudinalwellen werden durch lateinische, Transversalwellen durch deutsche Buchstaben bezeichnet, und zwar

1) E. Wiechert und K. Zoeppritz, Ueber Erdbebenwellen I und II. Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 1907.
K. Zoeppritz und L. Geiger, Ueber Erdbebenwellen III. Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 1909.
E. Wiechert, Ueber Erdbebenwellen IV. Göttinger Nachr., math.-phys. Kl. (noch nicht erschienen).

setzen wir

Energie = E resp. $\mathfrak{E}$,
Amplitude = A resp. $\mathfrak{A}$,
Geschwindigkeit = V resp. $\mathfrak{V}$;

dabei erhält V, $\mathfrak{V}$ eventuell als unteren Index die Tiefe unter der Erdoberfläche in Kilometern.

Strahlebene = Ebene durch Herd, Erdmittelpunkt, Station.

Schwingungswinkel β = Winkel zwischen Strahlebene und Schwingungsebene der Transversalwellen.

Bodenverrückungen = u, v, w resp. $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, wobei
u, $\mathfrak{u}$ = horizontale Komponente in der } Einfallsebene
v, $\mathfrak{v}$ = " " quer zur } Einfallsebene
w, $\mathfrak{w}$ = vertikale " ist.

Winkel zwischen Strahl und der Normalen = i, $\mathfrak{i}$; bei der Reflexion erhalten die Symbole den untern Index i, r, f, je nachdem die einfallende (incidens), reflektierte (reflecta) oder die gebrochene (fracta) Welle gemeint ist.

Reflexion: Eine $n$mal normal reflektierte Welle erhält die die Zusatzbezeichnung n, z. B. $i1$ oder $E1$ oder $\mathfrak{A}3$; dabei erhält die direkte Welle keine Zusatzbezeichnung.

$n$mal reflektierte Wechselwellen erhalten die Zusatzbezeichnung PS resp. SP, je nachdem sie vor der Reflexion longitudinal oder transversal waren; z. B. $\mathfrak{A}_{PS}$ oder E_{SP} oder $\mathfrak{i}_{PS}$.

Die weiteren in der vorliegenden Arbeit benutzten Symbole haben keine allgemeine Bedeutung; sie werden deshalb erst in den betreffenden Paragraphen definiert.

§ 3. Die theoretischen Grundlagen der Zoeppritzschen Methode.

(Von B. Gutenberg.)

Zoeppritz macht bei seiner oben (Teil A) referierten Methode folgende Annahmen, die auch für alles Folgende gelten und die deswegen später nicht weiter angeführt werden:

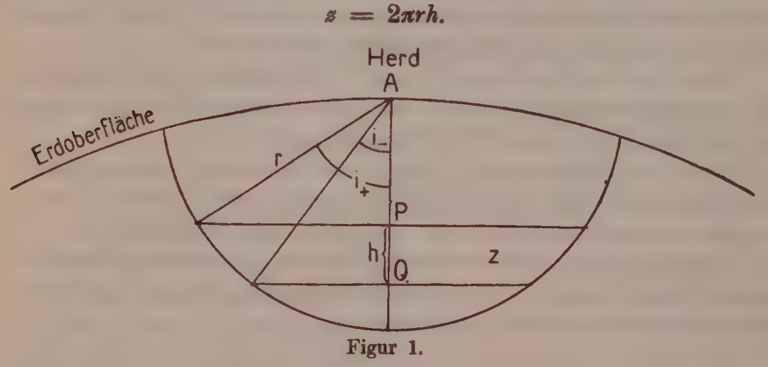
1) In der Nähe des Herdes breiten sich die Wellen kugelförmig aus. Auf jeder Kugel ist die Energiedichte konstant.
2) Die Reflexionen an der Erdoberfläche finden so statt, als ob die Wellen auf eine Ebene gegen den luftleeren Raum träfen.
3) Absorption ist nicht merklich.

Wenn wir nach der Zoeppritzschen Methode das Bodenver-

rückungsverhältnis p der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen untersuchen, so müssen wir wegen Annahme 3) Abweichungen der Beobachtungen von der Theorie erwarten, da z. B. die einmal reflektierten Wellen eine größere Laufzeit als die direkten besitzen und daher in höherem Maße absorbiert werden müssen als die direkten, falls diese nicht wesentlich stärker absorbierende Schichten durchlaufen.

Zoeppritz führt die Bedingung 1), daß die Wellen sich im Herde kugelförmig ausbreiten, folgendermaßen ein: Er denkt sich im Herde A (Fig. 1) eine so kleine Kugel (Elementarkugel) um A als Mittelpunkt gelegt, daß die Erdbebenstrahlen in derem Innern als geradlinig angesehen werden können, und verlangt dann, daß durch Zonen mit gleicher Oberfläche und der Verbindungslinie Herd-Erdmittelpunkt als Axe gleich viel Energie strömen soll. Der Inhalt einer Kugelzone ist

$$z = 2\pi r h.$$



Figur 1.

Aus Fig. 1 läßt sich entnehmen:

$$h = PQ = AQ - AP = r(\cos i_- - \cos i_+);$$

hieraus ergibt sich

$$z = 2\pi r^2 (\cos i_- - \cos i_+).$$

Sollen also zwei Zonen gleiche Oberflächen besitzen, so muß für beide sein:

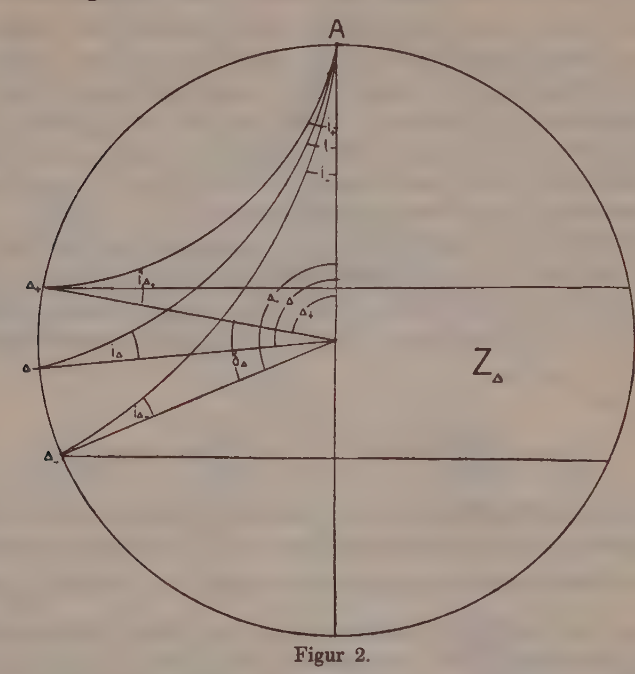
$$\cos i_- - \cos i_+ = \frac{1}{N}.$$

Hierbei ist N eine für beide gemeinsame Konstante; je größer N ist, desto kleiner ist die Oberfläche der Zonen.

Für die weitere Theorie waren leider nur Andeutungen Zoeppritz' vorhanden. (Teil A, § 2.)

Die Energie, die durch eine Zone z fließt, trifft auf der Erdoberfläche auf eine Zone Z (Fig. 2), deren Ränder, welche die

Herdentfernungen Δ_+ bezw. Δ_- besitzen mögen, durch die Strahlen mit den Einfallswinkeln i_+ bezw. i_- ausgeschnitten werden. Dies gilt allerdings nur dann stets, wenn keine der Wellen, die auf Z



Figur 2.

treffen, eine Unstetigkeitsschicht tangiert; in letzterem Falle können sich unter Umständen Strahlen im Erdinnern kreuzen. Wir nehmen nun an, jedes Flächenelement der kleinen Kugel, für die nun sowohl der Radius als die Zonenfläche z konstant sein mögen, besitze die Energiedichte (= Energie pro Flächeneinheit) k, so ergibt sich für die oben erwähnten Zonen Z auf der Erdoberfläche je nach der Herdentfernung Δ verschiedene mittlere Energiedichte (= Gesamtenergie auf der Zone dividiert durch Zonenfläche) E_Δ. E_Δ wird gegeben durch

$$(1) \qquad k.z = E_\Delta . Z_\Delta, \qquad E_\Delta = \frac{k.z}{Z_\Delta}.$$

Wie hier so wird überall im folgenden die Herddistanz, auf die sich eine Größe bezieht, als unterer Index angegeben, z. B. $i_{\frac{\Delta}{2}}$, $(A1_i)_\Delta$.

Die durch (1) bestimmte mittlere Energiedichte der Zone Z_Δ wird mit genügender Annäherung den Strahlen mit dem Einfalls-

winkel $i_\varDelta$ zugeordnet, für die die Bedingung erfüllt ist

$$(2)\qquad \cos i_{\varDelta_-} - \cos i_\varDelta = \cos i_\varDelta - \cos i_{\varDelta_+} = \frac{1}{2N}.$$

Durch (2) wird ein Kreis bestimmt, dessen Punkte die Entfernung $\varDelta$ vom Herde haben, und der die Zone $Z_\varDelta$ in zwei Teile mit gleicher Gesamtenergie zerlegt. Ist umgekehrt dieser Kreis mit der Herddistanz $\varDelta$ gegeben, so findet man bei vorgegebener $i(\varDelta)$-Funktion die zugehörigen Einfallswinkel $i_{\varDelta_+}$ und $i_{\varDelta_-}$, also auch die Grenzen der Zone selbst, aus der Gleichung (2), nachdem für die Konstante N ein Wert angenommen ist.

Die einfallende Amplitude A_i in $\varDelta$ ist proportional der Quadratwurzel aus der dort einfallenden Energiedichte, falls man diese auf einer Fläche mißt, die senkrecht zu den einfallenden Strahlen steht. (Teil A, Anmerkung S. 127.) Sei der Proportionalitätsfaktor $\frac{c}{\sqrt{kz}}$, so ist

$$(3)\qquad A_{i_\varDelta} = \frac{c\sqrt{\sec i_\varDelta}}{\sqrt{kz}} \cdot \sqrt{E_{i_\varDelta}} = \frac{c\sqrt{\sec i_\varDelta}}{\sqrt{Z_\varDelta}} \quad \text{(nach (1))}.$$

Um die Bodenverrückung $u_\varDelta$ zu erhalten, die horizontal in der Einfallsebene erfolgt, berücksichtigen wir, daß sich das Verhältnis $\frac{u}{A_i}$ der Verrückung zur einfallenden Amplitude, das bei gegebener Substanz nur vom Einfallswinkel i abhängt, nach Erdbebenwellen I, (126) berechnen läßt, und daß A_i durch die Gleichung (3) gegeben wird. Es ist:

$$(4a)\qquad u_\varDelta = \left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta \cdot A_{i_\varDelta} = \left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta \cdot \frac{c}{\sqrt{Z_\varDelta}} \cdot \sqrt{\sec i_\varDelta}.$$

Hierbei bedeutet $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$ das Verhältnis $\frac{u}{A_i}$ bei dem Einfallswinkel $i_\varDelta$; der untere Index $\varDelta$ ist der Einfachheit halber für $i_\varDelta$ gesetzt; analoges gilt für die weiteren Formeln.

Da es sich um longitudinale Wellen handelt, gilt für die horizontale Bodenverrückung senkrecht zur Einfallsebene

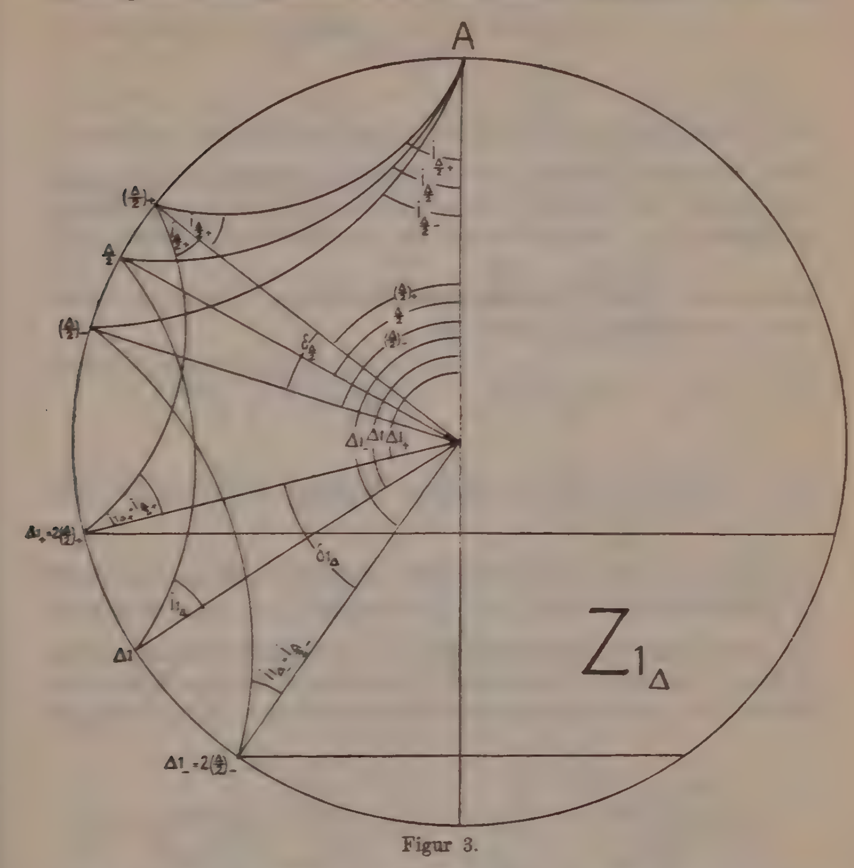
$$4b)\qquad v_\varDelta = 0,$$

und für die vertikale Bodenverrückung ergibt sich analog (4a):

$$(4c)\qquad w_\varDelta = \left(\frac{w}{A_i}\right)_\varDelta \cdot \frac{c}{\sqrt{Z_\varDelta}} \cdot \sqrt{\sec i_\varDelta}.$$

Verfolgen wir nun die Vorgänge bei den einmal reflektierten Wellen (Fig. 3). Zunächst läuft unter der Annahme, daß die Kon-

stitution der Erde Kugelsymmetrie besitzt, was seither schon stillschweigend vorausgesetzt wurde, die einmal reflektierte Welle auf



Figur 3.

zwei kongruenten Bögen $A - \frac{\varDelta}{2}$ und $\frac{\varDelta}{2} - \varDelta$ durch das Erdinnere. Es ist also insbesondere

$$i1_{\varDelta} = i_{\frac{\varDelta}{2}}.$$

Wir haben demnach ein Strahlenbüschel zu verfolgen, das auf der Elementarkugel eine Zone z, auf der Erde beim ersten Auftreffen die Zone $Z_{\frac{\varDelta}{2}}$ ausschneidet, deren Grenzstrahlen analog (2) gegeben sind durch

(5) $$\cos i_{\frac{\varDelta}{2}_-} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} = \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}_+} = \frac{1}{2N}.$$

Nach (3) findet man die in $\frac{\varDelta}{2}$ einfallende Amplitude:

$$(A_i)_{\frac{\varDelta}{2}} = \frac{c}{\sqrt{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}} \cdot \sqrt{\sec i_{\frac{\varDelta}{2}}}.$$

In $\frac{\varDelta}{2}$ wird alsdann sowohl eine longitudinale wie eine transversale Welle reflektiert; letztere, eine Wechselwelle, kommt hier nicht weiter in Betracht. Sie bewirkt jedoch, daß die reflektierte longitudinale Amplitude $(A_r)_{\frac{\varDelta}{2}}$ schwächer ist als die einfallende. Nach Erdbebenwellen I (125) läßt sich diese Schwächung berechnen. Unter ihrer Berücksichtigung ergibt sich

$$(6) \qquad (A_r)_{\frac{\varDelta}{2}} = (A_i)_{\frac{\varDelta}{2}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}} = \frac{c}{\sqrt{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}} \cdot \sqrt{\sec i_{\frac{\varDelta}{2}}}.$$

$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$ hängt bei einer bestimmten Substanz nur von i ab. Das Verhältnis der in $\varDelta$ eintreffenden Amplitude $(A1_i)_{\varDelta}$ zu der in $\frac{\varDelta}{2}$ reflektierten ist gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der entsprechenden Energiedichten, da der Einfallswinkel in beiden Fällen der gleiche ist, also auch gleich dem reziproken Werte der Wurzel aus dem entsprechenden Zonenverhältnis. Es ist demnach

$$\frac{(A1_i)_{\varDelta}}{(A_r)_{\frac{\varDelta}{2}}} = \sqrt{\frac{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}{Z1_{\varDelta}}}, \qquad (A1_i)_{\varDelta} = \sqrt{\frac{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}{Z1_{\varDelta}}} \cdot A_{r_{\frac{\varDelta}{2}}}.$$

Setzt man (6) ein, so ergibt sich

$$(A1_i)_{\varDelta} = \sqrt{\frac{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}{Z1_{\varDelta}}} \cdot \frac{c\sqrt{\sec i_{\frac{\varDelta}{2}}}}{\sqrt{Z_{\frac{\varDelta}{2}}}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}} = \frac{c\sqrt{\sec i_{\frac{\varDelta}{2}}}}{\sqrt{Z1_{\varDelta}}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}.$$

Analog (4) erhält man hieraus die Bodenverrückung durch die einmal reflektierte longitudinale Welle, wenn man berücksichtigt, daß diese unter dem Winkel $i1_{\varDelta} = i_{\frac{\varDelta}{2}}$ in $\varDelta$ einläuft. Es ist also das Verhältnis der Bodenverrückung zur einfallenden Amplitude

für den Winkel $i_{\frac{\Delta}{2}}$ zu bilden, unter dem eine direkte Welle in der Entfernung $\frac{\Delta}{2}$ einfällt:

$$(7a) \qquad u1_\Delta = \left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot (A1_i)_\Delta = \frac{c}{\sqrt{Z1_\Delta}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \sqrt{\sec i_{\frac{\Delta}{2}}}.$$

Analog (4b) und (4c) ist ferner

$$(7b) \qquad v1_\Delta = 0,$$

$$(7c) \qquad w1_\Delta = \frac{c}{\sqrt{Z1_\Delta}} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \left(\frac{w}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \sqrt{\sec i_{\frac{\Delta}{2}}}.$$

Durch Division (7a):(4a) erhält man

$$p_\Delta = \left(\frac{u1}{u}\right)_\Delta = \frac{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{Z_\Delta}{Z1_\Delta}} \cdot \sqrt{\frac{\cos i_\Delta}{\cos i_{\frac{\Delta}{2}}}}.$$

Unter Benutzung der eingangs angegebenen Formel für die Zonenoberfläche ist

$$\frac{Z_\Delta}{Z1_\Delta} = \frac{\cos \Delta_- - \cos \Delta_+}{\cos \Delta 1_- - \cos \Delta 1_+};$$

da

$$\Delta 1_- = 2\frac{\Delta}{2}_-, \qquad \Delta 1_+ = 2\frac{\Delta}{2}_+, \quad \text{ist}$$

$$\frac{Z_\Delta}{Z1_\Delta} = \frac{\cos \Delta_- - \cos \Delta_+}{\cos 2\frac{\Delta}{2}_- - \cos 2\frac{\Delta}{2}_+} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta_- + \Delta_+) \sin \frac{1}{2}(\Delta_- - \Delta_+)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}_- + \frac{\Delta}{2}_+\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2}_- - \frac{\Delta}{2}_+\right)}.$$

Bei großem N in (2) gilt mit genügender Annäherung

$$\tfrac{1}{2}(\Delta_- + \Delta_+) = \frac{\Delta}{2}_- + \frac{\Delta}{2}_+.$$

Sei ferner

$$\Delta_- - \Delta_+ = \delta_\Delta,$$

so ist

$$\frac{Z_\Delta}{Z1_\Delta} = \frac{\sin \frac{1}{2} \delta_\Delta}{\sin \delta_{\frac{\Delta}{2}}},$$

wo bei genügend groß gewählten N die δ so klein sind, daß die

Sinusverhältnisse durch die Verhältnisse der Winkel selbst ersetzt werden können. Es ergibt sich demnach für das Verhältnis der horizontalen Bodenverrückungen

$$\text{(8a)}\qquad p_\varDelta = \left(\frac{u1}{u}\right)_\varDelta = \frac{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta}\cdot\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\delta_\varDelta}{\delta_{\frac{\varDelta}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{\cos i_\varDelta}{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}}.$$

Analog ist für das Verhältnis der vertikalen Bodenverrückungen

$$\text{(8b)}\qquad q_\varDelta = \left(\frac{w1}{w}\right)_\varDelta = \frac{\left(\frac{w}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}}{\left(\frac{w}{A_i}\right)_\varDelta}\cdot\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\delta_\varDelta}{\delta_{\frac{\varDelta}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{\cos i_\varDelta}{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}}.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen ergeben sich folgendermaßen: Sind $\varDelta$ und die $i(\varDelta)$-Funktion vorgegeben, so muß zunächst N ziemlich groß gewählt werden. Nach (2) und (5) ist dann

$$\cos i_{\varDelta_-} - \cos i_\varDelta = \cos i_\varDelta - \cos i_{\varDelta_+} =$$

$$= \cos i_{\frac{\varDelta}{2}_-} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} = \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}_+} = \frac{1}{2N}.$$

Hieraus erhält man nach Bestimmung von $i_{\frac{\varDelta}{2}}$ aus der $i(\varDelta)$-Funktion $i_{\varDelta_-}$, $i_{\varDelta_+}$, $i_{\frac{\varDelta}{2}_-}$ und $i_{\frac{\varDelta}{2}_+}$, ferner aus der $i(\varDelta)$-Funktion die zugehörigen $\varDelta$-Werte, und aus diesem schließlich $\delta_\varDelta = \varDelta_- - \varDelta_+$ und $\delta_{\frac{\varDelta}{2}} = \frac{\varDelta}{2}_- - \frac{\varDelta}{2}_+$. Die übrigen Größen ergeben sich nach Formeln in Erdbebenwellen I. Unter Benutzung der in § 2 angegebenen Symbole ist nach (124), (125)

$$\frac{u}{A_i} = \frac{V}{\mathfrak{V}}\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{\sin i_{SP}},$$

nach (127)

$$\frac{w}{A_i} = \frac{u}{A_i}\cdot\cot\bar{i},$$

nach (122), (125)

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{m-1}{m+1}.$$

Hierbei ist nach (123), (128)

$$m = \operatorname{tg} i \cdot \frac{\cot^2 \bar{i}}{\operatorname{tg} i_{SP}};$$

der Winkel i_{SP}, unter dem die transversale Welle reflektiert wird, ergibt sich nach (120)

$$\sin i_{PS} = \frac{V}{\mathfrak{B}} \sin i,$$

wo $\mathfrak{B}$ dem $\mathfrak{b}$, V dem $\mathfrak{a}$ der früheren Bezeichnung (Erdbebenwellen I, II, III) entspricht. Für $\frac{V}{\mathfrak{B}}$ scheint Zoeppritz den Wert 1,789 angenommen zu haben, der dann in der vorliegenden Arbeit ebenfalls benutzt wurde, da er sich auch mit den Werten für V und $\mathfrak{B}$ in Tabelle 16 der Erdbebenwellen III (dort mit $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{b}$ bezeichnet) gut verträgt. Den scheinbaren Austrittswinkel $\bar{i}$ longitudinaler Wellen findet man nach I (128)

$$\bar{i} = 2 i_{PS}.$$

Es lassen sich jetzt die Ausdrücke p_Δ und q_Δ, das horizontale bezw. vertikale Bodenverrückungsverhältnis der P_{R1}- zu den P-Wellen, berechnen. Es genügt jedoch, nur die Werte p auszurechnen, denn durch Division von (8a) durch (8b) ergibt sich

$$\left(\frac{p}{q}\right)_\Delta = \left(\frac{u}{w}\right)_{\frac{\Delta}{2}} \cdot \left(\frac{w}{u}\right)_\Delta.$$

Setzt man für $\left(\frac{u}{w}\right)_{\frac{\Delta}{2}}$ und $\left(\frac{u}{w}\right)_\Delta$ nach Erdbebenwellen I (127) ein

$$\left(\frac{u}{w}\right)_\Delta = \operatorname{tg} \bar{i}_\Delta, \qquad \left(\frac{u}{w}\right)_{\frac{\Delta}{2}} = \operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\Delta}{2}},$$

so erhält man

(9) $$p_\Delta = q_\Delta \cdot \frac{\operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\Delta}{2}}}{\operatorname{tg} \bar{i}_\Delta}.$$

Nach dieser Gleichung (9) läßt sich ein beobachtetes q^*_Δ durch p_Δ ersetzen. Es geschieht dies approximativ, indem man für $\bar{i}_\Delta$ und $\bar{i}_{\frac{\Delta}{2}}$ die Werte wählt, die der vermutlich besten $i(\Delta)$-Funktion entsprechen. Die praktische Durchführung dieser Reduktion sowie eine rein geometrische Ableitung der Gleichung (9) finden sich in § 6.

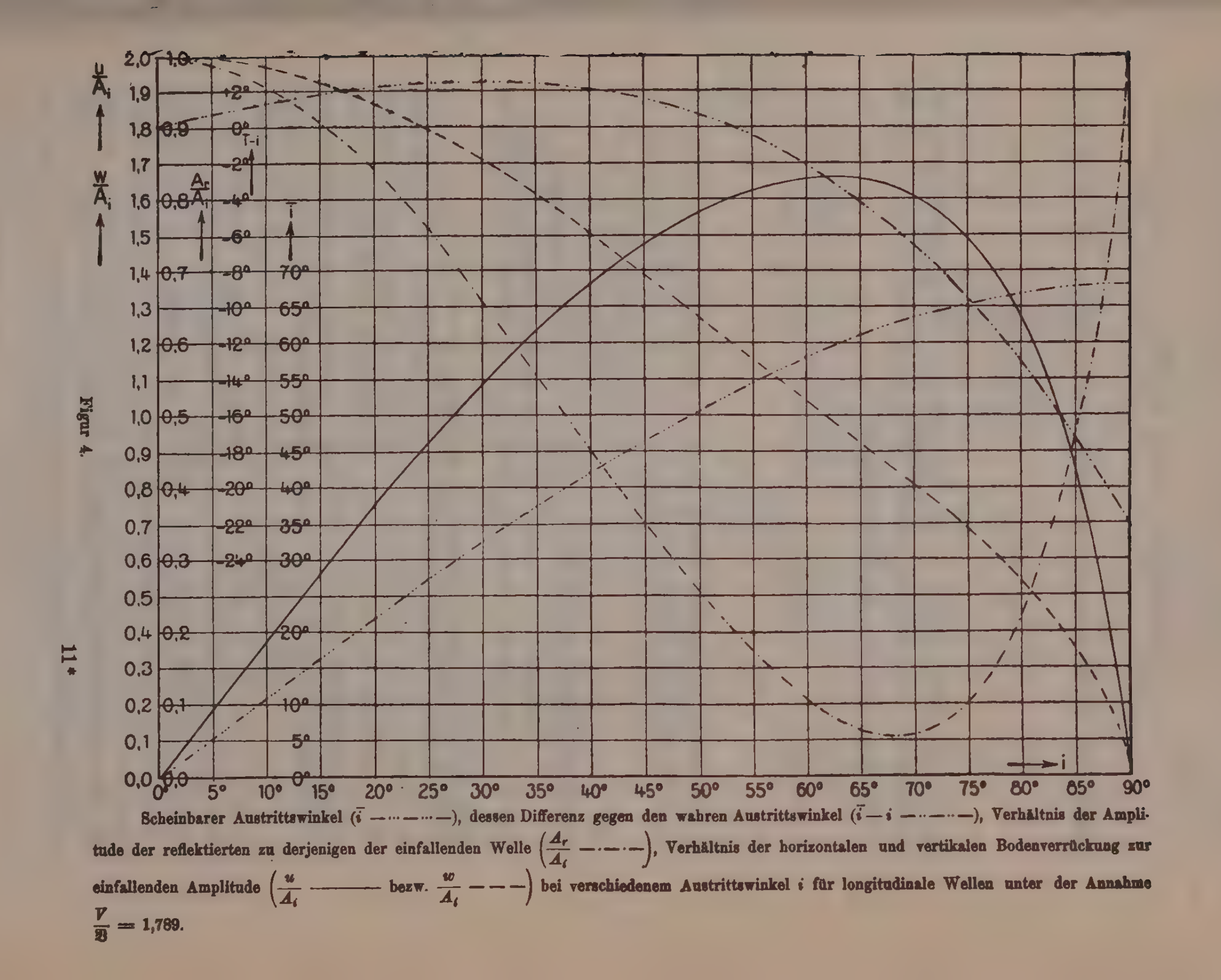
Für die Ausrechnung von p_Δ bei gegebener $i(\Delta)$-Funktion ist die Kenntnis der Werte $\frac{u}{A_i}$ und $\frac{A_r}{A_i}$ nötig. Es empfiehlt sich daher, diese graphisch als Funktion von i aufzutragen, und dann bei gegebenem Δ bezw. i den gewünschten Wert aus der Zeichnung zu interpolieren. In Tabelle 1 sind diese beiden Größen, außerdem $\frac{w}{A_i}$ sowie die bei der Rechnung nach den oben angegebenen Gleichungen vorkommenden Werte von i_{PS}, $\bar{i}$ und m angegeben; zur leichteren Bestimmung von $\bar{i}$ aus i findet man schließlich noch $\bar{i} - i$. Figur 4 gibt ein kleines Bild der Rechenresultate.

Tabelle 1.

Berechnung von Werten $\frac{u}{A_i}$, $\frac{w}{A_i}$, $\frac{A_r}{A_i}$ sowie $(\bar{i} - i)$ bei gegebenem i unter der Annahme $\frac{V}{\mathfrak{B}} = 1{,}789$.

i	i_{PS}	$\bar{i}$	$\bar{i} - i$	m	$\frac{A_r}{A_i}$	$\frac{u}{A_i}$	$\frac{w}{A_i}$
0°	0° 0′	0° 0′	+ 0° 0′	∞	1,0000	0,0000	2,0000
5	2 47½	5 35	+ 0 35	187,8	0,9894	0,1948	1,9926
10	5 34½	11 9	+ 1 9	46,55	0,9579	0,3875	1,9680
15	8 19	16 38	+ 1 38	20,54	0,9071	0,5741	1,9220
20	11 1¼	22 2½	+ 2 2½	11,403	0,8387	0,7544	1,8632
25	13 40	27 20	+ 2 20	7,178	0,7554	0,9262	1,7918
30	16 13¾	32 27½	+ 2 27½	4,9024	0,6612	1,0844	1,7050
35	18 42	37 24	+ 2 24	3,5392	0,5594	1,2292	1,6076
40	21 3½	42 7	+ 2 7	2,6663	0,4545	1,3581	1,5022
35	23 17	46 34	+ 1 34	2,0831	0,3513	1,4677	1,3896
50	25 21	50 42	+ 0 42	1,6850	0,2551	1,5560	1,2735
55	27 15	54 30	− 0 30	1,4109	0,1701	1,6205	1,1559
60	28 57	57 54	− 2 6	1,2320	0,1039	1,6557	1,0386
65	30 26	60 52	− 4 8	1,1340	0,06279	1,6548	0,9231
70	31 41	63 22	− 6 38	1,1194	0,05634	1,6069	0,8058
75	32 41	65 22	− 9 38	1,2229	0,10300	1,4904	0,6834
80	33 24	66 48	−13 12	1,5801	0,2248	1,2595	0,5398
85	33 50⅓	67 41	−17 19	2,8734	0,4837	0,8293	0,3405
90	33 59	67 58	−22 2	∞	1,0000	0,0000	0,0000

Für den Herd selbst liefern die Formeln (8a) und (8b) sowohl für p_0 wie für q_0 den Wert $\frac{2}{6}$. Unter der Annahme, daß $i(\Delta)$ für kleines Δ geradlinig verläuft, wie es in Wirklichkeit zu sein scheint, lassen sich diese Werte angeben. Für $\Delta = 0$ ist



Scheinbarer Austrittswinkel ($\bar{\imath}$ —···—···—), dessen Differenz gegen den wahren Austrittswinkel ($\bar{\imath} - i$ —··—··—), Verhältnis der Amplitude der reflektierten zu derjenigen der einfallenden Welle $\left(\frac{A_r}{A_i}\right.$ —·—·—$\left.\right)$, Verhältnis der horizontalen und vertikalen Bodenverrückung zur einfallenden Amplitude $\left(\frac{u}{A_i}\right.$ ——— bezw. $\frac{w}{A_i}$ – – –$\left.\right)$ bei verschiedenem Austrittswinkel i für longitudinale Wellen unter der Annahme $\frac{V}{\mathfrak{V}} = 1,789$.

Figur 4.

$$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}=0} = 1, \quad (i_\Delta)_0 = \left(i_{\frac{\Delta}{2}}\right)_0 = 90^\circ, \quad (\bar{i}_\Delta)_0 = \left(\bar{i}_{\frac{\Delta}{2}}\right)_0 = 67^\circ 58',$$

$$(\mathrm{iPS}_\Delta)_0 = \left(\mathrm{iPS}_{\frac{\Delta}{2}}\right)_0 = 33^\circ 59'.$$

Außerdem ist nach unsrer Annahme in der Nähe von $\Delta = 0$

$$\delta_\Delta = \delta_{\frac{\Delta}{2}}, \qquad \frac{\frac{1}{2}\delta_\Delta}{\delta_{\frac{\Delta}{2}}} = \frac{1}{2},$$

da in der Nähe von $i = 90^\circ$ bei gleichen Cosinusdifferenzen die Differenzen der Winkel selbst gleich sind und daher auch die Differenzen der Δ. Es ist demnach

$$p_0 = \left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}=0} \cdot F_0 : \left(\frac{u}{A_i}\right)_{\Delta=0} \cdot \sqrt{2}, \quad \text{wo } F_0 = \left(\sqrt{\frac{\cos i_\Delta}{\cos i_{\frac{\Delta}{2}}}}\right)_{\Delta=0}$$

$$p_0 = \frac{F_0 \left(\frac{1}{m_{\frac{\Delta}{2}}+1} \cdot \sin \mathrm{iPS}_{\frac{\Delta}{2}}\right)_{\frac{\Delta}{2}=0}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{m_\Delta+1} \cdot \sin \mathrm{iPS}_\Delta\right)_{\Delta=0}} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{m_\Delta+1}{m_{\frac{\Delta}{2}}+1}\right)_{\Delta=0}$$

Für $i = 90^\circ$ wird sowohl m_Δ wie $m_{\frac{\Delta}{2}}$ ∞, daher ergibt sich bei Division von Zähler und Nenner durch $m_{\frac{\Delta}{2}}$

$$p_0 = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{m_\Delta}{m_{\frac{\Delta}{2}}}\right)_{\Delta=0} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} i_\Delta \,.\, \cot^2 \bar{i}_\Delta \,.\, \operatorname{tg} \mathrm{iPS}_{\frac{\Delta}{2}}}{\operatorname{tg} \mathrm{iPS}_\Delta \,.\, \cot^2 \bar{i}_{\frac{\Delta}{2}} \,.\, \operatorname{tg} i_{\frac{\Delta}{2}}}\right)_{\Delta=0} =$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} i_\Delta}{\operatorname{tg} i_{\frac{\Delta}{2}}}\right)_{\Delta=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} i_\Delta \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} i_\Delta}{\operatorname{tg} i_{\frac{\Delta}{2}} \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} i_{\frac{\Delta}{2}}}\right)_{\Delta=0}$$

Bei Annahme eines geradlinigen Verlaufs der $i(\Delta)$-Funktion nahe $i = 90^\circ$ ist dort

$$i_\Delta = 2 i_{\frac{\Delta}{2}} - 90^\circ,$$

also

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sin i_\varDelta \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} i_{\frac{\varDelta}{2}}}{\sin i_{\frac{\varDelta}{2}} \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} i_\varDelta}\right)_{\varDelta = 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}{\sin 2 i_{\frac{\varDelta}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}_{\varDelta = 0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}{2 \sin i_{\frac{\varDelta}{2}} \,.\, \cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}_{i_{\frac{\varDelta}{2}} = 90^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$q_0 = p_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \bar{i}_\varDelta}{\operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}}}\right)_{\varDelta = 0} = p_0.$$

Es ist also

$$(10) \qquad p_0 = q_0 = 0{,}5.$$

Im Herde selbst ist nach (10) theoretisch horizontal wie vertikal die Bodenverrückung bei der einmal reflektierten longitudinalen Welle $\frac{1}{2}$ der Bodenverrückung bei der direkten Welle.

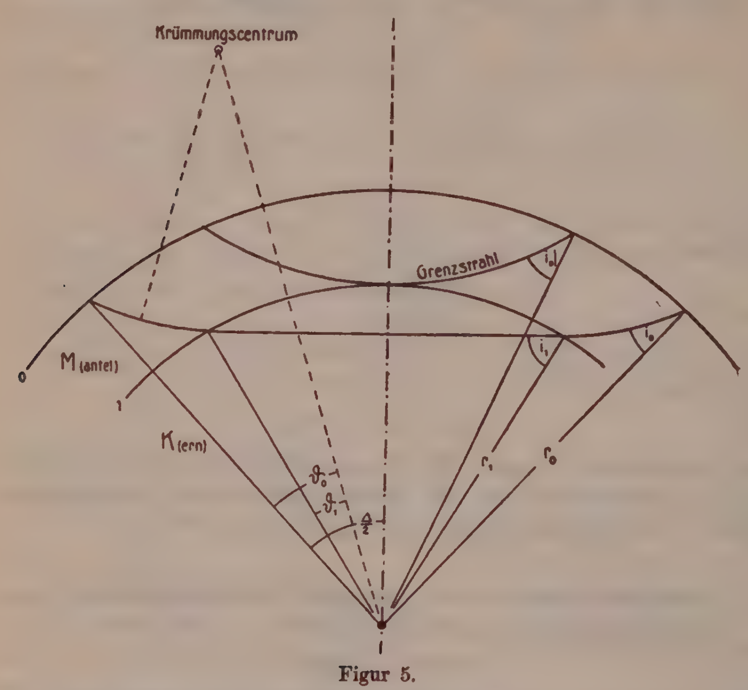
§ 4. Referenz-Sinus- und Referenz-Laufzeitfunktion einer hypothetischen zweiteiligen Erde (= Annahme 1).

(Von L. Geiger.)

Zoeppritz hatte in seinem Fragment eine zweiteilige Erde behandelt, in deren Mantel die Geschwindigkeit longitudinaler Wellen V stetig wächst, und in deren Kern sie wieder stetig abnimmt. Für diese Erde hatte er die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion, die Laufzeitfunktion und die Amplitudenfunktion berechnet, aber dabei leider ungenaue Formeln benützt. Inzwischen hat Wiechert die Theorie der Referenzfunktion gegeben[1]), wobei er zeigen konnte, daß die beobachtete Wiechert-Zoeppritzsche Laufzeitfunktion sehr nahe erhalten wird, wenn man eine zweiteilige Erde annimmt, in deren Mantel die Strahlen Kreisbögen, in deren Kern dieselben Geraden sind; dabei findet in der Grenze keine Strahlenbrechung statt. Es hätte nun ohne weiteres diese Wiechertsche Referenzfunktion benützt werden können; um aber von fremden Rechnungen unabhängig zu bleiben und aus

1) Erdbebenwellen IV.

Gründen, die in § 7 hervortreten werden, zog ich es vor, eine neue $\sin i_0(\varDelta)$- und Laufzeitfunktion zu berechnen, die „Annahme 1“ genannt wurde. Diese Annahme 1 hat dann Gutenberg seiner Berechnung der Amplitudenfunktion zugrunde gelegt (vgl. § 5).



Figur 5.

1) Für Strahlen, die nur im Mantel verlaufen, gilt nach Wiechert

$$\sin \frac{T_x}{2\alpha} = \sqrt{C_x^2 - 1} \,.\, \sin \frac{\varDelta}{2}; \tag{11}$$

darin ist

$$\sin \frac{T_x}{2\alpha} = \text{hyperbolischer Sinus} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{T_x}{2\alpha}} - e^{-\frac{T_x}{2\alpha}}\right),$$

T_x = Laufzeit,

α = Konstante,

C_x =

$\varDelta$ = Herddistanz.

Wir geben allen Größen, die sich auf die Erdoberfläche resp. die Kernoberfläche beziehen, den unteren Index 0 resp. 1, solchen, die sich auf den ganzen Mantel resp. den ganzen Kern beziehen,

den unteren Index M resp. K. Größen, die sich auf den Grenzstrahl beziehen, werden durch einen senkrechten Strich bezeichnet, z. B. $i_0|$.

In Erdbebenwellen III war der Mantel in zwei Schichten unterteilt, in deren äußerer die Konstante $C = 4{,}800$ gesetzt war. Aus Gründen, die auch erst in § 7 hervortreten werden, wurde dieser Wert jetzt für den ganzen Mantel beibehalten, also

$$C_M = 4{,}800$$

gesetzt.

Ferner gilt für den Einfallswinkel an der Erdoberfläche i_0

(12) $$\operatorname{cotg} i_0 = C_M \,.\, \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}.$$

Die Konstante α hängt mit der Geschwindigkeit an der Erdoberfläche V_0 und dem Erdradius r_0 zusammen durch

(13) $$\alpha = \frac{r_0}{V_0 \,.\, \sqrt{C_M^2 - 1}}.$$

Setzt man $r_0 = 6367$ km, $V_0 = 7{,}174$ km/Sek., so wird

$$\alpha = 189{,}04.$$

Gleichung (11) liefert also die Laufzeit T_M als Funktion der Herddistanz Δ. Die Rechnung wurde mittelst Rechenmaschine, der fünfstelligen trigonometrischen Tafeln für Maschinenrechnen von F. G. Gauß und der Tafeln der Hyperbelfunktionen von G. Becker und C. E. Van Orstrand[1]) von $2^1/_2$ zu $2^1/_2$ Grad Herddistanz ausgeführt. Die Herddistanz des Grenzstrahls, d. h. desjenigen Strahles, der den Kern streift, wurde zu $\Delta = 48^\circ$ angenommen. Die Resultate siehe in Tabelle 2.

Gleichung (12) liefert zunächst $\operatorname{cotg} i_0$ als Funktion von Δ. Die Gaußschen Tafeln liefern dann $\sin i_0$. Die Resultate siehe ebenfalls in Tabelle 2.

2) Für Strahlen, die den Kern passieren, gilt nach Wiechert

(14) $$T = T_M + T_K.$$

Darin ist

$$T_M = 2\alpha \,.\, \log\text{nat} \frac{C_M + \sqrt{C_M^2 - 1} \,.\, \cos i_0}{C_K + \sqrt{C_K^2 - 1} \,.\, \cos i_1}$$

$$= 2 \,.\, 189{,}04 \,.\, 2{,}30259 \,.\, \log_{10} \frac{C_M + \sqrt{C_M^2 - 1} \,.\, \cos i_0}{C_K + \sqrt{C_K^2 - 1} \,.\, \cos i_1},$$

1) „Hyperbolic functions“. Smithsonian mathematical tables. Washington 1909.

oder

(15) $$T_{\varkappa} = 870{,}56 \,.\, \log_{10} \frac{C_{\varkappa} + \sqrt{C_{\varkappa}^2 - 1} \,.\, \cos i_0}{C_{x} + \sqrt{C_{x}^2 - 1} \,.\, \cos i_1}.$$

Nun ist aber

(16) $$\sqrt{C_{x}^2 - 1} = \sin i_0| \,.\, \sqrt{C_{\varkappa}^2 - 1}.$$

Nach Tabelle 2 ist

$$\sin i_0| = 0{,}42\,382 \quad \text{und} \quad i_0| = 25^\circ\, 05',$$

sodaß

$$\sqrt{C_{x}^2 - 1} = 1{,}98\,970$$

und

$$C_{x} = 2{,}22\,686$$

ist. Gleichung (5) lautet dann

(17) $$T_{\varkappa} = 870{,}56 \,.\, \log_{10} \frac{4{,}800 + 4{,}69\,465 \,.\, \cos i_0}{2{,}22\,686 + 1{,}98\,970 \,.\, \cos i_1}.$$

Nun enthält Gleichung (17) noch $\cos i_1$, wobei i_1 den Einfallswinkel der Strahlen an der Kernoberfläche bedeutet. Es ist aber

(18) $$\sin i_1 = \frac{\sin i_0}{\sin i_0|} = 2{,}35\,949 \,.\, \sin i_0,$$

sodaß $\cos i_1$ mit Hilfe der Gaußschen Tafeln gefunden werden kann. Gleichzeitig notiert man auch die Werte $\operatorname{cotg} i_1$ und i_1, die später Verwendung finden.

Ferner ist

(19) $$T_{x} = 2\alpha \,.\, \sqrt{C_{\varkappa}^2 - 1} \,.\, \sin i_0| \,.\, \cos i_1$$
$$= 2 \,.\, 189{,}04 \,.\, 4{,}69\,465 \,.\, 0{,}42\,382 \,.\, \cos i_1,$$

oder

(20) $$T_{x} = 752{,}26 \,.\, \cos i_1.$$

Die Gleichungen (18), (17), (20), (14) liefern also für Kernstrahlen die Laufzeit T als Funktion von $\sin i_0$, jedoch nicht als Funktion der Herddistanz $\varDelta$; die zugehörigen $\varDelta$-Werte sind folgendermaßen zu berechnen:

Wir definieren die Winkel ϑ_0 und ϑ_1 durch Figur 5; dann ist

(21) $$\frac{\varDelta}{2} = \vartheta_0 - \vartheta_1 + (90^\circ - i_1).$$

Nun ist

(22) $$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{1}{C_{\varkappa}} \operatorname{cotg} i_0,$$

und

(23) $$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{1}{C_x} \operatorname{cotg} i_1;$$

$\operatorname{cotg} i_1$ und i_1 waren bereits im Anschluß an Gleichung (18) gefunden worden, sodaß nur noch ϑ_0 und ϑ_1 in den Gaußschen Tafeln aufzuschlagen sind.

Für die Rechnungen wurden solche Werte von i_0 gewählt, daß die zugehörigen Δ-Werte ungefähr in Intervallen von 5 Grad liegen. Die Resultate siehe Tabelle 2.

Schließlich ist noch der Kernradius r_1 und die Kerngeschwindigkeit $V_1 = V_x$ zu berechnen:

Für Mantelstrahlen gilt allgemein

(24) $$\frac{r}{r_0} = \frac{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0) + \dfrac{\Delta}{2}}{2}}{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0) - \dfrac{\Delta}{2}}{2}},$$

also speziell für den Grenzstrahl

(25) $$\frac{r_1}{r_0} = \frac{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0|) + \dfrac{\Delta}{2}\Big|}{2}}{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0|) - \dfrac{\Delta}{2}\Big|}{2}} = \frac{\cos \dfrac{(90^\circ - 25^\circ 5') + 24^\circ}{2}}{\cos \dfrac{(90^\circ - 25^\circ 5') - 24^\circ}{2}},$$

oder

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{0{,}71376}{0{,}93693},$$

und

$$r_1 = 0{,}76181 . 6367$$

oder

$$r_1 = 4850 \text{ km}.$$

Ferner gilt für die Scheitelgeschwindigkeit V aller Strahlen

(26) $$V = \frac{V_0}{r_0} \cdot \frac{r}{\sin i_0},$$

also speziell für den Grenzstrahl

$$V_1 = V_x = \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{V_0}{\sin i_0|} \tag{27}$$

$$= 0{,}76181 \cdot \frac{7{,}174}{0{,}42382}$$

oder

$$V_1 = V_x = 12{,}90 \text{ km/Sek.}$$

Tabelle 2 gibt die gewählte Referenzfunktion wieder; dabei sind einige Werte eingeschaltet, die später nützlich sein werden.

Tabelle 2.

Referenzfunktion = Annahme 1.

Aus den Annahmen

$C_x = 4{,}800$; $\Delta| = 48°$; $r_0 = 6367$ km, $V_0 = 7{,}174$ km/Sek.

folgt

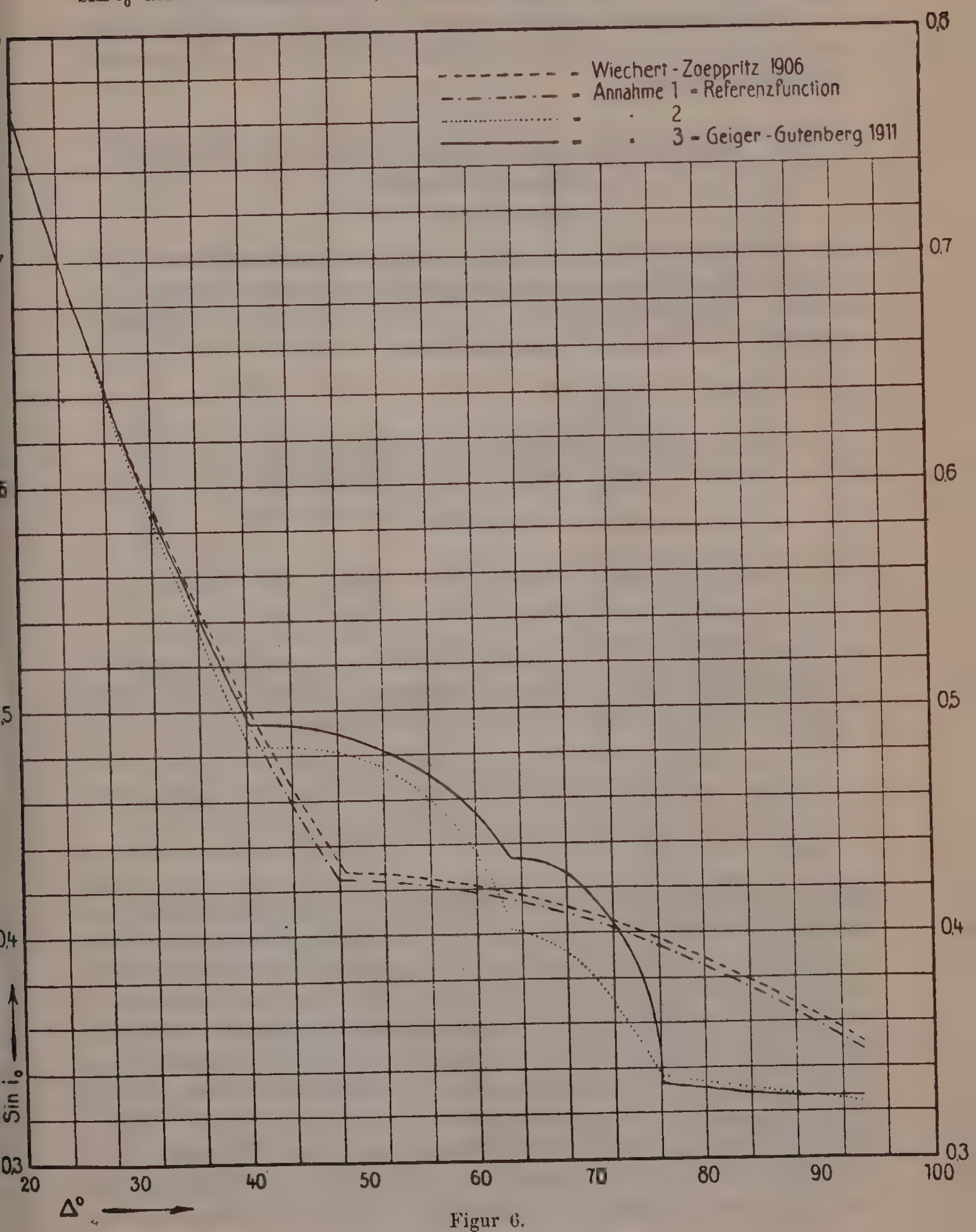
$C_x = 2{,}22686$; $\alpha = 189{,}04$; $r_1 = 4850$ km,

$V_1 = V_x = 12{,}90$ km/Sek.

	Δ^0 (° ′)	$\sin i_0$	i_0 (° ′)	T Sek.
Mantelstrahlen	0	1,00000	90 0	0,00
	2 30	0,99456	84 01	38,64
	5	0,97874	78 10	76,89
	7 30	0,95390	72 32	114,33
	10	0,92200	67 13	150,69
	12 30	0,88514	62 16	185,68
	15	0,84536	57 43	219,20
	17 30	0,80432	53 33	251,13
	20	0,76330	49 45	281,49
	22 30	0,72327	46 20	310,26
	25	0,68481	43 13	337,52
	27	0,64824	40 25	363,33
	30	0,61381	37 52	387,76
	32 30	0,58149	35 33	410,89
	35	0,55167	33 29	432,82
	37 30	0,52307	31 32	453,61
	40	0,49676	29 47	473.35
	40 18	0,49415	29 35	475,65
	42 30	0,47223	28 11	492,11
	45	0,44931	26 42	509,94
	48	0,42382	25 05	530,22

	Δ^0 (° ′)	$\sin i_0$	i_0 (° ′)	T Sek.
Kernstrahlen	52 54	0,42262	25 00	562,31
	56 56	0,41998	24 50	588,75
	62 22	0,41469	24 30	622,36
	67 00	0,40806	24 05	653,10
	71 00	0,40141	23 40	678,28
	75 11	0,39341	23 10	704,20
	80 11	0,38268	22 30	734,18
	84 41	0,37191	21 50	760,66
	89 51	0,35837	21 00	789,78
	94 39	0,34475	20 10	815,95
	99 56	0,32832	19 10	844,12
	105 10	0,31178	18 10	869,47
	110 03	0,29515	17 10	892,39
	114 44	0,27843	16 10	913,24
	120 02	0,25882	15 00	935,23
	125 09	0,23910	13 50	955,02
	130 08	0,21928	12 40	972,66
	135 01	0,19937	11 30	988,52
	139 48	0,17937	10 20	1002,55
	144 50	0,15787	9 05	1015,74
	149 48	0,13629	7 50	1027,05
	155 02	0,11320	6 30	1037,15
	160 13	0,09005	5 10	1045,31
	165 21	0,06685	3 50	1051,54
	170 09	0,04507	2 35	1055,69
	174 52	0,02327	1 20	1058,24
	180 00	0,00000	0 00	1059,15

Die strich-punktierte Kurve in Figur 6 zeigt einen Teil von $\sin i_0$ als Funktion von $\varDelta$, der für weitere Untersuchungen in § 7



Figur 6.

gebraucht werden wird, während die gestrichelte Kurve die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion von Wiechert-Zoeppritz 1906 zeigt.

Man sieht, daß beide Kurven bis $\varDelta = 20^\circ$ koinzidieren und auch von da an nur wenig aus einander laufen. Im übrigen sei auf § 7 verwiesen.

§ 5. Berechnung und Diskussion der $p(\varDelta)$-Funktion unter Annahme 1.

(Von B. Gutenberg.)

Auf Grund der im vorigen Paragraphen aufgestellten $i(\varDelta)$-Funktion kann jetzt nach (8a) die $p(\varDelta)$-Funktion unter Annahme 1 berechnet werden. Es war p, das Bodenverrückungsverhältnis von P_{R1} zu P, gegeben durch

$$(8a) \qquad p_\varDelta = \frac{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta} \cdot \left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\delta_\varDelta}{\delta_{\frac{\varDelta}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{\cos i_\varDelta}{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}}.$$

Die Werte $\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$, $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$ und $\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$ werden den Kurven, die für diese Größen früher (nach Tabelle 1) in genügend großem Maßstabe gezeichnet wurden, entnommen, während die $\delta_\varDelta$ und $\delta_{\frac{\varDelta}{2}}$, wie schon erwähnt, durch (2) und (5) bestimmt sind:

$$\cos i_{\varDelta_-} - \cos i_\varDelta = \cos i_\varDelta - \cos i_{\varDelta_+} =$$
$$= \cos i_{\frac{\varDelta}{2}_-} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} = \cos i_{\frac{\varDelta}{2}} - \cos i_{\frac{\varDelta}{2}_+} = \frac{1}{N}.$$

Einige Schwierigkeit bereitet zunächst die Wahl der Konstanten N, die für die Zonenbreite maßgebend ist, besonders an steilen Stellen der $i(\varDelta)$-Funktion. Dort schwankt $\delta_\varDelta$, das im Wesentlichen von der Neigung der $i(\varDelta)$-Funktion abhängt (Fig. 7), schon bei geringer Aenderung des Neigungswinkels außerordentlich. Dasselbe gilt von sehr flachen Stellen der $i(\varDelta)$-Funktion, so daß die Methode in beiden Fällen sehr empfindlich ist. In Tabelle 3 wurden die δ unter Benutzung von verschiedenem N bestimmt; die Tabelle zeigt, daß auch bei sehr hohen Werten von $\varDelta$ die Differenzen bei geeigneter Wahl von N kaum die Ablesefehler übersteigen, die am Ende des vorliegenden Paragraphen diskutiert sind. Nur in

dem Falle in Tabelle 3, in welchem $\delta_{\frac{\Delta}{2}}$ den Wert 82° besitzt, ist eine größere Differenz zwischen den berechneten Werten p vorhanden; sie beträgt aber auch dann nur 10 %.

Tabelle 3.

Differenzen von p an steilen Stellen der $\sin i(\Delta)$-Funktion bei verschiedener Wahl von N (für Annahme 1).

Δ	48° 0′↓	53° 6′	57° 0′	96° 0′↓	110° 0′	120° 2′
$1:2N$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
$\delta_{\frac{\Delta}{2}}$	0°,73	0°,80	0°,84	69°	38°	25°,3
$\frac{1}{2}\delta_{\Delta}$	40°,8	24°,4	13°,5	4°,30	4°,64	5°,05
p	4,82	3,68	2,95	0,26	0,40	0,56
$1:2N$	0,001	0,001	0,003	0,0005	0,001	0,001
$\delta_{\frac{\Delta}{2}}$	0°,146	0°,162	0°,506	8°,3	7°,9	5°,1
$\frac{1}{2}\delta_{\Delta}$	8°,2	5°,0	8°,3	0°,427	0°,945	1°,02
p	4,84	3,72	2,98	0,24	0,40	0,56

Die Bestimmung von δ bei gegebenem $i_+ - i_-$ geschah so, daß zunächst ein Blatt an einer Seite i-Teilung, an einer darauf senkrechten Δ-Teilung erhielt. Dies Blatt wurde so auf die $i(\Delta)$-Kurve gelegt, daß seine i-Teilung parallel zur i-Achse, seine Δ-Teilung also parallel zur Δ-Achse der $i(\Delta)$-Kurve lag, und daß $i_+ - i_-$ auf der i-Teilung des Blattes mit dem Werte i_+ auf der $i(\Delta)$-Kurve koinzidierte. Der Wert der Δ-Teilung, der auf dem Blatte dann an ihrem Schnitte mit der i-Kurve abgelesen wurde, war δ. An sehr flachen Stellen der $i(\Delta)$-Funktion wurde δ aus der Tangentenrichtung berechnet. Diese Werte sind in Tabelle 4 eingeklammert, bei dem zugehörigen i_+ steht dann ein Strich. War $i_+ - i_-$ sehr klein, so wurde δ aus einem abgelesenen Vielfachen berechnet. In Tabelle 4 sind die Größen, die bei der Rechnung vorkommen, für Annahme 1 angegeben. Die Schlußrechnung nach (8a) bezw. (8b) geschah teils logarithmisch, teils mit dem Rechenschieber. Ein ↑ hinter einem Δ-Werte bedeutet, daß es sich bei den zu diesem Δ gehörigen Werten um einen Limes von unten, ein ↓ daß es sich um einen Limes von oben handelt.

Dreierlei fällt an den so erhaltenen $p(\Delta)$- und $q(\Delta)$-Funktionen

Tabelle 4.
Berechnung von p unter der Annahme 1.

Δ	i_Δ	$i_{\frac{\Delta}{2}}$	1:2N	$i_{\frac{\Delta}{2}+}$	$i_{\frac{\Delta}{2}+} - i_{\frac{\Delta}{2}-}$	$\delta_{\frac{\Delta}{2}}$	$i_{\Delta-}$	$i_{\Delta+} - i_{\Delta-}$	$t\,\delta_\Delta$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}}$	$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}}$	p	q
2° 6′	85° 0′	87° 28′	0,025	88° 54′	2° 52′	1°,20	86° 26′	2° 52′	0°,61	0,829	0,490	0,728	0,421	0,412
4 12	80 0	85 0	0,025	86 26	2 52	1,22	81 27	2 54	0,62	1,260	0,829	0,4837	0,337	0,308
6 24	75 0	82 20	0,025	83 47	2 53	1,23	76 29	2 58	0,66	1,490	1,203	0,3210	0,262	0,218
8 40	70 0	79 35	0,025	81 2	2 54	1,25	71 31	3 3	0,71	1,607	1,270	0,2140	0,173	0,143
10 0	67 17	78 10	0,025	79 38	2 55	1,28	68 49	3 6	0,75	1,640	1,369	0,1650	0,145	0,119
11 6	65 0	76 53	0,025	78 21	2 56	1,30	66 34	3 9	0,79	1,655	1,412	0,1353	0,123	0,100
12 36	62 5	75 13	0,025	76 41	2 57	1,33	63 41	3 14	0,84	1,660	1,482	0,1045	0,100	0,077
13 42	60 0	74 3	0,025	73 32	2 59	1,35	61 38	3 17	0,88	1,656	1,518	0,0890	0,089	0,066
16 36	55 0	70 50	0,025	72 21	3 2	1,42	56 44	3 30	1,05	1,621	1,593	0,0597	0,067	0,046
18 0	52 48	69 24	0,025	70 55	3 4	1,45	54 35	3 37	1,15	1,597	1,614	0,0542	0,064	0,043
19 50	50 0	67 29	0,025	69 1	3 6	1,48	51 51	3 44	1,28	1,556	1,638	0,0552	0,070	0,045
22 0	46 58	65 10	0,025	66 45	3 9	1,53	48 54	3 56	1,48	1,505	1,655	0,0623	0,085	0,053
23 32	45 0	63 40	0,025	65 15	3 11	1,60	46 58	4 5	1,63	1,468	1,660	0,0727	0,102	0,062
26 0	42 3	61 18	0,025	62 54	3 13	1,72	44 8	4 16	1,97	1,404	1,657	0,0915	0,144	0,084
27 54	40 0	59 32	0,025	61 10	3 18	2,78	42 13	4 31	2,15	1,358	1,653	0,1059	0,179	0,103
33 8	35 0	55 24	0,025	57 6	3 26	2,04	37 28	5 8	3,00	1,229	1,627	0,1640	0,318	0,171
39 42	30 0	50 0	0,025	51 51	3 44	2,45	32 46	5 46	4,32	1,084	1,556	0,2551	0,577	0,294
48 0 ↑	25 5	44 25	0,025	46 25	4 7	3,26	28 45	6 53	6,50	0,928	1,456	0,3648	0,908	0,455
48 0 ↓	25 5	44 25	0,001	44 30	0 9,82	0,146	—	0 16,24	(8,2)	0,928	1,456	0,3648	4,84	2,41
53 6	25 0	41 27	0,001	41 32	0 10,35	0,162	—	0 16,28	(5,0)	0,926	1,391	0,4062	3,72	2,00
57 0	24 47	39 21	0,003	39 37	0 32,5	0,506	—	0 49,2	(8,3)	0,917	1,342	0,4663	2,98	1,72
62 0	24 32	36 54	0,005	37 22	0 56	1,02	—	1 24	(9,25)	0,910	1,275	0,5194	2,37	1,47
70 34	23 53	33 10	0,005	33 42	1 4	1,31	—	1 25	(6,95)	0,888	1,175	0,5745	1,83	1,26
75 0	23 25	31 32	0,005	32 5	1 6	1,49	—	1 26	(6,25)	0,871	1,130	0,609	1,67	1,19
85 0	22 5	28 14	0,005	28 50	1 11	1,92	22 50	1 31	5,55	0,829	1,030	0,697	1,50	1,14
90 0	21 18	26 40	0,005	27 18	1 17	2,18	22 4	1 36	4,9	0,797	0,980	0,727	1,37	1,06
95 36	20 0	25 10	0,005	25 50	1 21	2,46	20 50	1 42	4,3	0,754	0,932	0,755	1,25	0,98
96 0 ↑	19 55	25 5	0,005	25 45	1 21	2,48	20 45	1 42	4,3	0,752	0,928	0,755	1,25	0,97
96 0 ↓	19 55	25 5	0,0005	—	0 8,1	(8,3)	20 0	0 10,1	0,427	0,752	0,928	0,755	0,24	0,18
110 0	17 5	24 58	0,001	—	0 16,2	(7,9)	17 17	0 23,4	0,945	0,629	0,923	0,759	0,40	0,26
120 2	15 0	24 40	0,001	—	0 16,3	(5,1)	15 13	0 26,6	1,02	0,574	0,914	0,762	0,56	0,33
130 0	12 48	24 20	0,005	—	1 24	(17,6)	14 2	2 44	5,53	0,491	0,904	0,766	0,82	0,41
141 8	10 0	23 53	0,005	—	1 25	(13,8)	11 32	3 22	6,6	0,388	0,888	0,777	1,27	0,51
150 0	7 46	23 25	0,005	—	1 26	(12,3)	9 36	4 26	8,8	0,302	0,871	0,784	1,89	0,62
160 52	5 0	22 42	0,003	23 8	0 53,5	7,0	6 42	4 24	8,35	0,195	0,847	0,796	3,8	0,79
170 0	2 36	22 5	0,001	22 14	0 18	1,76	3 39	3 37	8,18	0,105	0,826	0,806	8,8	1,03
175 0	1 17	21 35	0,00015	21 37	0 2,8	0,25	1 49	1 4	1,93	0,051	0,808	0,828	39,5	2,32

auf (ein Teil von $p(\Delta)$ ist unter Annahme 1 in Figur 15 gezeichnet): Zunächst ist q stets kleiner als p, d. h. in der Vertikalkomponente ist der einmal reflektierte 1. Vorläufer im Verhältnis

zur direkten Welle schwächer als in der horizontalen. Dies muß stets der Fall sein, wenn i bei zunehmendem $\varDelta$ monoton abnimmt, d. h. falls

$$i_1 \leqq i_2, \quad \text{wenn} \quad \varDelta_1 \geqq \varDelta_2.$$

Nach Figur 4 ist

$$\bar{i}_1 \leqq \bar{i}_2, \quad \text{wenn} \quad i_1 \leqq i_2$$

und umgekehrt; es ist also auch

$$\bar{i}_1 \leqq \bar{i}_2, \quad \text{wenn} \quad \varDelta_1 \geqq \varDelta_2;$$

demnach ist $\bar{i}_{\varDelta} \leqq \bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}}$.

Da $\bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}} < 90^0$ ist, so gilt schließlich

$$\operatorname{tg} \bar{i}_{\varDelta} \leqq \operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{tg} \bar{i}_{\varDelta}}{\operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}}} \leqq 1.$$

Setzt man dies in (9) ein, so erhält man folgende Beziehung zwischen dem vertikalen (q) und horizontalen Bodenverrückungsverhältnis (p) von P_{R1} zu P:

$$(28) \qquad q_{\varDelta} = \frac{\operatorname{tg} \bar{i}_{\varDelta}}{\operatorname{tg} \bar{i}_{\frac{\varDelta}{2}}} p_{\varDelta} \leqq p_{\varDelta},$$

wobei das Gleichheitszeichen für $i = 90^0$, also den Herd gilt.

Auffallend ist ferner das starke Minimum der $p(\varDelta)$-Funktion bei $\varDelta = 18^0$. (In Figur 16 für Annahme 3, die bis $\varDelta = 40^0{,}3$ gleich Annahme 1 ist.) Es muß stets auftreten, solange die Annahme über die $i(\varDelta)$-Funktionin der Nähe von $\varDelta = 9^0$ nicht ganz wesentlich geändert wird, denn es rührt von P_{R1} und zwar von dem geringen Werte des Verhältnisses der reflektierten zur einfallenden Amplitude bei dem Einfallswinkel von $i = 68^0$ her, bei dem nur 5,4 % der einfallenden Amplitude reflektiert werden. Dieses Minimum der $p(\varDelta)$-Funktion bei $\varDelta = 18^0$ kann demnach nichts über das Erdinnere aussagen. Es müssen bei Herddistanzen unter $\varDelta = 35^0$ die einmal reflektierten Wellen Bodenverrückungen liefern, die horizontal zwischen $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{3}$ derjenigen der direkten Wellen betragen, vertikal noch weniger.

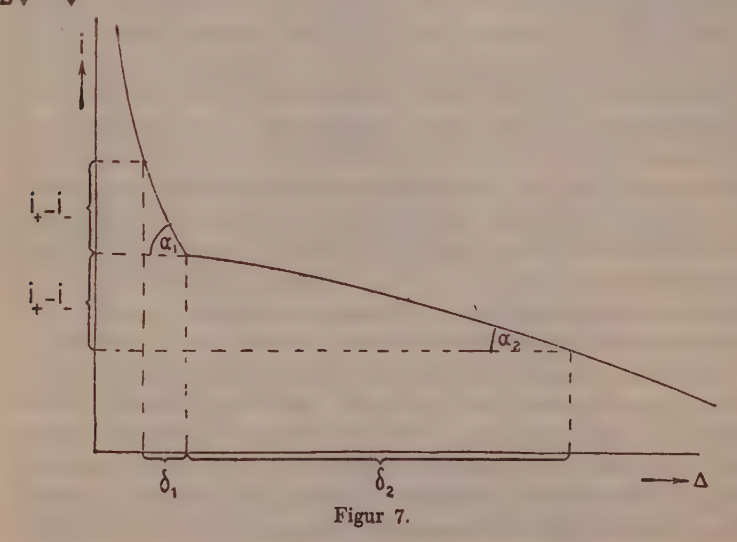
Das dritte Charakteristische an unsrer $p(\varDelta)$-Funktion ist der Sprung nach oben bei $\varDelta = 48^0$ und der Abfall in der doppelten Entfernung. Beide werden durch den einen Knick veranlaßt, den die $i(\varDelta)$-Funktion an der Stelle aufweist, an welcher die Strahlen auftreffen müßten, die den Kern gestreift haben. Während bei Entfernungen unter $\varDelta = 48^0$ die $i(\varDelta)$-Funk-

tion ohne große Neigungsänderungen verläuft, also auch $\delta_{\varDelta}$, das im Wesentlichen von der Tangentenrichtung der $i(\varDelta)$-Funktion abhängt, sich nicht stark ändert, dreht sie bei $\varDelta = 48^\circ$ plötzlich unstetig in eine Richtung, die der $\varDelta$-Achse fast parallel ist. (Die $\sin i(\varDelta)$-Funktion, die qualitativ wie die $i(\varDelta)$-Funktion verläuft, ist für Annahme 1 in Figur 6 wiedergeben.) Da der Uebergang in der Richtung der $i(\varDelta)$-Funktion als unstetig angenommen wurde, springt $\delta_{\varDelta}$ nach oben. p muß einen Sprung in gleicher Richtung ausführen, da sich an der Knickstelle außer $\delta_{\varDelta}$ nichts ändert. Analoges gilt in der doppelten Entfernung ($\varDelta = 96^\circ$) für $\delta_{\frac{\varDelta}{2}}$, also muß p dort nach unten springen.

Wird umgekehrt bei einer Herdentfernung $\varDelta > 30^\circ$ ein starkes Ansteigen der $p(\varDelta)$-Funktion bezw. ein Sprung nach oben beobachtet, und besteht in der halben Entfernung keine Singularität dieser Art, so bedeutet dies je nach der Steilheit des Anstiegs ein mehr oder minder schnelles bezw. ein unstetiges Flacherwerden der $i(\varDelta)$-Funktion. Das Verhältnis der beiden Werte von p an der Sprungstelle wird gegeben durch

$$\left(\frac{p\downarrow}{p\uparrow}\right)_{\varDelta} = \sqrt{\frac{\delta_{\varDelta}\downarrow}{\delta_{\varDelta}\uparrow}}.$$

Das Zeichen $\uparrow$ bedeutet wie in § 4 den Limes von kleineren $\varDelta$-Werten her, $\downarrow$ von größeren $\varDelta$-Werten her. Der einfacheren Schreibweise wegen ist für $p_{\varDelta\downarrow}$, $\delta_{\varDelta\downarrow}$, $\alpha_{\varDelta\downarrow}$ etc. gesetzt $p\downarrow$ bezw. $\delta_{\varDelta}\downarrow$, $\alpha\downarrow$ etc.



Figur 7.

Nach Figur 7 ist angenähert

$$\delta = (i_+ - i_-) \cot \alpha,$$

es gilt also mit genügender Annäherung

(29 a) $$\left(\frac{p\downarrow}{p\uparrow}\right)_\varDelta = \sqrt{\left(\frac{\cot \alpha\downarrow}{\cot \alpha\uparrow}\right)_\varDelta}\,.$$

In der doppelten Entfernung $2\varDelta$ ergibt sich für den Abfall der reziproke Wert. Dort ist

$$\left(\frac{p\downarrow}{p\uparrow}\right)_{2\varDelta} = \sqrt{\frac{\delta_\varDelta\uparrow}{\delta_\varDelta\downarrow}},$$

da sich nur der δ-Wert für die halbe Entfernung, der im Nenner steht, ändert. Es ist demnach

(29 b) $$\left(\frac{p\downarrow}{p\uparrow}\right)_{2\varDelta} = \sqrt{\frac{\delta_\varDelta\uparrow}{\delta_\varDelta\downarrow}} = \left(\frac{p\uparrow}{p\downarrow}\right)_\varDelta\,.$$

Trägt man die $p(\varDelta)$-Funktion, wie dies geschehen ist, in logarithmischem Maßstabe auf, so müssen Abfall und Anstieg gleich hoch sein, was in Figur 15 in der Tat der Fall ist. Die Gleichung (29 a) zeigt ferner, daß bei festem $\alpha\uparrow$ der Anstieg in der $p(\varDelta)$-Funktion mit $\sqrt{\cot \alpha\downarrow}$ wächst. Ist umgekehrt $\frac{p\downarrow}{p\uparrow}$ beobachtet, wie wir ja angenommen haben, so ist bei festem $\alpha\uparrow$ der $\cot \alpha\downarrow$ um so größer, also auch das Flacherwerden der $i(\varDelta)$-Funktion um so stärker, je größer $\frac{p\downarrow}{p\uparrow}$ ist. Infolge des flacheren Verlaufes der $i(\varDelta)$-Funktion wird die Laufzeit, das Integral der $\sin i(\varDelta)$-Funktion, die sich ja qualitativ wie die $i(\varDelta)$-Funktion verhält, größer als sie es bei glatt fortgesetzter Funktion wäre, d. h. die Geschwindigkeitszunahme der Erdbebenwellen wird in der Tiefe, die dem Knick entspricht, geringer (bezw. die Geschwindigkeitsabnahme größer). Wenn sich andererseits in einer Entfernung $\varDelta$ ein Abfall der ausgeglichenen $p^*(\varDelta)$-Funktion zeigt, so deutet dies analog auf wachsende Geschwindigkeitszunahme (bezw. verminderte Geschwindigkeitsabnahme) der Wellen in der in Betracht kommenden Tiefe hin. Das Hauptresultat dieser Betrachtungen läßt sich kurz in folgendem Gesetze formulieren:

Jeder Unstetigkeitsfläche im Erdinnern entspricht in der Grenzstrahlendistanz ein erster Sprung der Amplitudenfunktion und in der doppelten Grenz-

strahlendistanz ein zweiter Sprung in umgekehrtem Sinne als der erste. Dabei erfolgt der erste Sprung nach größeren oder kleineren Werten, je nachdem $\left|\frac{\partial i}{\partial \Delta}\right|$ plötzlich ab- oder zunimmt. Nur wenn diese Richtungsänderung der $i(\Delta)$-Funktion stetig erfolgt, bleibt die Amplitudenfunktion zusammenhängend.

Es ist jedoch nicht nur die Möglichkeit geboten, qualitativ den Verlauf der $i(\Delta)$-Funktion an ihren charakteristischen Stellen anzugeben, sondern es läßt sich auch durch das Studium der beobachteten und berechneten $p(\Delta)$-Funktion ziemlich scharf die Neigung der $\sin i(\Delta)$-Funktion bestimmen. Durch die Laufzeitfunktion ist die $\sin i(\Delta)$-Funktion in erster Annäherung gegeben. Nimmt man ferner an, die $\sin i(\Delta)$-Funktion, also auch die $i(\Delta)$-Funktion, sei von 0 bis Δ_0 genau auch der Richtung nach bekannt, so sind für die Berechnung von p zwischen Δ_0 und $2\Delta_0$ auf Grund der angenäherten $\sin i(\Delta)$-Funktion nur $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta$, $\cos i_\Delta$ und δ_Δ unsicher. Nun ist aber die $\sin i(\Delta)$-Funktion schon in ihrer ersten Annäherung durch Differenzieren der beobachteten Laufzeitfunktion der Höhe nach ziemlich richtig; dagegen können noch wesentliche Fehler in der Richtung der $\sin i(\Delta)$-Funktion vorkommen. Da sich die $i(\Delta)$-Funktion, die wir zunächst benutzen wollen, wie die $\sin i(\Delta)$-Funktion verhält, was Genauigkeit der Höhe im Verhältnis zur Genauigkeit der Neigung angeht, so können wir annehmen, daß der Fehler in $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta$ klein ist gegen den Fehler in δ_Δ, da ersteres nur von i, letzteres der Hauptsache nach von der Neigung α der $i(\Delta)$-Kurve gegen die Δ-Achse im Punkte Δ abhängt (Figur 7). Wir sehen deshalb zunächst $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta$ als richtig an und approximieren durch Variieren von δ_Δ allein die theoretische $p(\Delta)$-Funktion der beobachteten $p^*(\Delta)$-Funktion. Bezeichnen wir im folgenden die n^{te} Annäherung einer Größe G mit $[G]_n$, die beobachteten Werte von p mit p^*, den Neigungswinkel der $i(\Delta)$-Funktion gegen die Δ-Achse mit α, so ist nach (8a)

$$[p]_n = \frac{\left[\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}}\right]_n}{\left[\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta\right]_n} \cdot \left[\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\Delta}{2}}\right]_n \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot[\delta_\Delta]_n}{\left[\delta_{\frac{\Delta}{2}}\right]_n}} \cdot \sqrt{\frac{\cos\,[i_\Delta]_n}{\cos\left[i_{\frac{\Delta}{2}}\right]_n}}.$$

Nach unsren Annahmen sind die Größen, die für $\frac{\Delta}{2}$ gebildet sind, richtig, wenn $0 \leqq \Delta \leqq 2\Delta_0$; wir wollten außerdem den Fehler in $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\Delta$ und $\cos i_\Delta$ vernachlässigen. Demnach ist in $(n+1)^{\text{ter}}$ Annäherung

$$\left(\frac{p^*}{[p]_n}\right)_\Delta = \sqrt{\frac{[\delta_\Delta]_{n+1}}{[\delta_\Delta]_n}}.$$

Nach Figur 7 ist angenähert

$$\delta = (i_+ - i_-) \cot \alpha.$$

$(i_+ - i_-)$ ist für p^* und $[p]_n$ nahezu gleich, daher ist

$$\left(\frac{p^*}{[p]_n}\right)_\Delta = \sqrt{\left(\frac{\cot [\alpha]_{n+1}}{\cot [\alpha]_n}\right)_\Delta}$$

(30a) $$\operatorname{tg} ([\alpha]_{n+1})_\Delta = \left(\frac{[p]_n}{p^*}\right)^2_\Delta \cdot \operatorname{tg} ([\alpha]_n)_\Delta.$$

Ist $i = f_n(\Delta)$ die n^{te} Annäherung der $i(\Delta)$-Funktion, so ist

$$\operatorname{tg} [\alpha]_{n+1} = f'_{n+1}(\Delta), \quad \operatorname{tg} [\alpha]_n = f'_n(\Delta).$$

Sei ferner β der Neigungswinkel der $\sin i(\Delta)$-Funktion gegen die Δ-Achse, so ist

$$\operatorname{tg} [\beta]_{n+1} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \sin f_{n+1}(\Delta) = \cos f_{n+1}(\Delta) . f'_{n+1}(\Delta) = \cos [i]_{n+1} . \operatorname{tg} [\alpha]_{n+1}$$

$$\operatorname{tg} [(\beta]_{n+1})_\Delta = \cos ([i]_{n+1})_\Delta . \operatorname{tg} ([\alpha]_{n+1})_\Delta$$

$$\operatorname{tg} [\beta]_n = \frac{\partial}{\partial \Delta} \sin f_n(\Delta) = \cos f_n(\Delta) . f'_n(\Delta) = \cos [i]_n \operatorname{tg} [\alpha]_n$$

$$\operatorname{tg} ([\beta]_n)_\Delta = \cos ([i]_n)_\Delta . \operatorname{tg} ([\alpha]_n)_\Delta.$$

Vernachlässigt man die Differenz zwischen $\cos ([i]_n)_\Delta$ und $\cos [i]_{n+1})_\Delta$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\operatorname{tg} [\beta]_{n+1}}{\operatorname{tg} [\beta]_n}\right)_\Delta = \left(\frac{\operatorname{tg} [\alpha]_{n+1}}{\operatorname{tg} [\alpha]_n}\right)_\Delta, \quad \left(\frac{\operatorname{tg} [\beta]_{n+1}}{\operatorname{tg} [\alpha]_{n+1}}\right)_\Delta = \left(\frac{\operatorname{tg} [\beta]_n}{\operatorname{tg} [\alpha]_n}\right)_\Delta;$$

Multipliziert man (30a) mit der letzten Gleichung, so erhält man für die Neigungswinkel der $\sin i(\Delta)$-Funktion gegen die Δ Achse eine Formel analog (30a). Es ist

(30b) $$\operatorname{tg} ([\beta]_{n+1})_\Delta = \left(\frac{[p]_n}{p^*}\right)^2_\Delta \cdot \operatorname{tg} ([\beta]_n)_\Delta$$

Diese Gleichung (30b) wird in § 7 in etwas veränderter Form bei

der Aufstellung einer neuen $\sin i(\varDelta)$-Funktion mit verwandt werden. In ihr ist also $([p]_n)_\varDelta$ unter Annahme n berechnet, $p^*_\varDelta$ beobachtet, $([\beta]_n)_\varDelta$ der Neigungswinkel der $\sin i(\varDelta)$-Funktion an der Stelle $\varDelta$ gegen die $\varDelta$-Achse in n^{ter} Annäherung, $([\beta]_{n+1})_\varDelta$ der entsprechende Neigungswinkel an der Stelle $\varDelta$ der verbesserten $\sin i(\varDelta)$-Funktion, also der $n+1^{\text{ten}}$ Annäherung.

Zum Schlusse dieses Paragraphen mögen noch einige Betrachtungen über die Fehler der Rechnungen folgen. Bei der benutzten $i(\varDelta)$-Funktion betrug der Ablesefehler höchstens 5′ in i. In dem für die Beobachtung hauptsächlich in Betracht kommenden Gebiete schwankt $\varDelta$ zwischen 40° und 95°, $i_\varDelta$ zwischen 30° und 19°, $i_{\frac{\varDelta}{2}}$ zwischen 50° und 29°. Aus den Kurven für $\frac{u}{A_i}$ bezw. $\frac{A_r}{A_i}$ kann $\frac{u}{A_i}$ auf 0,001, $\frac{A_r}{A_i}$ auf 0,0005, bei den geringen Werten auf 0,0002 geschätzt werden. Der Fehler in $\frac{u}{A_i}$ wird daher 0,003, der in $\frac{A_r}{A_i}$ 0,001 kaum übersteigen. In dem für uns hauptsächlich in Betracht kommenden Gebiete schwankt $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$ zwischen 0,8 und 1,1; wir wollen daher den Fehler in $\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$ zu 3‰ annehmen. $\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$ schwankt zwischen 1,05 und 1,55, sein Fehler sei 2½‰. $\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$ bewegt sich zwischen 0,25 und 0,65, sein Fehler sei ebenfalls 2½‰. Wir greifen also sehr hoch, wenn wir den Fehler des Produktes

$$\sqrt{\frac{\cos i_\varDelta}{\cos i_{\frac{\varDelta}{2}}}\cdot\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}\cdot\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}:\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta}$$

zu 1% annehmen. Am wenigsten genau lassen sich die δ bestimmen. Wie wir sahen, sind diese proportional dem Cotangens des Neigungswinkels der $i(\varDelta)$-Funktion gegen die $\varDelta$-Achse. Nehmen wir nun an, dieser Winkel sei einerseits infolge der ungenauen Zeichnung der $i(\varDelta)$-Funktion aus diskreten Punkten, besonders bei den empirisch gewählten Annahmen 2 und 3, andererseits infolge der ungenauen Bestimmung der Tangentenrichtung bezw. bei der Ab-

lesung mit einem Blatte infolge schiefer Lage desselben oder wechselnder Krümmung der Kurve auf 2° falsch, so ist

bei einem Neigungswinkel α (Fig. 7) von	80°	60°	40°	20°	10°	5°
der Cotangens des Winkels	0,176	0,577	1,19	2,75	5,7	11,4
der Fehler im Cotangens wirklich	0,036	0,047	0,084	0,30	1,2	4,6
„ „ „ „ in %	20	8	7	11	21	40%
„ „ in $\sqrt{\delta}$ in %	10	4	3½	5½	10½	20%

Unter Zugrundelegung dieser Werte gibt Tabelle 5 den Fehler von p bei verschiedenen Neigungswinkeln $\alpha_{\varDelta}$ und $\alpha_{\frac{\varDelta}{2}}$ der $i(\varDelta)$-Funktion gegen die $\varDelta$-Achse unter den ungünstigsten Annahmen.

Tabelle 5.

Höchstfehler von p in % bei verschiedener Neigung der $i(\varDelta)$-Funktion für $40° < \varDelta < 95°$.

$\alpha_{\frac{\varDelta}{2}}$ \ $\alpha_{\varDelta}$	80°	60°	40°	20°	10°	5°
80°	21	15	14½	16½	21½	31
60°	15	9	8½	10½	15½	25
40°	14½	8½	8	10	15	24½
20°	16½	10½	10	12	17	26½
10°	21½	15½	15	17	22	31½
5°	31	25	24½	26½	31½	41

Die vorwiegend vorkommenden Werte sind umrahmt.

Die Tabelle zeigt, daß bei der Berechnung von p selbst bei den günstigsten Neigungen Fehler von 10% durchaus möglich, solche von 5%, die einem Fehler des Neigungswinkels von 1° entsprechen, sicher zu erwarten sind. Aber selbst Fehler von 30% können bei ungünstigen Neigungswinkeln in der Rechnung durchaus vorkommen, doch zeigen dann sofort beim Eintragen in die $p(\varDelta)$-Kurve größere oder kleinere Unregelmäßigkeiten, die völlig unbegründet sind, daß eine Nachprüfung der Tangentenrichtungen der $i(\varDelta)$-Funktion an den Stellen, die den holperigen Stellen der $p(\varDelta)$-Funktion ent-

sprechen, nötig ist. Bei Neigungen der $i(\varDelta)$-Funktion gegen die $\varDelta$-Achse unter 5° ist die $i(\varDelta)$-Kurve meist so wenig gekrümmt, daß die Tangente ziemlich genau zu bestimmen ist. Es wachsen also dann die Fehler nicht weiter. Die schließlich vorliegende berechnete $p(\varDelta)$-Funktion dürfte im allgemeinen um höchstens 5 %, an den ungünstigsten Stellen, vor allem den Spitzen, um höchstens 10 % falsch sein. Derartige Fehler haften aber auch sicher den Beobachtungen an. Wenn sich an einer Stelle Differenzen zwischen der berechneten und der beobachteten Amplitudenfunktion zeigen, so läßt sich demnach ziemlich sicher entscheiden, inwieweit diesen Differenzen Realität zuzuschreiben ist. Die Genauigkeit der berechneten $p(\varDelta)$-Funktion genügt völlig den Bedingungen, die man an sie stellen muß, wenn man noch bedenkt, daß gerade da, wo die größten Fehler vorkommen, an sehr flachen oder steilen Stellen der $i(\varDelta)$-Funktion, die Zoeppritzsche Methode sehr empfindlich ist, da dort kleine Aenderungen in der Neigung der $i(\varDelta)$-Funktion sehr große Aenderungen der $p(\varDelta)$-Funktion zur Folge haben. Es läßt sich also überall die Neigung der wahren sin $i(\varDelta)$-Funktion mit genügender Annäherung angeben, und das Ziel der ganzen Zoeppritzschen Methode, eine möglichst gute sin $i(\varDelta)$-Funktion und mit dieser eine möglichst genaue Kenntnis der Konstitution der Erde, hinreichend genau erreichen.

§ 6. Beobachtete Amplitudenfunktion und Diskussion.

(Von L. Geiger.)

Beobachtungsmaterial. Ich habe an Hand des ganzen Göttinger Erdbebenmaterials von 1904 bis Juni 1911 sorgfältige Messungen über das Bodenverrückungsverhältnis der 1 mal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen ausgeführt. Die Horizontalkomponenten wurden an den Diagrammen des Wiechertschen astatischen 1200 kg-Pendels, die Vertikalkomponente an denjenigen des Wiechertschen 1300 kg-Vertikalpendels gemessen. Vor September 1905 war das Vertikalinstrument noch nicht in Betrieb. Die in Tabelle (6) ausführlich mitgeteilten Messungen wurden folgendermaßen ausgeführt:

Herddistanz. Zuerst wurde die Herddistanz möglichst scharf bestimmt. Dazu wurden die folgenden 3 Methoden herangezogen: 1) Die Zeitdifferenz zwischen den 1. und 2. Vorläufern unter Verwendung der Wiechert-Zoeppritzschen Laufzeitfunktion. 2) Für die Jahre 1904 bis 1906 liegen die Erdbebenkataloge des Zentralbüros der internationalen seismologischen

Assoziation fertig vor, sodaß viele Bebenherde und ihre Distanzen von Göttingen darin direkt gefunden werden konnten. 3) Oft setzen die Vorläufer unscharf ein, dagegen sind mehrere Reflexionen gut ausgeprägt; dann habe ich ein von mir seit Jahren mit Erfolg benütztes Verfahren angewandt: die Wiechert-Zoeppritz schen Laufzeitkurven der direkten und reflektierten Vorläufer werden im Zeitmaßstabe der Seismogramme auf Pauspapier gezeichnet; man schiebt dieses Papier so lange auf dem Seismogramm hin und her, bis alle Phasen des Bebens möglichst gut mit den Laufzeitkurven zusammenfallen. Dann wird die zugehörige Herddistanz abgelesen. Dieses Ausgleichungsverfahren geht äußerst rasch and bequem. Es wurden nur solche Beben weiter bearbeitet, deren Herddistanz auf ± 100 km sichergestellt schien. Den Tabellen von V. Conrad[1]) wurde die Zeitdifferenz zwischen den direkten (P) und 1 mal reflektierten (P_{R1}) ersten Vorläufern für das gefundene Δ entnommen.

Amplitudenverhältnis. Mit einem auf Glas geteilten Millimeternetz und Lupe wurde in allen 3 Komponenten die Amplitude von P und von P_{R1} im Diagramm gemessen, und zwar wurde jeweilen das Maximum der betreffenden Phase gemessen. Ein ? bedeutet, daß die Messung unmöglich war, entweder weil kein Diagramm existiert, oder weil das Diagramm beschädigt ist, oder weil die Phase von irgend welchen Störungen, vor allem mikroseismischer Bodenunruhe, überlagert ist. Ein — bedeutet, daß die Phase nicht merklich hervortritt.

Um aus einer gemessenen Seismogrammamplitude die zugehörige Bodenverrückungsamplitude zu erhalten, ist eine doppelte Integration nötig[2]). Unter der Annahme von Sinusschwingungen erfolgt diese Integration nach der bekannten Wiechertschen Gleichung, indem die Beschleunigungsamplitude mit

$$k \,.\, \sqrt{(1-\Pi)^2 + l\Pi}$$

multipliziert wird; darin bedeuten k und l Konstanten, und Π ist das Quadrat des Verhältnisses der Beschleunigungsperiode zur Instrumentalperiode. Diese Formel ist auch dann noch hinreichend genau, wenn das Beschleunigungsdiagramm stark gegen Sinusschwingungen abweicht. In der vorliegenden Arbeit kam es aber

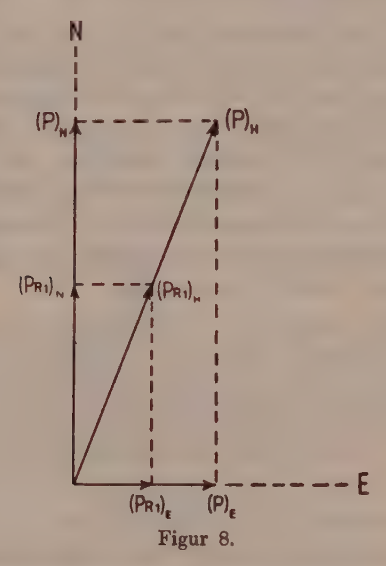
---

1) V. Conrad, Mitt. d. Wiener Erdbebenkomm. XXXIX. 1910.

2) Vergl. H. Arnold, Göttinger Diss. 1909 und Beitr. z. Geophysik X, S. 269. 1910.

nicht darauf an, den Absolutwert der wahren Bodenverrückungsamplitude von P und P_{R1} zu ermitteln, sondern es war nur das Amplitudenverhältnis der Bodenverrückung von P zu derjenigen von P_{R1} gesucht. Nun ist aber prinzipiell zu erwarten, und meine Beobachtungen bestätigen dies auch durchweg, daß P und P_{R1} die gleiche Periode besitzen. Darum ist Π für beide Wellen gleich, also auch der ganze Faktor $k \cdot \sqrt{(1-\Pi)^2 + l\Pi}$. Es war darum überhaupt unnötig, die Amplitude der Bodenverrückung zu berechnen, sondern man konnte direkt das Amplitudenverhältnis der Beschleunigungen an Stelle desjenigen der Bodenverrückungen setzen.

Dieses Verhältnis wurde für die 3 Komponenten getrennt gebildet. Theoretisch ist zu erwarten, daß dieses Verhältnis bei den beiden Horizontalkomponenten gleich ist, während es bei der Vertikalkomponente einen durchaus anderen Wert erhalten wird. Diese erstere Behauptung ist an Hand der Figur 8 leicht einzusehen:



Figur 8.

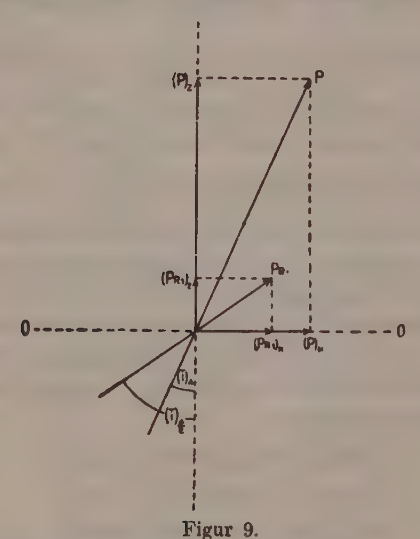
Darin bezeichnet N die Nord-, E die Ostrichtung. Weil P und P_{R1} Longitudinalwellen sind, liegen sie beide in der Vertikalebene durch Herd, Station und Erdmittelpunkt, passieren also die Station im gleichen Azimut. Die Horizontalprojektion der Bodenverrückungen P und P_{R1} seien durch die Vektoren $(P)_H$ und $(P_{R1})_H$ dargestellt. Beobachtet werden aber die Projektionen dieser beiden Vektoren auf die Richtungen N und E, also die Vektoren $(P)_N$, $(P_{R1})_N$ und $(P)_E$, $(P_{R1})_E$. Es verhält sich aber

$$\frac{(P_{R1})_N}{(P)_N} = \frac{(P_{R1})_H}{(P)_H},$$

$$\frac{(P_{R1})_E}{(P)_E} = \frac{(P_{R1})_H}{(P)_H}, \qquad \text{also}$$

(31) $$\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_E = \left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_N, \text{ q. e. d.}$$

Der Zusammenhang zwischen dem vertikalen Bodenverrückungsverhältnis $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_Z$ und dem horizontalen Verhältnis $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_H$ ist ebenfalls leicht abzuleiten: Die Zeichenebene der Figur 9 ist die vertikale Ebene durch Herd, Station und Erdmittelpunkt, die Bodenverrückungen P und P_{R1} liegen also in dieser Ebene.



Figur 9.

0 - - - 0 sei die Erdoberfläche. Der Vektor P resp. P_{R1} repräsentiere die Bodenverrückung, die gegen die Vertikale unter dem scheinbaren Einfallswinkel $\bar{i}_{\Delta}$ resp. $\bar{i}_{\frac{\Delta}{2}}$ geneigt ist. Die Horizontalprojektion von P resp. P_{R1} ist dann $(P)_H$ resp. $(P_{R1})_H$, die Vertikalprojektion $(P)_Z$ resp. $(P_{R1})_Z$. Dann ist

$$\frac{(P)_H}{(P)_Z} = \operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\Delta}$$

und

$$\frac{(P_{R1})_H}{(P_{R1})_Z} = \operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\frac{\Delta}{2}};$$

dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so folgt

$$\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_H = \left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_z \cdot \frac{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\frac{\Delta}{2}}}{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_\Delta},$$

oder in der in § 3 benützten Bezeichnung

$$p_\Delta = q_\Delta \cdot \frac{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\frac{\Delta}{2}}}{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_\Delta}. \tag{9}$$

Um für die weitere Untersuchung den wahrscheinlichsten Wert für das Verhältnis $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_H$ der Horizontal-Komponenten zu bekommen, wurde nach (31) ein Mittel aus $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_H$ und $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_z$ genommen und den beiden zu mittelnden Werten je nach der Größe der gemessenen Amplituden mehr oder weniger Gewicht beigelegt.

Jedes so erhaltene Koordinatenpaar $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_H, \Delta$ resp. $\left(\frac{P_{R1}}{P}\right)_z, \Delta$ erhielt schließlich das Gewicht 1, 2, 3 oder 4, wobei 1 das geringste Gewicht bedeutet. Die Erteilung dieser Gewicht erfolgte nach Maßgabe des Gesamturteils über die Güte der Bestimmung der beiden Koordinaten. Tabelle 6 enthält sämtliche Beobachtungen, die in den Figuren 10 und 11 in logarithmischem Maßstabe dargestellt und durch je eine Kurve p^* resp. q^* ausgeglichen sind. In den beiden Figuren bedeuten

Gewicht	horizontal	vertikal
1	○	□
2	●	■
3	◎	⧠
4	◉	▣

Die Nummern am untern Rande entsprechen denjenigen in Tabelle 6, sie vermitteln also den Uebergang von den Figuren in die Tabelle. Umgekehrt geht man von der Tabelle in die Figuren mittelst der Koordinaten $\frac{P_{R1}}{P}, \Delta$.

Tabelle 6.
Beobachtete Bodenverrückungen.

No.	Datum	Phase	A_E mm	A_N mm	A_Z mm	P_{R1}/P E	P_{R1}/P N	P_{R1}/P Z	Gewicht	Δ Megam.
1	1904 Januar 20	P	1,3	0,5	?	0,39	1,0	?	$H = 1$	9,2
		P_{R1}	0,5	0,5	?	0,6			$Z = ?$	
2	„ Juni 7	P	0,5	0,4	?	1,2	1,25	?	$H = 2$	9,3
		P_{R1}	0,6	0,5	?	1,22			$Z = ?$	
3	„ „ 24	P	0,3	0,3	?	0,33	0,33	?	$H = 2$	8,2
		P_{R1}	0,1	0,1	?	0,33			$Z = ?$	
4	„ „ 25 (15^h)	P	2,1	2,0	?	0,40	0,40	?	$H = 4$	8,1
		P_{R1}	0,85	0,8	?	0,40			$Z = ?$	
5	„ „ 25 (21^h)	P	1,9	2,0	?	0,42	0,50	?	$H = 2$	8,1
		P_{R1}	0,8	1,0	?	0,46			$Z = ?$	
6	„ „ 27	P	1,25	1,5	?	0,40	0,53	?	$H = 3$	8,0
		P_{R1}	0,5	0,8	?	0,46			$Z = ?$	
7	„ Juli 24	P	0,5	0,75	?	?	0,33	?	$H = 1$	8,0
		P_{R1}	?	0,25	?				$Z = ?$	
8	1905 Mäz 22	P	0,6	0,6	?	0,92	0,83	?	$H = 3$	8,4
		P_{R1}	0,55	0,5	?	0,88			$Z = ?$	
9	„ Juni 2	P	0,2	0,2	?	1,5	1,5	?	$H = 3$	9,0
		P_{R1}	0,3	0,3	?	1,5			$Z = ?$	
10	„ Juli 6	P	?	0,6	?	?	0,92	?	$H = 2$	9,1
		P_{R1}	?	0,55	?				$Z = ?$	
11	„ „ 9	P	4,6	2,9	?	1,00	0,97	?	$H = 4$	6,2
		P_{R1}	4,6	2,8	?	0,99			$Z = ?$	
12	„ „ 23	P	14	7,5	?	1,36	1,20	?	$H = 3$	6,1
		P_{R1}	19	9	?	1,31			$Z = ?$	
13	„ September 26	P	?	?	0,4	?	?	0,75	$H = ?$	5,6
		P_{R1}	?	?	0,3				$Z = 1$	
14	1906 Januar 21	P	1,5	0,7	?	1,60	2,15	?	$H = 3$	8,5
		P_{R1}	2,4	1,5	?	1,96			$Z = ?$	
15	„ April 13	P	?	?	0,5	?	?	0,4	$H = ?$	9,2
		P_{R1}	?	?	0,2				$Z = 1$	
16	„ August 30	P	0,15	0,1	0,3	2,0	2,0	1,0	$H = 1$	9,9
		P_{R1}	0,30	0,2	0,3	2,0			$Z = 1$	
17	„ September 7	P	0,14	0,15	?	1,43	1,67	?	$H = 1$	9,1
		P_{R1}	0,20	0,25	?	1,55			$Z = ?$	

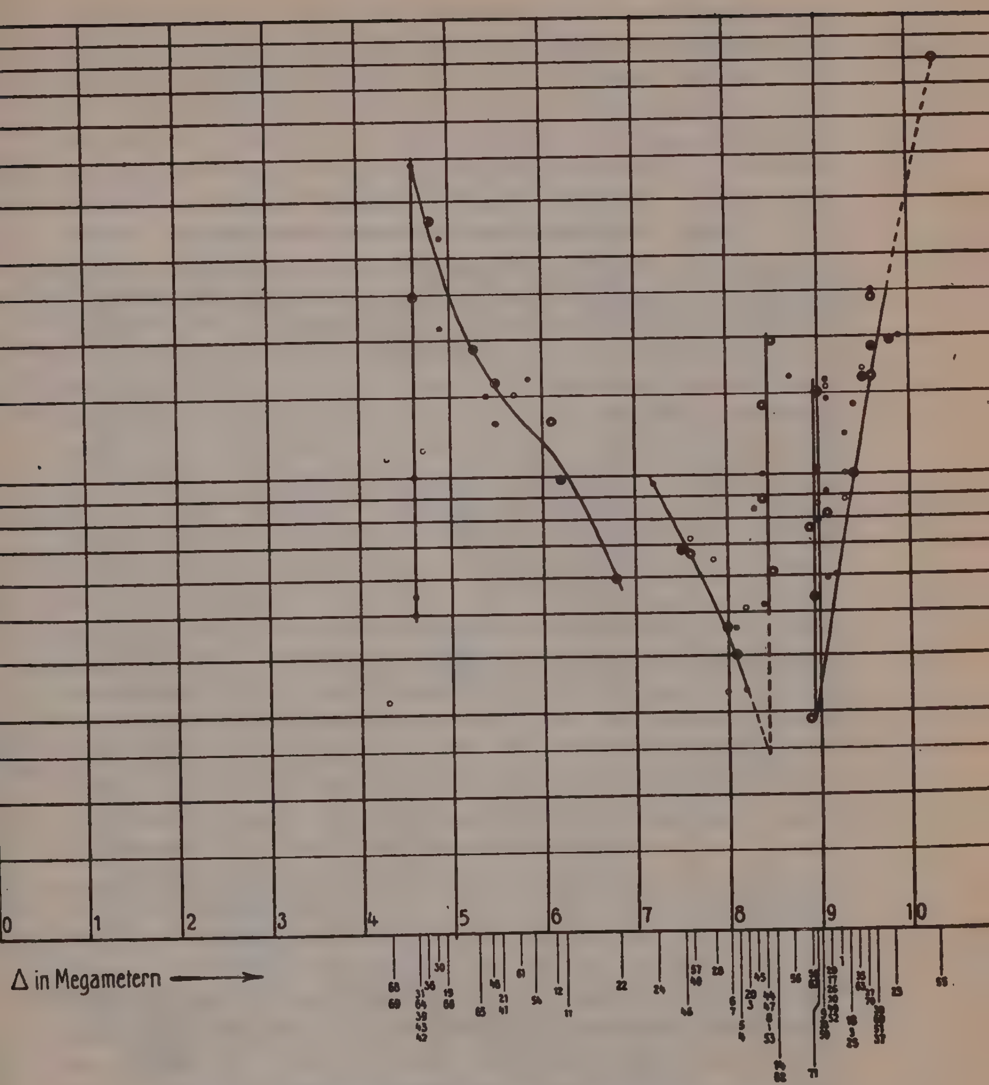
No.	Datum	Phase	A_E mm	A_N mm	A_Z mm	P_{R1}/P E	N	Z	Gewicht	Δ Megam
18	1906 September 28	P	0,3	0,15	0,7	1,0	1,0	0,86	$H = 1$	9,3
		P_{R1}	0,3	0,15	0,6	1,0			$Z = 1$	
19	„ Oktober 24	P	0,4	0,1	0,6	3,5	2,5	1,3	$H = 2$	4,9
		P_{R1}	1,4	0,25	0,8	3,3			$Z = 1$	
20	„ Dezember 3/4	P	1,2	0,5	3,0	0,42	0,60	0,17	$H = 1$	8,2
		P_{R1}	0,5	0,3	0,5	0,51		(0,26)	$Z = 4$	
21	„ „ 22	P	3,1	1,2	2,45	1,70	1,42	0,67	$H = 4$	5,5
		P_{R1}	5,25	1,7	1,65	1,61		(1,10)	$Z = 3$	
22	„ „ 23	P	0,4	1,4	1,9	0,63	0,57	0,29	$H = 4$	6,8
		P_{R1}	0,25	0,8	0,55	0,59		(0,44)	$Z = 3$	
23	1907 April 15	P	3,4	1,6	3,6	1,94	1,94	0,97	$H = 4$	9,8
		P_{R1}	6,6	3,1	3,5	1,94		(1,57)	$Z = 3$	
24	„ Mai 25	P	0,5	0,65	1,7	1,0	0,93	0,53	$H = 2$	7,2
		P_{R1}	0,5	0,6	0,9	0,96		(0,77)	$Z = 2$	
25	„ Juni 1	P	0,4	—	0,45	0,88	—	0,78	$H = 1$	9,3
		P_{R1}	0,35	—	0,35				$Z = 1$	
26	„ Juli 1	P	0,4	0,15	0,4	1,5	1,34	1,0	$H = 2$	9,1
		P_{R1}	0,6	0,2	0,4	1,45			$Z = 1$	
27	„ „ 20	P	0,15	—	0,5	1,7	—	0,5	$H = 1$	9,5
		P_{R1}	0,25	—	0,25				$Z = 1$	
28	„ August 17	P	0,5	0,5	1,5	0,70	0,60	0,33	$H = 1$	7,85
		P_{R1}	0,35	0,3	0,5	0,65			$Z = 1$	
29	„ Oktober 16	P	0,2	0,15	0,2	1,5	1,7	0,75	$H = 2$	9,1
		P_{R1}	0,3	0,25	0,15	1,6			$Z = 1$	
30	„ „ 21	P	?	1,6	5,4	?	3,6	1,35	$H = 4$	4,8
		P_{R1}	?	5,8	7,3			(2,52)	$Z = 4$	
31	„ „ 27	P	0,3	0,07	0,5	4,0	6,4	1,3	$H = 2$	4,6
		P_{R1}	1,2	0,45	0,65	4,8		(2,5)	$Z = 2$	
32	„ Dezember 30	P	?	?	0,75	?	?	1,0	$H = ?$	9,0
		P_{R1}	?	?	0,75			(1,63)	$Z = 2$	
33	1908 Januar 11	P	0,4	0,3	0,5	0,88	1,17	0,50	$H = 2$	9,0
		P_{R1}	0,35	0,35	0,25	1,03			$Z = 1$	
34	„ „ 15	P	0,15	0,2	0,65	0,87	0,85	0,3	$H = 1$	9,0
		P_{R1}	0,13	0,17	0,2	0,86			$Z = 1$	
35	„ März 5	P	0,2	0,15	0,4	1,5	1,3	0,5	$H = 2$	9,4
		P_{R1}	0,3	0,2	0,2	1,4		(0,81)	$Z = 2$	
36	„ „ 12	P	0,3	—	0,4	1,17	—	0,63	$H = 1$	4,7
		P_{R1}	0,35	—	0,25				$Z = 1$	

No.	Datum	Phase	A_E mm	A_N mm	A_Z mm	PR1/P E	N	Z	Gewicht	Δ Megam.
37	1908 März 26/27	P	6,0	2,2	2,1	1,42	2,05	1,43	H = 3	9,6
		PR1	8,5	4,5	3,0	1,63		(2,32)	Z = 2	
38	„ „ 27	P	0,6	0,45	0,8	2,42	1,67	1,1	H = 2	9,6
		PR1	1,45	0,75	0,9	2,50		(1,78)	Z = 2	
39	„ April 16	P	0,2	—	0,3	1,0	—	1,0	H = 1	4,6
		PR1	0,2	—	0,3				Z = 1	
40	„ Mai 15	P	0,25	0,9	1,3	0,80	0,61	0,69	H = 3	7,6
		PR1	0,2	0,55	0,9	0,67		(0,98)	Z = 2	
41	„ Juni 3	P	0,15	—	—	1,3	—	—	H = 1	5,5
		PR1	0,2	—	—				Z = -	
42	„ Oktober 23	P	1,0	—	1,9	0,5	—	0,26	H = 2	4,6
		PR1	0,5	—	0,5				Z = 1	
43	„ „ 24	P	1,1	—	2,0	0,55	—	0,35	H = 2	4,6
		PR1	0,6	—	0,7				Z = 1	
44	„ November 6 (7h)	P	0,25	0,5	0,8	1,60	1,30	1,25	H = 3	8,4
		PR1	0,4	0,65	1,0	1,40		(1,99)	Z = 2	
45	„ „ 6 (14h)	P	—	0,3	0,8	—	0,84	0,19	H = 2	8,3
		PR1	—	0,25	0,15			(0,29)	Z = 3	
46	„ Dezember 12 (3h)	P	1,1	—	1,85	0,68	—	0,35	H = 4	7,5
		PR1	0,75	—	0,65			(0,50)	Z = 2	
47	„ „ 12 (19h)	P	0,5	—	0,8	1,0	—	?	H = 1	8,4
		PR1	0,5	—	?				Z = -	
48	„ „ 18	P	0,4	?	1,0	1,5	—	0,8	H = 2	5,4
		PT1	0,6	?	0,8			(1,34)	Z = 3	
49	1909 März 13	P	0,9	1,05	1,3	0,78	0,86	0,69	H = 3	9,1
		PR1	0,7	0,9	0,9	0,82		(1,12)	Z = 2	
50	„ April 14	P	0,7	?	0,8	0,79	?	1,0	H = 1	9,0
		PR1	0,55	?	0,8				Z = 1	
51	„ Juli 30	P	1,2	0,6	1,45	2,20	1,75	1,72	H = 4	9,6
		PR1	2,65	1,05	2,5	1,90		(2,78)	Z = 2	
52	„ August 14	P	0,15	0,2	0,5	0,67	0,50	0,30	H = 2	9,1
		PR1	0,1	0,1	0,15	0,5[illegible]			Z = 1	
53	„ September 8	P	0,35	0,6	1,6	0,57	0,50	0,125	H = 2	8,4
		PR1	0,2	0,3	≦0,2	0,52		(0,199)	Z = 4	
54	„ Oktober 20/21	P	0,4	?	?	1,63	?	?	H = 2	5,85
		PR1	0,65	?	?				Z = -	
55	„ „ 31	P	0,05	0,05	0,2	10	5	2,25	H = 3	10,3
		PR1	0,5	0,25	0,45	8			Z = 1	

No.	Datum	Phase	A_E mm	A_N mm	A_Z mm	PR1/P E	N	Z	Gewicht	Δ Megam.
56	1910 Januar 1	P	0,45	0,15	0,55	1,11	2,67	1,0	H = 2	8,7
		PR1	0,5	0,4	0,55	1,63			Z = 1	
57	„ „ 23	P	0,35	—	?	0,72	?	?	H = 1	7,6
		PR1	0,25	—	0,3				Z = -	
58	„ April 12	P	2,7	1,2	5,0	0,72	0,84	0,32	H = 3	8,9
		PR1	1,95	1,0	1,6	0,76		(0,52)	Z = 4	
59	„ Mai 22	P	?	?	1,5	?	?	0,23	H = -	8,5
		PE1	?	?	0,35			(0,38)	Z = 3	
60	„ „ 31	P	0,35	?	0,5	2,43	?	1,2	H = 3	9,6
		PR1	0,85	?	0,6			(1,94)	Z = 2	
61	„ Juni 14	P	0,1	—	0,15	1,5	?	0,67	H = 1	5,7
		PR1	0,15	—	0,1				Z = 1	
62	„ September 9	P	—	0,9	0,85	?	0,61	0,41	H = 3	8,5
		PR1	—	0,55	0,35			(0,68)	Z = 3	
63	„ „ 24 (4h)	P	0,45	0,15	0,55	1,00	1,00	0,91	H = 2	9,4
		PR1	0,45	0,15	0,5	1,00		(1,47)	Z = 2	
64	1911 Januar 1	P	0,9	0,2	1,2	2,56	2,0	0,75	H = 4	4,6
		PR1	2,3	0,4	0,9	2,47		(1,45)	Z = 2	
65	„ „ 3/4	P	19,3	5,4	10,3	1,90	1,87	0,89	H = 4	5,25
		PR1	36,5	10,1	9,1	1,89		(1,52)	Z = 4	
66	„ Februar 18	P	1,1	0,3	1,5	2,10	2,17	0,67	H = 2	4,9
		PR1	2,3	0,65	1,0	2,12		(1,23)	Z = 2	
67	„ April 10	P	0,85	—	0,8	0,29	?	0,38	H = 3	8,9
		PR1	0,25	—	0,3			(0,62)	Z = 2	
68	„ „ 18	P	0,45	—	0,4	1,11	?	0,75	H = 1	4,3
		PR1	0,5	—	0,3				Z = 1	
69	„ „ 29 (5h)	P	?	0,4	0,4	?	0,32	0,32	H = 1	4,3
		PR1	?	0,13	0,13				Z = 1	
70	„ Juni 6	P	2,0	0,9	2,4	1,63	1,61	0,54	H = 4	9,5
		PR1	3,25	1,45	1,3	1,62		(0,87)	Z = 3	
71	„ „ 15	P	19,0	11,4	29,5	0,58	0,49	0,173	H = 4	8,95
		PR1	11,0	5,6	5,1	0,52		(0,282)	Z = 3	

Der Vergleich der beiden Figuren 10 und 11 zeigt, daß p^* und q^* durchaus denselben Habitus besitzen, daß jedoch q^* wesentlich tiefer als p^* liegt. Dies ist im Einklang mit der Theorie (vgl. § 3).

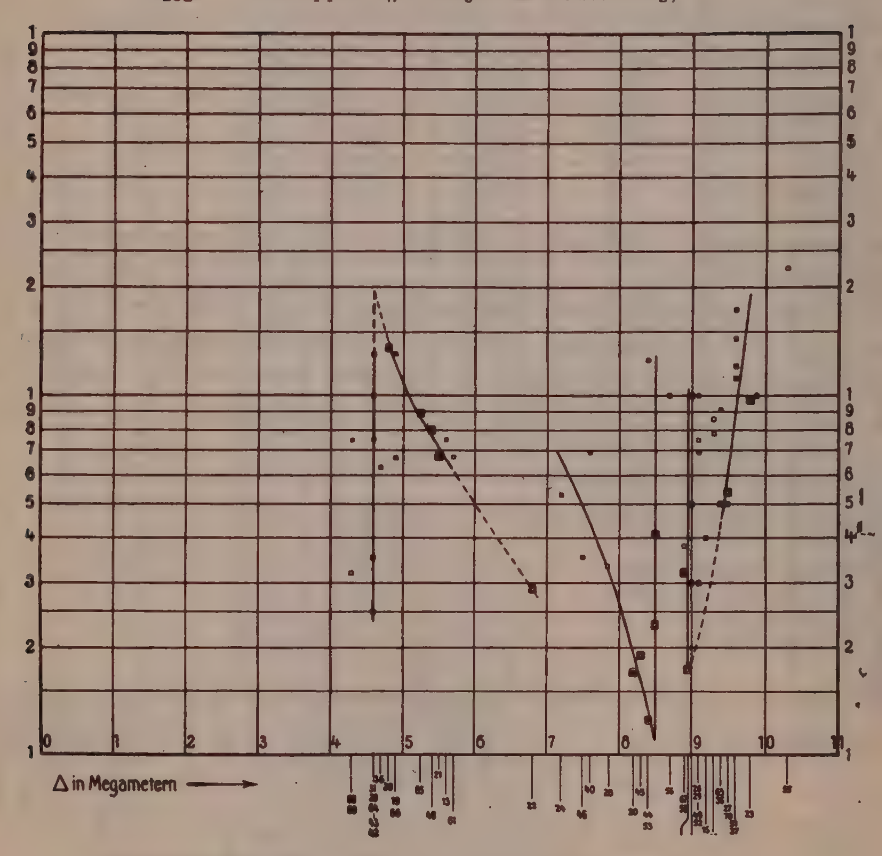
Transformation. Für die weitere Untersuchung ist es natürlich erwünscht, die wahrscheinlichste Amplitudenfunktion auf



Figur 10. Beobachtete Horizontal-Bodenverrückungsverhältnisse.

Grund sämtlicher horizontaler und vertikaler Beobachtungen zu haben. Dazu müßten z. B. alle vertikalen Punkte mittelst der Beziehung

$$p_{\varDelta} = q_{\varDelta} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\frac{\varDelta}{2}}}{\operatorname{tg}(\bar{i}_0)_{\varDelta}} \tag{9}$$



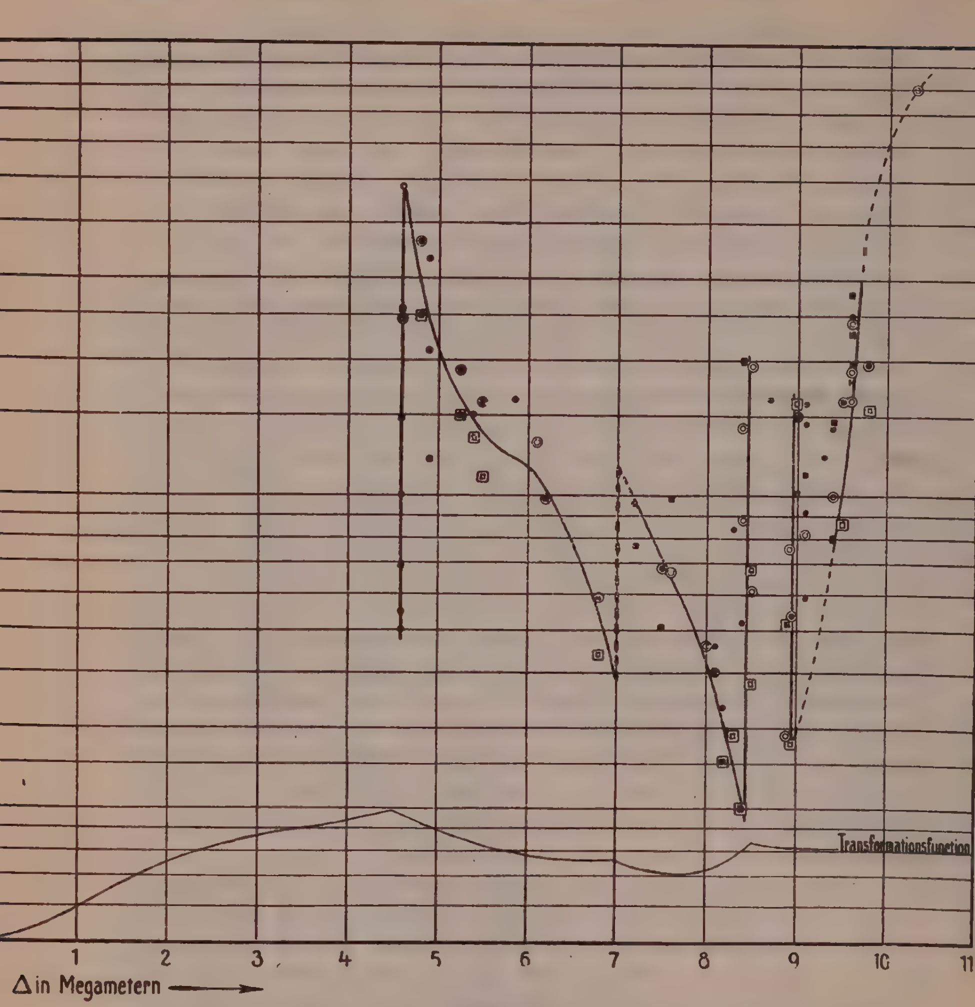
auf horizontale transformiert werden, und dann könnte man graphisch das beste p^* ermitteln. Dies ist nun leider vorläufig unmöglich. $\bar{i}_0$ ist zwar in § 3 Tabelle 1 als Funktion von i_0 gegeben, aber i_0 als Funktion von Δ ist nur angenähert als Annahme 1 bekannt. Würde man aber q^* auf Grund von Annahme 1

transformieren, so wären die horizontalen und vertikalen Punkte mehr oder weniger unverträglich, und durch Berücksichtigung beider Punktarten würde p^* schlechter statt besser werden.

Man muß darum so vorgehen, daß man allen weiteren Rechnungen nur p^* oder nur q^* zugrunde legt, und zwar wählt man diejenige Funktion, die sicherer vorzuliegen scheint, in unserem Falle p^*. Durch die Behandlung von p^* erhält man mittelst sukzessiver Approximation immer bessere Annahmen für $\sin i_0(\varDelta)$. Erst wenn so eine gute $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion gefunden ist, kann man q^* transformieren und dann unter Berücksichtigung aller Beobachtungen die wahrscheinlichste Amplitudenfunktion zeichnen. Diese neue Amplitudenfunktion wird im allgemeinen gegen die zuerst gewählte p^*-Funktion abweichen, sodaß man jetzt eventuell noch eine letzte Korrektur an der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion vornehmen muß. Diese Korrektur wird aber keinen merklichen Einfluß auf die benützte Transformationsfunktion von q^* haben, sodaß es unnötig ist, das Verfahren nochmals durchzuführen. Die Transformationsfunktion, so wie sie sich auf Grund der Annahme 3 (vgl. § 7) ergibt, ist am Fuße der Figur 12 in logarithmischem Maßstabe gezeichnet. Die Figur enthält ferner alle horizontalen und transformierten vertikalen Punkte vom Gewicht 2, 3, 4, während diejenigen vom Gewicht 1 nicht übertragen sind. Es geschah dies deshalb, weil in den Figuren 10 und 11 die Punkte vom Gewicht 1 die größte Streuung aufweisen, also zur genauen Bestimmung von p^* resp. q^* nichts nützen. Unter Berücksichtigung aller Punkte in Figur 12 und ihrer Gewichte wurde dann die wahrscheinlichste Amplitudenfunktion gezeichnet, die sich nur ganz unbedeutend von p^* in Figur 10 unterscheidet.

D i s k u s s i o n d e r A m p l i t u d e n f u n k t i o n. Die Funktion zeigt folgenden Verlauf: Von $\varDelta = 0$ bis zu $\varDelta = 4{,}6$ Megameter fehlen Beobachtungen. Die Funktion beginnt bei $\varDelta = 4{,}6$ mit einem senkrechten Aufstiege von 0,5 bis auf 5; dann fällt sie stetig, bis sie bei $\varDelta = 7{,}0$ mit 0,4 endigt; dann scheint sie wieder senkrecht zu steigen, doch fehlen dafür Beobachtungen; die Funktion beginnt bei $\varDelta = 7{,}2$ wieder mit 1,0 und fällt stetig auf 0,2 bei $\varDelta = 8{,}45$; hier steigt sie senkrecht bis auf 2,0; bis zu $\varDelta = 8{,}85$ fehlen zuverlässige Beobachtungen; bei $\varDelta = 8{,}95$ fällt die Funktion senkrecht von 1,6 auf 0,27, um sofort wieder steil und stetig anzusteigen; die zuverlässigen Beobachtungen endigen bei $\varDelta = 10{,}3$ mit dem Werte 8.

Das Fehlen der Beobachtungen unterhalb $\varDelta = 4{,}6$ hat einen doppelten Grund: einmal differieren die Laufzeiten bei diesen



Figur 12.
Beobachtete Horizontal- und transformierte Vertikal-Bodenverrückungsverhältnisse.

kleinen Herddistanzen nur wenig, die beiden Wellen können bei den üblichen Registriergeschwindigkeiten nicht mit Sicherheit getrennt werden; andererseits ergibt die Theorie, daß gerade in diesem Gebiete die reflektierte Welle verschwindend schwach ist (vgl. § 5). Entsprechend dem in § 3 ausgesprochenen Gesetze sind die beiden Vertikalstellen bei $\varDelta = 4{,}6$ und $\varDelta = 8{,}95$ durch eine Unstetigkeitsfläche verursacht. Das selbe gilt für die Vertikalstelle bei $\varDelta = 8{,}45$, der also bei $\varDelta = 2 . 8{,}45$ eine weitere

Vertikalstelle koordiniert sein muß, deren Nachweis allerdings noch zu erbringen ist. Der angenommenen Vertikalstelle bei $\varDelta = 7{,}0$ entspricht also bei $\varDelta = 2 . 7{,}0$ ebenfalls eine Vertikalstelle, deren Nachweis aber auch noch aussteht. Das Studium der Amplitudenfunktion oberhalb $\varDelta = 10{,}3$ ist einer späteren Arbeit vorbehalten worden. Zusammenfassend kann man also sagen, daß die Amplitudenfunktion bis $\varDelta = 10{,}3$ Megametern drei Unstetigkeitsstellen signalisiert.

§ 7. Sukzessive Approximation der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion.

(Von L. Geiger.)

Nachdem die Horizontal-Amplitudenfunktion p^* in Figur 10 vorliegt, entsteht die Aufgabe, die Annahme 1 über die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion derart zu variieren, daß sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

1) die drei kritischen Distanzen müssen festgehalten werden;

2) die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion muß den einzelnen Wiechert-Zoeppritzschen Laufzeitbeobachtungen genügen[1]);

3) die auf Grund der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion berechnete Amplitudenfunktion muß sich mit der beobachteten Amplitudenfunktion p^* vertragen.

Das konnte durch sukzessive Approximation in der folgenden Weise erreicht werden:

Zu 1. Als erste kritische Distanz wurde nicht 4,6 gewählt, wie man an Hand der Figur 10 zunächst erwarten könnte, denn dann müßte die koordinierte Vertikalstelle erst bei 2. 4,6 = 9,2 liegen, während sie schon bei 8,95 beobachtet ist. Und zwar ist die Vertikalstelle bei 8,95 durch gewichtigere Beobachtungen als diejenige bei 4,6 gegeben. Um beiden beobachteten Vertikalstellen und ihren Gewichten möglichst gerecht zu werden, wurde $'\varDelta = 4{,}48$ Megameter = 40,3 Grad gewählt. Die beobachtete koordinierte Vertikalstelle liegt dann genau bei $2\varDelta$, und die Beobachtungen vom Gewicht 1 in Figur 10 scheinen einen kleineren Wert als 4,6 zu rechtfertigen. Immerhin kann es auch möglich sein, daß die beobachtete kleine Abweichung gegen das Grundgesetz reell ist, und durch irgend welche Anomalien bei der Reflexion zu erklären ist. Doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Die zweite kritische Herddistanz wurde zu $\varDelta = 7{,}0$ Megameter = 63°, die dritte zu $\varDelta = 8{,}45$ Megameter = 76° angenommen.

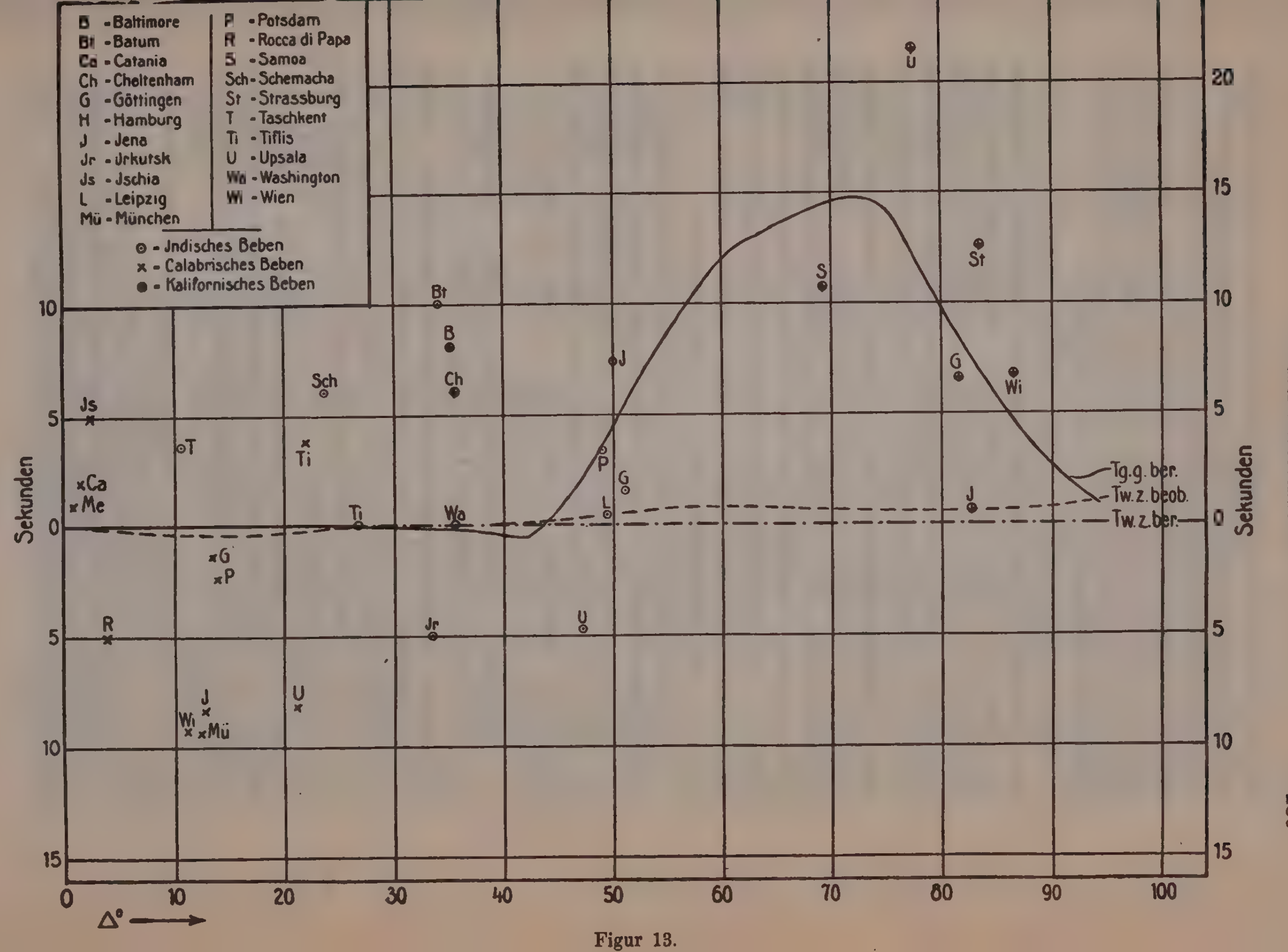
1) Erdbebenwellen III.

Zu 2. Die Grundlage aller früheren Rechnungen in den „Erdbebenwellen" bildet die Wiechert-Zoeppritzsche $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion, die durch graphische Differentiation aus der Laufzeitfunktion hergeleitet ist. Durch Integration der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion muß man also wieder die Laufzeitfunktion erhalten. Diese Probe wurde jetzt folgendermaßen ausgeführt: In Figur 6 bedeutete die strichpunktierte Kurve die Referenzfunktion = Annahme 1, die gestrichelte Kurve die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion von Wiechert-Zoeppritz 1906. Die streng berechneten Laufzeiten der Referenzfunktion gibt Tabelle 2 (S. 162). Um die Laufzeiten zu erhalten, die der Wiechert-Zoeppritz-Funktion 1906 streng koordiniert sind, genügt es also, den schmalen Streifen zwischen den beiden $\sin i_0(\varDelta)$-Funktionen graphisch jeweilen bis zu der gewünschten Herddistanz zu integrieren, und die so ermittelten kleinen Zeiten als Korrekturen an den Laufzeiten der Referenzfunktion anzubringen. Die Tabelle 7 enthält in der ersten Spalte $\varDelta$ in Graden, in der zweiten die Laufzeiten T ref. der Referenzfunktion, so wie sie in Tabelle 2

Tabelle 7.

Berechnung der Laufzeitfunktion, die der Wiechert-Zoeppritzschen $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion koordiniert ist.

$\varDelta^0$	T ref. Sek.	Korrektur Sek.	T w.z. ber. Sek.	T w.z. beob. Sek.	T w.z. beob.-T w.z. ber. Sek.
0	0,00	0	0,00	0	0
5	76,89	0	76,89	77	+ 0,1
10	150,69	0	150,69	150	— 0,7
15	219,20	0	219,20	219	— 0,2
20	281,49	0	281,49	281	— 0,5
25	337,52	0	337,52	337	— 0,5
30	387,76	+ 0,03	387,79	388	+ 0,2
35	432,82	+ 0,20	433,02	433	0,0
40	473,35	+ 0,53	473,88	474	+ 0,1
45	509,94	+ 1,02	510,96	511	0,0
48	530,22	+ 1,38	531,60	532	+ 0,4
52,9	562,31	+ 1,68	563,99	564	0,0
56,9	588,75	+ 1,89	590,64	591	+ 0,4
62,4	622,36	+ 2,16	624,52	626	+ 1,5
67	653,10	+ 2,37	655,47	656	+ 0,5
71	678,28	+ 2,56	680,84	682	+ 1,2
75,2	704,20	+ 2,73	706,93	708	+ 1,1
80,2	734,18	+ 2,92	737,10	738	+ 0,9
84,7	760,66	+ 3,09	763,75	764	+ 0,2
89,9	789,78	+ 3,26	793,04	794	+ 1,0
94,7	815,95	+ 3,41	819,36	821	+ 1,6


B - Baltimore
Bt - Batum
Ca - Catania
Ch - Cheltenham
G - Göttingen
H - Hamburg
J - Jena
Jr - Jrkutsk
Js - Jschia
L - Leipzig
Mü - München
P - Potsdam
R - Rocca di Papa
S - Samoa
Sch - Schemacha
St - Strassburg
T - Taschkent
Ti - Tiflis
U - Upsala
Wa - Washington
Wi - Wien
⊙ - Jndisches Beben
x - Calabrisches Beben
● - Kalifornisches Beben
Tg.g. ber.
Tw.z. beob.
Tw.z. ber.
Sekunden
Sekunden
Δ°

Figur 13.

stehen, in der dritten Spalte die Zeitkorrekturen, wie sie die graphische Integration geliefert hat, und in der vierten Spalte die berechnete Laufzeitfunktion T w.z. ber., die der Wiechert-Zoeppritzschen $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion entspricht; in der fünften Spalte steht die von Wiechert-Zoeppritz angenommene Laufzeitfunktion T w.z. beob. in ganzen Sekunden und die letzte Spalte enthält die Differenzen T w.z. beob.-T w.z. ber.

Die letzte Spalte zeigt, daß sich die Wiechert-Zoeppritzsche Laufzeit- und Sinusfunktion recht gut vertragen. Wenn man die Differenzen T w.z. beob. - T w.z. ber. aufzeichnet, kann man leicht eine gestreckte Kurve so legen, daß kein Punkt mehr als $^1/_2$ Sekunde von der Kurve abliegt; damit ist aber dem Umstand Rechnung getragen, daß die Werte T w.z. beob. in Tabelle 7 auf ganze Sekunden angegeben sind. In Figur 13 bedeutet die strichpunktierte 0-Achse die Laufzeitfunktion T w.z. ber., also diejenige Laufzeitfunktion, die der Wiechert-Zoeppritzschen Sinusfunktion streng entspricht und aus ihr durch Integration hergeleitet ist. Die gestrichelte Kurve entspricht der Laufzeitfunktion T w.z. beob.; man sieht, daß die Kurve nirgends mehr als 1 Sekunde von der Laufzeitfunktion T w.z. ber. abweicht.

Um beurteilen zu können, wie weit die gestrichelte Kurve die Einzelbeobachtungen T^* darzustellen vermag, sind alle von Wiechert-Zoeppritz berücksichtigten T^* (vgl. Erdbebenwellen II) auf Grund der in Tabelle 8 gegebenen Rechnung in Figur 13 eingetragen, wobei die Werte T^*- Tw. z. beob. gegen die gestrichelte Kurve zu rechnen sind.

Man sieht in dieser Darstellung sehr deutlich, daß die Streuung selbst recht zuverlässiger Stationen unterhalb $\varDelta = 50°$ bis zu 8 Sekunden, oberhalb sogar bis zu 12 Sekunden beträgt. Jedoch liegen unterhalb $\varDelta = 50°$ die Punkte merklich symmetrisch zur gestrichelten Kurve, während sie oberhalb stark nach oben abweichen. Bei der Variation der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion ist also darauf Rücksicht zu nehmen[1]).

Zu 3. Mit Annahme 1 hat Gutenberg die Amplitudenfunktion $[p]_1$ berechnet (vgl. § 5). Zwischen einer angenäherten Funktion $[p]$ und der beobachteten Funktion p^* gilt angenähert die Beziehung

$$\text{(30b)} \qquad \left[\frac{\partial \sin i_0}{\partial \varDelta}\right]_{n+1} = \left(\frac{[p]_n}{p^*}\right)^2 \cdot \left[\frac{\partial \sin i_0}{\partial \varDelta}\right]_n,$$

1) Anmerkung bei der Korrektur: In Fig. 13 sind die Punkte des indischen Bebens für Irkutsk und Batum irrtümlicherweise mit der Abszisse 33°,5 resp. 34°,1 statt 28°,4 resp. 29°,1 eingezeichnet, jedoch ist dies belanglos.

Tabelle 8.

Umrechnung der von Wiechert-Zoeppritz beobachteten Laufzeiten T^*.

Station	$\varDelta$ km	$\varDelta$ Grad	T^* Sek.	T w.z. beob. Sek.	T^*-T w.z. beob. Sek.
Indisches Beben 1905 April 4: $\varphi_0 = 32^0\,18'$ N; $\lambda_0 = 76^0\,24'$ E Gr.; $t_0 = 0^h\,49^m\,41^s$ Gr.					
Taschkent	1185	10,7	163	159	+ 4
Schemacha	2630	23,7	328	322	+ 6
Tiflis	2980	26,8	356	356	0
Irkutsk	3160	28,4	367	372	— 5
Batum	3230	29,1	388	378	+ 10
Upsala	5230	47,1	521	526	— 5
Potsdam	5460	49,1	543	540	+ 3
Leipzig	5510	49,6	543	543	0
Jena	5570	50,1	553	546	+ 7
Göttingen	5680	51,1	554	553	+ 1
Calabrisches Beben 1905 September 8: $\varphi_0 = 38^0\,50'$ N; $\lambda_0 = 16^0\,16'$ E Gr.; $t_0 = 1^h\,43^m\,5^s$ Gr.					
Messina	80	0,7	12	11	+ 1
Catania	170	1,5	25	23	+ 2
Ischia	270	2,4	42	37	+ 5
Rocca di Papa	430	3,9	55	60	— 5
Wien	1050	11,1	133	142	— 9
München	1100	12,2	158	149	— 9
Jena	1390	12,5	177	185	— 8
Göttingen	1490	13,4	197	198	— 1
Potsdam	1530	13,8	200	202	— 2
Upsala	2340	21,1	285	293	— 8
Tiflis	2450	22,1	309	305	+ 4
San Franzisko-Beben 1906 September 18: $\varphi_0 = 37^0\,35'$ N; $\lambda_0 = 122^0\,26'$ W Gr.; $t_0 = 13^h\,12^m\,1^s$ Gr.					
Baltimore	3910	35,2	443	435	+ 8
Cheltenham	3940	35,5	443	437	+ 6
Washington	3960	35,6	439	439	0
Samoa	7680	69,1	681	671	+ 10
Upsala	8610	77,5	743	722	+ 21
Göttingen	9070	81,6	753	747	+ 6
Jena	9200	82,8	753	753	0
Straßburg	9280	83,5	770	758	+ 12
Wien	9630	86,7	782	776	+ 6

worin $[\,]_n$ $n$te Näherungswerte charakterisiert. Diese Gleichung liefert also die erste Ableitung einer verbesserten $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion und durch (graphische) Integration die verbesserte $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion selbst. Weil diese verbesserte Funktion allen drei Bedingungen

genügen soll, muß man sich in der Wahl der verbesserten Funktion zu einem Kompromiß verstehen; mit einigem Instinkt ist dies ohne Benützung der strengen Integration von Gleichung (30b) möglich, wenn man sich nur für einige kritische Punkte der verbesserten $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion die Tangente nach Gleichung (30b) berechnet. Durch wiederholtes Anwenden dieser Methode erhält man eine $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion, die der beobachteten Amplitudenfunktion p^* entspricht.

In Figur 6 bedeutet die punktierte Kurve die so ermittelte Annahme 2, die ausgezogene Kurve die Annahme 3. Die Berechnung der darauf basierten Amplitudenfunktionen $[p]_2$ und $[p]_3$ gibt Gutenberg in § 8, ihren Verlauf zeigt Figur 15. Die der Annahme 3 entsprechende Laufzeitfunktion $T_{G.G.}$ ber. wurde ebenso auf die Referenzfunktion aufgebaut, wie dies in diesem Paragraphen ausführlich für die Wiechert-Zoeppritz-Funktion 1906 $T_{w.z.}$ ber. beschrieben ist. Die ausgezogene Kurve in Figur 13 zeigt den Verlauf dieser Funktion, Tabelle 9 gibt ihre Zahlenwerte:

Tabelle 9.

$T_{G.G.}$ ber. - $T_{w.z.}$ ber.

$\varDelta^0$	$T_{G.G.}$ ber. - $T_{w.z.}$ ber. Sek.	$\varDelta^0$	$T_{G.G.}$ ber. - $T_{w.z.}$ ber. Sek.
0	0,00	56	+ 9,40
5	0,00	60	+ 11,85
10	0,00	63	+ 12,99
15	0,00	64	+ 13,23
20	0,00	68	+ 14,22
25	0,00	72	+ 14,78
30	— 0,03	72,2	+ 14,78
35	— 0,20	74	+ 14,59
40	— 0,53	76	+ 13,62
40,3	— 0,55		
		80	+ 9,90
41	— 0,59	84	+ 6,55
44	+ 0,01	88	+ 3,81
48,6	+ 3,30	94	+ 0,98
52	+ 6,25		

An Hand der Figuren 13, 14 und 16 erkannt man, daß die Annahme 3 den Bedingungen 1, 2, 3 hinreichend genügt: Bedingung 1 ist streng erfüllt. Bedingung 2 ist besser erfüllt als durch die Wiechert-Zoeppritz-Funktion 1906. Es darf hier erwähnt werden, daß Herr Dr. Kurt Wegener auf Grund neuen Materials ganz unabhängig von der vorliegenden Arbeit eine Lauf-

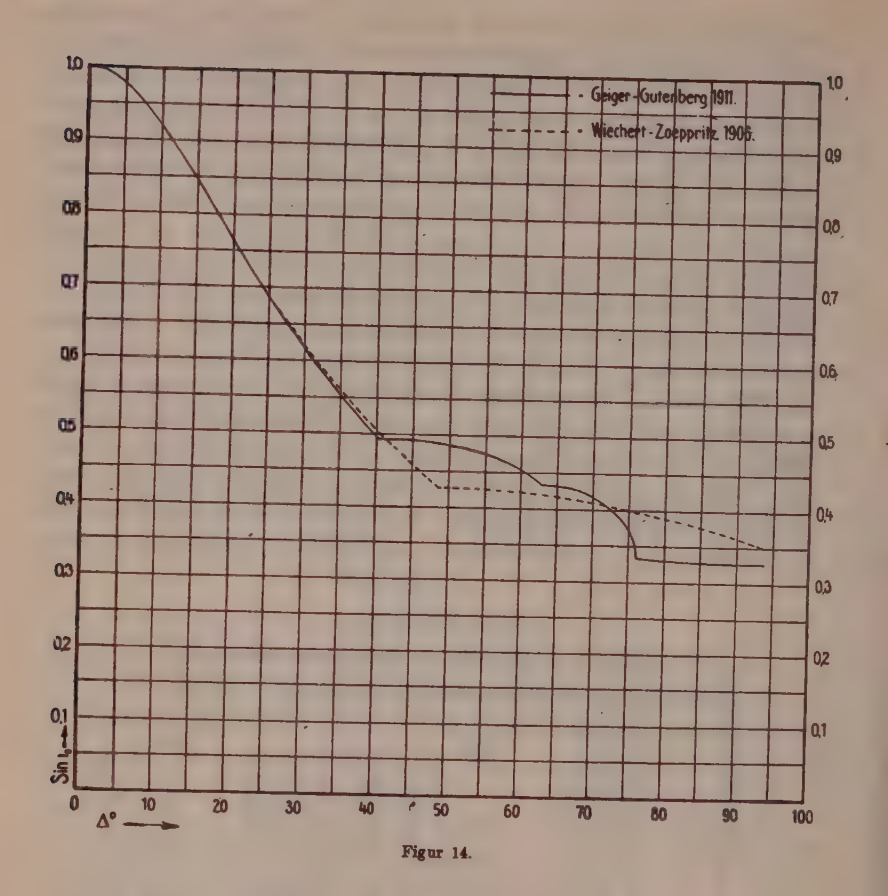
zeitfunktion aufgestellt hat[1]), die mit der Annahme 3 fast identisch ist. Davon habe ich selbst erst nach Abschluß meiner Arbeit Kenntnis erhalten. Um Bedingung 3 genau prüfen zu können, wurden gemäß den Ausführungen in § 6 die vertikalen Amplitudenbeobachtungen vom Gewicht 2, 3 und 4 auf Grund der Annahme 3 nach Gleichung (9) transformiert; jetzt erst konnte die wahrscheinlichste Amplitudenfunktion (vgl. Figur 12) gezeichnet werden. Diese Funktion weicht aber nur minimal gegen p^* (Figur 10) ab. Gemäß Figur 16 scheint Bedingung 3 nicht streng erfüllt zu sein, immerhin gibt die berechnete Amplitudenfunktion durchaus den Charakter der beobachteten wieder. Die Differenzen sind wohl auf Konto der Absorption zu setzen, die ja in der Zoeppritzschen Methode unberücksichtigt bleibt. Ich halte es also für berechtigt, die Wiechert-Zoeppritz-Function 1906 durch Annahme 3 zu ersetzen und lasse deshalb in Tabelle 10 die Werte für $\sin i_0$ und die Laufzeit $T_{G.G.}$ ber. folgen; Figur 14 zeigt die neue $\sin i_0(\Delta)$-Funktion (ausgezogene Kurve) und zum Vergleich die Wiechert-Zoeppritzsche $\sin i_0(\Delta)$-Funktion (gestrichelte Kurve).

Tabelle 10.

Sin i_0 und Laufzeit der Annahme 3.

Δ^0	$\sin i_0$	$T_{G.G.}$ ber. Sek.	Δ^0	$\sin i_0$	$T_{G.G.}$ ber. Sek.
0	1,0000	0	68	0,4260	676
5	0,9787	77	72	0,4044	702
10	0,9220	151	74	0,3862	714
15	0,8454	219	76	0,3360	726
20	0,7633	281			
25	0,6848	338	80	0,3305	745
30	0,6138	388	84	0,3279	766
35	0,5517	433	88	0,3269	786
40,3	0,4942	476	90	0,3269	797
			94	0,3269	818
44	0,4925	504			
48	0,4888	534			
52	0,4820	564			
56	0,4708	594			
60	0,4539	622			
63	0,4325	643			

1) K. Wegener, Die seismischen Registrierungen am Samoa-Observatorium der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in den Jahren 1909 und 1910. Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., Heft 3, 1912.



Figur 14.

§ 8. Berechnung und Diskussion der $p(\varDelta)$-Funktion unter den Annahmen 2 und 3 für $\sin i(\varDelta)$ (Fig. 6).

(Von B. Gutenberg.)

Auf Grund der im vorigen Paragraphen gemachten Annahmen 2 und 3 über die $\sin i(\varDelta)$-Funktion wurde analog wie unter Annahme 1 in § 5, wo sich alle näheren Angaben finden, die $p(\varDelta)$-Funktion berechnet (Tabellen 11 und 12). Die Rechnung wurde

bei $\varDelta = 94^\circ$ abgebrochen, da dort auch die vorliegenden Beobachtungen enden. Infolgedessen ist in Figur 15 von den Sprüngen nach unten, die in der doppelten Entfernung der im vorigen Paragraphen angenommenen kritischen Herddistanzen von $\varDelta = 40^\circ,3$, 63° und 76° auftreten müssen, also in $\varDelta = 80^\circ,6$, 126° und 152° Herddistanz, nur der erste zu finden. Bei Annahme 2 ist der Verlauf der $p(\varDelta)$-Funktion bis $40^\circ,3$ nahezu, bei Annahme 3 genau derselbe wie bei Annahme 1. Bei beiden setzt dort der erste Sprung nach oben ein. Vom zweiten Sprung bei $\varDelta = 63^\circ$ ab bleibt p unter Annahme 2 ziemlich entfernt vom beobachteten p^*; die Annahme 3 ist von da ab in wesentlich besserer Uebereinstimmung

Tabelle 11.

Berechnung von p unter der Annahme 2.

(Bis $\varDelta = 17^\circ,5$ ist Uebereinstimmung mit Annahme 1 vorhanden.)

$\varDelta$	$i_\varDelta$	$i_{\frac{\varDelta}{2}}$	1:2N	$i_{\varDelta_+}$	$i_{\varDelta_+} - i_{\varDelta_-}$	$\frac{1}{2}\delta_\varDelta$	$i_{\frac{\varDelta}{2}_+}$	$i_{\frac{\varDelta}{2}_+} - i_{\frac{\varDelta}{2}_-}$	$\delta_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$	p
18°	52° 46′	69° 24′	0,025	54° 33′	3° 36′	1°,14	70° 55′	3° 3′	1°,46	0,0542	1,614	1,596	0,064
22	46 49	65 10	0,025	48 45	3 56	1,455	66 44	3 9	1,54	0,0622	1,655	1,505	0,080
30	[illegible]7 30	57 40	0,020	39 20	3 46	1,82	59 1	2 43	1,56	0,1320	1,644	1,292	0,220
40,3↑	28 57	49 29	0,015	30 41	3 34	2,66	50 36	2 15	1,47	0,2855	1,548	1,051	0,659
40,3↓	28 57	49 29	0,0005	—	0 7,12	(7,5)	49 32	0 4,50	0,0513	0,2855	1,548	1,051	5,90
44	28 55	46 49	0,002	—	0 28,3	(12)	46 58	0 18,8	0,235	0,316	1,502	1,050	3,65
48	28 45	44 10	0,003	—	0 42,9	(7,5)	44 25	0 29,7	0,41	0,370	1,450	1,045	2,44
52	28 19	41 50	0,003	28 41	0 43,6	2,8	42 6	0 31,0	0,44	0,418	1,400	1,028	1,53
56	27 23	39 34	0,005	28 0	1 14,8	2,09	40 1	0 54,0	0,81	0,4645	1,347	1,004	1,07
60	25 51	37 30	0,005	26 30	1 19	1,29	37 58	0 56,4	0,93	0,5065	1,291	0,953	0,87
63↑	23 42	35 59	0,005	24 24	1 25,5	0,70	36 28	0 58,4	0,99	0,538	1,250	0,881	0,69
63↓	23 42	35 59	0,003	—	0 51,3	(4,65)	36 17	0 35,0	0,60	0,538	1,250	0,881	2,31
65	23 31	35 0	0,004	—	1 9	(5,5)	35 24	0 47,7	0,85	0,5595	1,229	0,875	2,11
68	23 1	33 42	0,005	—	1 28	(4,8)	34 13	1 2,0	1,20	0,584	1,190	0,858	1,70
72	21 36	32 3	0,005	22 22	1 33½	1,8	32 35	1 4,8	1,32	0,617	1,145	0,808	1,28
76↑	19 38	30 33	0,005	20 28	1 42	1,57	31 7	1 7,4	1,45	0,648	1,102	0,739	1,06
76↓	19 38	30 33	0,003	—	1 0,4	(6,2)	30 53	0 40,6	0,95	0,648	1,102	0,739	2,58
78	19 32	29 50	0,003	—	1 1	(6,25)	30 11	0 41,4	0,95	0,664	1,080	0,737	2,59
80,6↑	19 26	28 57	0,005	—	1 2	(6,35)	29 18	0 42,5	1,02	0,683	1,051	0,734	2,54
80,6↓	19 26	28 57	0,0005	—	0 10,4	(1,06)	—	0 7,1	(15)	0,683	1,051	0,734	0,27
88	19 8	28 55	0,001	—	0 21,0	(2,15)	—	0 14,2	(12)	0,683	1,050	0,723	0,39
94	18 54	28 47	0,001	—	0 21,2	(2,17)	—	0 14,2	(6)	0,6855	1,047	0,715	0,62

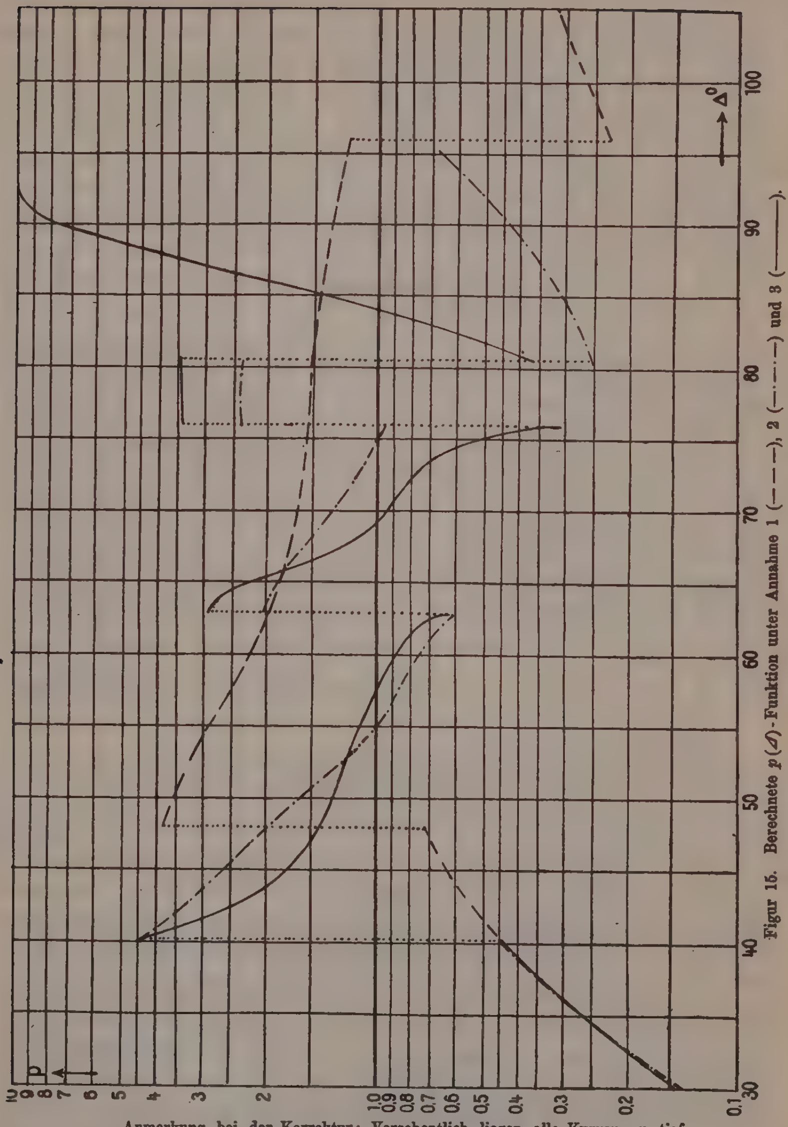
Tabelle 12.

Berechnung von p unter der Annahme 3.

(Bis $\varDelta = 40^\circ{,}3\uparrow$ ist Uebereinstimmung mit Annahme 1 vorhanden.)

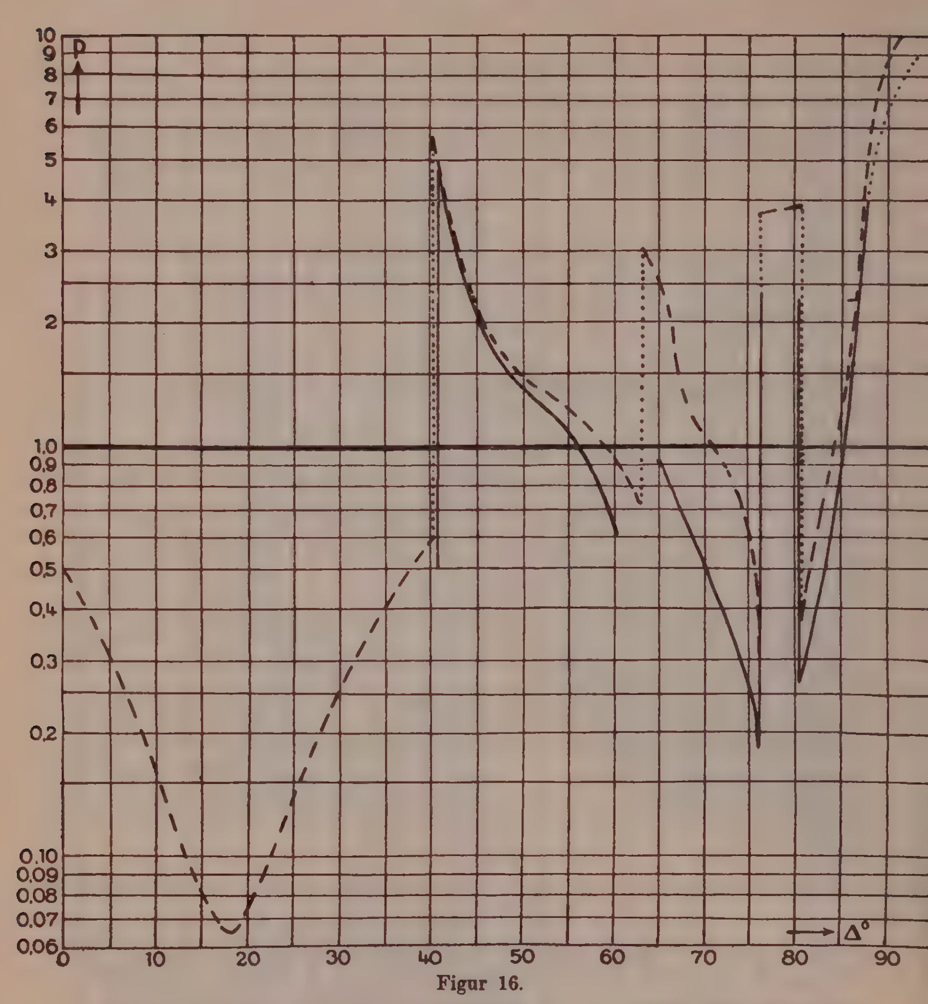
$\varDelta$	$i_\varDelta$	$i_{\frac{\varDelta}{2}}$	$1:2N$	$i_{\varDelta_+}$	$i_{\varDelta_+} - i_{\varDelta_-}$	$\ddagger\,\delta_\varDelta$	$i_{\frac{\varDelta}{2}_+}$	$i_{\frac{\varDelta}{2}_+} - i_{\frac{\varDelta}{2}_-}$	$\delta_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\frac{\varDelta}{2}}$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_\varDelta$	p
40°,3↓	29° 35′	49° 29′	0,0005	—	0° 6′,97	(7°,5)	49° 31′	0° 4′,50	0°,0513	0,2855	1,548	1,070	5,79
44	29 31	46 57	0,002	—	0 27,8	(5,9)	47 6	0 18,7	0,234	0,312	1,505	1,069	2,50
48	29 14½	44 24	0,003	—	0 42,0	(3,78)	44 39	0 29,5	0,407	0,365	1,454	1,061	1,69
52	28 49	42 3	0,003	29° 19′	0 42,4	2,70	32 18	0 30,8	0,45	0,413	1,404	1,047	1,48
56	28 6	39 55	0,005	27 42	1 13,0	2,77	40 22	0 53,4	0,80	0,456	1,357	1,024	1,22
60	27 0	37 51	0,005	27 38	1 15,8	1,91	38 19	0 56,0	0,92	0,499	1,301	0,991	0,98
63↑	25 40	36 26	0,005	26 19	1 19	0,89	36 55	0 57,6	0,98	0,528	1,263	0,946	0,71
63↓	25 40	36 26	0,003	—	0 47,4	(10)	36 43	0 34,6	0,59	0,528	1,263	0,946	3,07
65	25 36	35 38	0,004	—	1 4	(9,5)	36 1	0 46,9	0,84	0,545	1,247	0,944	2,55
68	25 15	34 19	0,005	—	1 21	(3,1)	34 49	1 0,9	1,16	0,570	1,207	0,934	1,25
72	23 53	32 40	0,005	24 35	1 25	1,5	33 12	1 3,6	1,28	0,605	1,163	0,887	0,90
74	22 42	31 55	0,005	23 26	1 29	0,94	32 27	1 4,9	1,32	0,620	1,141	0,847	0,74
76↑	19 28	31 9	0,005	20 18	1 42	0,15	31 42	1 6,1	1,34	0,634	1,120	0,733	0,34
76↓	19 28	31 9	0,003	—	1 2	(12,5)	31 29	0 40,0	0,92	0,634	1,120	0,733	3,74
78	19 23	30 27	0,003	—	1 2	(12,5)	30 47	0 40,7	0,93	0,650	1,099	0,732	3,76
80,6↑	19 16	29 35	0,003	—	1 3	(13,5)	29 56	0 41,8	1,0	0,669	1,070	0,728	3,77
80,6↓	19 16	29 35	0,005	—	0 10,45	(2,25)	—	0 7,0	(15)	0,669	1,070	0,728	0,40
88	19 5	29 31	0,0005	—	0 1,05	(4,8)	—	0 0,70	(0,30)	0,670	1,069	0,720	4,20
94	19 4¾	29 20	0,0001	—	0 0,21	(3,4)	—	0 0,14	(0,029)	0,679	1,065	0,720	11,3

mit den Beobachtungen als die Annahme 2. Vergleicht man einerseits die Annahme 2 und 3 über die $\sin i(\varDelta)$-Funktion (Figur 6) mit einander, andererseits die beiden $p(\varDelta)$-Funktionen, die aus diesen resultieren (Figur 15), so sieht man so recht die Empfindlichkeit der Zoeppritzschen Methode, besonders an der flachen Stelle von $\varDelta = 81^\circ$ an, wo die beiden $\sin i(\varDelta)$-Funktionen fast koinzidieren, während die $p(\varDelta)$-Funktionen völlig verschieden sind. Während die Verschiedenheiten der Laufzeitkurven unter den drei Annahmen kaum die Beobachtungsfehler übersteigen, und auch die $\sin i(\varDelta)$-Funktionen keine allzugroßen Verschiedenheiten wenigstens der Höhe nach zeigen, haben die drei $p(\varDelta)$-Kurven völlig verschiedenes Aussehen.



Figur 15. Berechnete $p(\varDelta)$-Funktion unter Annahme 1 (— — —), 2 (—·—·—) und 3 (———).

Anmerkung bei der Korrektur: Versehentlich liegen alle Kurven zu tief: bei $\varDelta = 30^0$ um 12 mm, bei 60^0 um $2^1/_2$ mm und bei 90^0 um $1^1/_2$ mm.



Figur 16.

Die $p(\Delta)$-Funktion nach den Beobachtungen (————) und unter Annahme 3 für $\sin i(\Delta)$ (Fig. 6) berechnet (— — —).

Um die Abweichungen der $p(\Delta)$-Funktion unter Annahme 3 von der beobachteten $p^*(\Delta)$-Funktion übersehen zu können, wurden beide in Figur 16 zusammengestellt. Nur zwischen $\Delta = 65^\circ$ und $\Delta = 76^\circ$ sind noch größere reelle Abweichungen der beiden Kurven von einander vorhanden. Ein genaues Uebereinstimmen von Beobachtung und Theorie läßt sich unter unsern Annahmen (§ 3, Anfang) nicht erreichen. Setzt man $p \equiv p^*$, so schneidet die $\sin i(\Delta)$-Funktion zu früh die Δ-Achse;

es muß also p etwas größer als p^* gewählt werden, damit der Laufzeitfunktion genügt wird. Legt man die $\sin i(\varDelta)$-Funktion von $\varDelta = 40^\circ,3$ ab etwas flacher, von $\varDelta = 50^\circ$ bis $\varDelta = 76^\circ$ etwas steiler als unter Annahme 3, so läßt sich in der Tat erreichen, daß die berechnete $p(\varDelta)$-Funktion dauernd etwas über der beobachteten $p^*(\varDelta)$-Funktion verläuft, was sich dann ungezwungen dadurch erklären ließe, daß die einmal reflektierte Welle, wie im Anfange von § 3 vermutet wurde, etwas stärkere Absorption erfährt als die direkte. Die Aenderungen der $\sin i(\varDelta)$-Funktion gegen Annahme 3 sind aber dann sehr klein, da die $p(\varDelta)$-Funktion nur um höchstens 15 bis 20 % bei $\varDelta = 40^\circ$ bis $\varDelta = 55^\circ$ höher, um höchstens 10 bis 15 % im folgenden Teile bis $\varDelta = 76^\circ$ tiefer gelegt werden müßte. Bedenkt man noch, daß die notwendigen Aenderungen kaum die Fehler der Rechnung und Beobachtung übersteigen, und daß Aenderungen der $\sin i(\varDelta)$-Funktion zwischen $\varDelta = 0^\circ$ und $\varDelta = 40^\circ$, wo die Zoeppritzsche Methode nicht anwendbar ist, die Berechnung der $p(\varDelta)$-Funktion bis $\varDelta = 80^\circ$ beeinflussen, so muß es durchaus als gerechtfertigt erscheinen, daß von einer weiteren Annahme 4 abgesehen wurde. Jedenfalls hat sich der Gedanke Zoeppritz', das Amplitudenverhältnis p zur Aufstellung einer scharfen $\sin i(\varDelta)$- und Laufzeitfunktion heranzuziehen, als fruchtbar erwiesen. Auch über den Lauf der Strahlen, die aus größeren Entfernungen als $\varDelta = 94^\circ$ kommen, wird die Methode genaueres aussagen können, sowie für diese Distanzen eine angenäherte $\sin i(\varDelta)$-Funktion vorliegt.

§ 9. Berechnung der Scheiteltiefen und Scheitelgeschwindigkeiten.

(Von L. Geiger.)

Nachdem in § 7 die neue $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion aufgestellt ist, kann für einzelne Strahlen die Scheiteltiefe und die Scheitelgeschwindigkeit berechnet werden. Dabei wird der tiefste Punkt eines Strahles „Scheitel" genannt, sein Abstand von der Erdoberfläche resp. dem Erdmittelpunkt heißt „Scheiteltiefe" S resp. „Scheitelradius" r, die Geschwindigkeiten im Scheitel „Scheitelgeschwindigkeit" Vs, $\mathfrak{V}s$.

1) Berechnung der Scheiteltiefe S. Die Berechnung der Scheiteltiefe auf Grund einer empirisch ermittelten $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion erfolgt am bequemsten nach der von Wiechert ausgebildeten Methode mittelst des Abel-Herglotzschen Satzes[1]).

1) E. Wiechert u. L. Geiger, Phys. Zeitschr., 11, S. 294—311, 1910.

Danach ist

(32) $$\log \text{nat} \frac{r_0}{r} = \frac{1}{180} \int q d\varDelta,$$

oder

$$\log_{10} \frac{r_0}{r} = \frac{\text{mod}}{180} \int q d\varDelta$$

oder

$$\log_{10} r = \log_{10} r_0 - \frac{\text{mod}}{180} \int q d\varDelta$$

oder

(33) $$\log_{10} r = 3{,}80393 - 0{,}002412747 \,.\int q d\varDelta,$$

worin

(34) $$\mathfrak{Cof}\, q = \frac{(\sin i_0)_\varDelta}{(\sin i_0)_r}$$

ist. Ferner ist

(35) $$S = r_0 - r.$$

$\mathfrak{Cof}$ ist der hyperbolische Cosinus, $(\sin i_0)_r$ bezieht sich auf den betrachteten Strahl, $(\sin i_0)_\varDelta$ auf alle diejenigen Strahlen, deren Herddistanz $\varDelta$ zwischen der Herddistanz des betrachteten Strahles und $\varDelta = 0$ liegen. Streng genommen müßte man also unendlich viele Werte $(\sin i_0)_\varDelta$ in Rechnung setzen; für die Praxis genügt jedoch eine mäßige Anzahl. Nachdem die Werte $\frac{(\sin i_0)_\varDelta}{(\sin i_0)_r}$ berechnet sind, schlägt man die zugehörigen Werte q in einer Tabelle auf[1]) und hat q als Funktion von $\varDelta$. Figur 17 zeigt $q(\varDelta)$ für die Strahlen mit $\varDelta = 10°$; $20°$; $30°$; $40°,3$; $50°$; $58°$; $63°$; $68°$; $74°$; $76°$; $84°$; $90°$; $94°$; dabei ist zu bemerken, daß das Integral für $\varDelta = 94°$ innerhalb der angewandten Genauigkeit gleich demjenigen für $\varDelta = 90°$ ist, weil gemäß Tabelle 10 $(\sin i_0)_{90} \sim (\sin i_0)_{94}$ ist. Die Knickstellen bei $\varDelta = 40°,3$; $63°$; $76°$ entsprechen den Knickstellen in der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion.

Jetzt sind die Flächenintegrale $\int q d\varDelta$ auszuwerten: dazu wurde $q(\varDelta)$ in großem Maßstabe auf Millimeterpapier gezeichnet, sodaß $q(\varDelta)$ in 1 cm breite Streifen zerfällt. Man liest dann einfach die mittleren Ordinaten dieser Streifen ab und addiert sie. Die so erreichte Genauigkeit ist recht groß: z. B. zerfiel $q(\varDelta)$ für $\varDelta = 63°$ in 32 Streifen, und der gesamte Flächeninhalt wurde zu 27423 irgendwelcher Einheiten gefunden. Den mittleren Fehler einer

---

1) z. B. „Hyperbolic functions“, l. c.

gemessenen Streifenhöhe schätze ich auf ± 1 Einheit; dann ist der absolute mittlere Fehler des gesamten Flächeninhalts $= \pm\sqrt{32}$ $= \pm 5{,}7$ Einheiten und der relative mittlere Fehler

$$= \frac{\pm 5{,}7}{27423} \sim \frac{1}{4800} \sim \pm 0{,}02\ \%.$$

Die weitere Rechnung an Hand von Gleichung (33) versteht sich von selbst. — Wie gesagt, braucht man bei dieser Methode die $\sin i_0(\Delta)$-Funktion nicht analytisch zu kennen. Unsere Annahme 3 ist aber bis $\Delta = 40^\circ{,}3$ die analytisch bekannte Referenzfunktion. Dann kann aber die Berechnung von r auch direkt nach der Gleichung

$$(24) \qquad r = \frac{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0) + \dfrac{\Delta}{2}}{2}}{\cos \dfrac{(90^\circ - i_0) - \dfrac{\Delta}{2}}{2}} \cdot r_0$$

erfolgen. Somit besitzt man eine bequeme Probe für die Leistungsfähigkeit der Methode mittelst des Abel-Herglotzschen Satzes, die für $\Delta = 10^\circ$; 20°; 30°; $40^\circ{,}3$ angewandt wurde. Es ergab sich als Scheitelradius in Kilometern:

Δ^0	10	20	30	40,3
nach Gleichung (24)	6255,9	5971,2	5596,5	5173,3
„ Herglotz	6254,9	5969,7	5596,0	5174,4
Herglotz - (24)	— 1,0	— 1,5	— 0,5	+ 1,1

Man sieht, daß die Größenordnung der relativen Fehler 1/5000 ist, was durchaus der obigen Fehlerabschätzung entspricht.

2) Berechnung der Scheitelgeschwindigkeit Vs. Die Berechnung von Vs erfolgt nach der Gleichung

$$Vs = \frac{V_0}{r_0} \cdot \frac{r}{\sin i_0},$$

oder

$$(36) \qquad Vs = 0{,}00112675 \cdot \frac{r}{\sin i_0}.$$

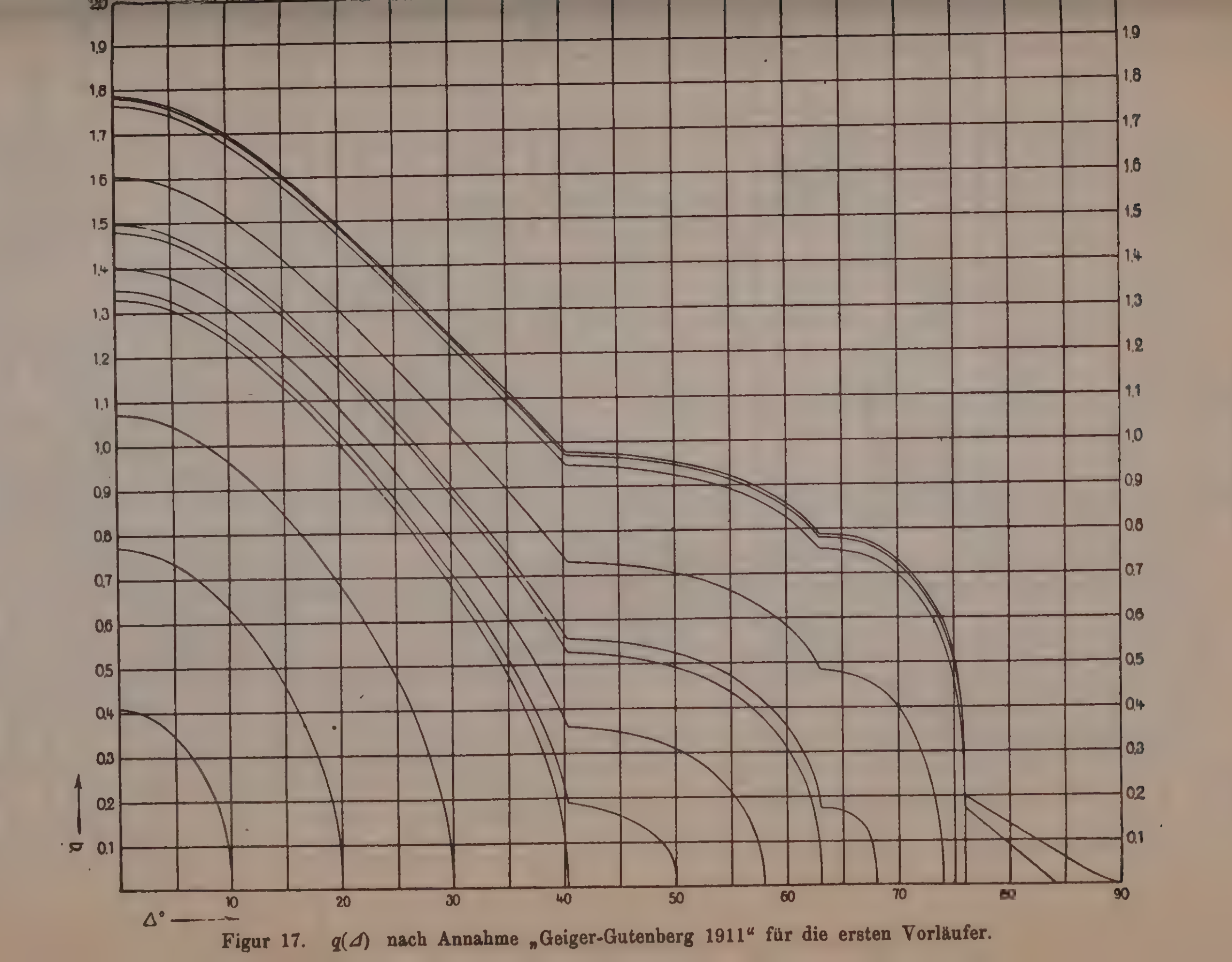
Tabelle 13 gibt die resultierenden Scheiteltiefen S und Scheitelgeschwindigkeiten Vs, und zwar in der ersten Spalte die Herd-

Tabelle 13.
Scheiteltiefe und Scheitelgeschwindigkeit.

Δ^0	$\int$	r km	S G.G. km	S Z.G. km	S G.G.-S Z.G. km	(Vs)G.G. km/Sek.	(Vs)Z.G. km/Sek.	(Vs)G.G.-(Vs)Z.G. km/Sek.
0	—	6367	0	0	0	7,174	7,174	0,00
10	—	6256	111	111	0	7,64	7,64	0,00
20	—	5971	396	396	0	8,81	8,81	0,00
30	—	5597	770	770	0	10,27	10,25	+ 0,02
40,3	—	5173	1194	1170	+ 24	11,80	11,74	+ 0,06
50	39,984	5099	1268	1521	— 253	11,83	11,98	— 0,15
58	46,384	4921	1446	1566	— 120	11,96	12,56	— 0,60
63	55,011	4690	1677	1629	+ 48	12,22	12,78	— 0,56
68	57,462	4627	1740	1705	+ 35	12,24	12,78	— 0,54
74	70,408	4306	2061	1830	+ 231	12,56	12,78	— 0,22
76	86,818	3931	2436	1876	+ 560	13,30	12,78	+ 0,52
84	89,202	3879	2488	2090	+ 398	13,32	12,78	+ 0,54
90	90,002	3862	2505	2266	+ 239	13,31	12,78	+ 0,53

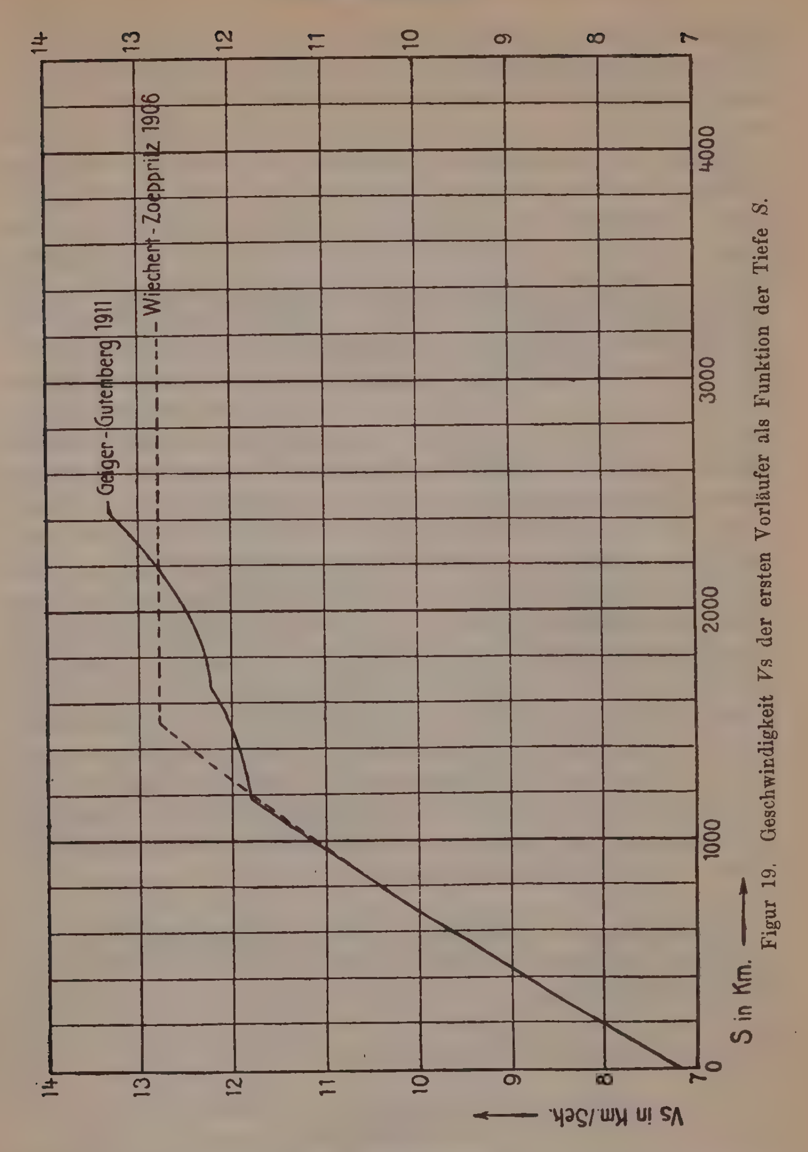
distanzen Δ in Graden, in der zweiten die Integralwerte, in der dritten die Scheitelradien r, in der vierten die Scheiteltiefen S; zum Vergleich gibt die fünfte Spalte die entsprechenden Scheiteltiefen S Z.G., die mir der Abel-Herglotzsche Satz für die Wiechert-Zoeppritzsche $\sin i_0(\Delta)$-Funktion geliefert hat[1]); die hier mitgeteilten Werte für S Z.G. sind durch graphische Interpolation gewonnen. Figur 18 gibt die Scheiteltiefe S G.G. als Funktion der Herddistanz Δ, die gestrichelte Kurve S Z.G. Man sieht, daß die drei neuen Unstetigkeitsflächen in den Tiefen 1194, 1677, 2436 km liegen. In Figur 19 gibt die ausgezogene Kurve die Geschwindigkeit longitudinaler Wellen (Vs)G.G. als Funktion der Tiefe S, die gestrichelte Kurve (Vs)Z.G. Man sieht, daß (Vs)G.G. und (Vs)Z.G. nirgends mehr als ½ km/Sek. differieren.

1) E. Wiechert u. L. Geiger, Phys. Zeitschr., l. c.



Figur 17. $q(\Delta)$ nach Annahme „Geiger-Gutenberg 1911“ für die ersten Vorläufer.

Figur 18. Scheiteltiefe S der ersten Vorläufer als Funktion der Herddistanz Δ.



Figur 19. Geschwindigkeit *Vs* der ersten Vorläufer als Funktion der Tiefe *S*.

§ 10. Schlusswort.

Wir wollen hier kurz die Resultate der vorliegenden Arbeit zusammenstellen.

Durch Kombination der Beobachtungen über die Laufzeit der Longitudinalwellen mit den Geigerschen Beobachtungen des

Bodenverrückungsverhältnisses der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen, wobei das ganze Göttinger Erdbebenmaterial von 1904 bis Juni 1911 ausgenützt wurde, war es möglich, die Wiechert-Zoeppritzsche Laufzeit- resp. $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion durch verbesserte Funktionen zu ersetzen. Während Wiechert-Zoeppritz im Erdinnern nur eine Unstetigkeitsfläche in 1519 km Tiefe angenommen hatten, liefert die neue Annahme deren drei in 1194, 1677 und 2436 km Tiefe. Die mittleren Fehler dieser drei Tiefen können nur ganz roh auf ± 50, ± 100 und ± 150 km geschätzt werden. Dagegen konnten die Herddistanzen der zugehörigen Grenzstrahlen recht scharf zu $40^\circ{,}3 \pm 1^\circ$; $63^\circ \pm 2^\circ$; $76^\circ \pm \frac{1}{2}^\circ$ bestimmt werden. Die neue Laufzeitfunktion liegt zwischen $\varDelta = 45^\circ$ und $\varDelta = 90^\circ$ höher, im Maximum 14 Sekunden. Die in diesem Gebiet liegenden Punkte, deren Distanz nach der Methode (1) (vgl. § 6) bestimmt ist, haben also etwas unsichere Herddistanzen; ist die Distanz nach Methode (2) bestimmt, so ist der Fehler geringer; ist sie nach der Methode (3) bestimmt, so liegt kein Fehler vor. Diese eventuellen Korrekturen sind aber zu gering, als daß sie die nochmalige Durchführung der ganzen Arbeit rechtfertigen könnten. Die Geschwindigkeitsfunktion ist verhältnismäßig wenig anders geworden: die größte Geschwindigkeit ist jetzt 13,3 gegen früher 12,8 km/Sek. Ob die maximale Geschwindigkeit zunächst konstant bleibt, wie dies früher angenommen war, läßt sich nicht entscheiden, weil die Strahlen noch fernerer Beben zunächst keine merklich größere Tiefe erreichen. Die Poissonsche Konstante als Funktion der Tiefe kann erst dann berechnet werden, wenn die analoge Untersuchung auch für Transversalwellen durchgeführt ist[1]).

1) Anmerkung bei der Korrektur: Dies ist seitdem geschehen; vergl. L. Geiger und B. Gutenberg: Über Erdbebenwellen VI, Göttinger Nachr., math.-phys. Kl. (im Druck).

Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen.

Von

Ludwig Bieberbach in Königsberg i. Pr.

Vorgelegt von Herrn Hilbert am 23. Dezember 1911.

Minkowski hat in seiner letzten großen zahlentheoretischen Abhandlung[1]) eine neue (auf Hermite weiterbauende) Reduktionstheorie der quadratischen Formen geschaffen, die ganz erhebliche Vorzüge gegenüber den älteren Theorien aufweist. Man kann indessen die Resultate des ersten rein arithmetischen Teiles dieser Arbeit auf einem anderen Wege als dem von Minkowski eingeschlagenen ableiten, auf dem die einzelnen Sätze unmittelbar aus der Begriffsbestimmung der reduzierten Form fließen und der wie ich glaube unmittelbarer den inneren Grund für das Bestehen der einzelnen Sätze erkennen läßt. Namentlich dürfte dies der Fall sein, wenn man im Anschluß an Minkowskis erste Abhandlung[2]) über diesen Gegenstand den neuen Beweis geometrisch interpretiert.

Die vorliegende Arbeit soll sich jedoch fürs erste nur mit einem Teil jener Minkowskischen Resultate befassen, nämlich mit einem Satz den bereits C. Jordan[3]) abgeleitet hatte, indem er sich auf eine von Korkine und Zolotareff herrührende Reduktionsmethode stützte. Es ist der Satz[4]), daß es abgesehen von

---

1) Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz 1905, Ges. W. II, 53 ff.

2) Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen, 1891, Ges. W. I, 243 ff.

3) Mémoire sur l'équivalence des formes. Journ. éc. pol. XXIX, 1880.

4) Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in den Untersuchungen über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume mit Fundamentalbereich cf. dazu: Bieberbach: Gött. Nachr. 1910, Math. Ann. 70 (1911) und eine weitere demnächst in den math. Ann. erscheinende Arbeit. Frobenius: Berl. Sitzber. 1911.

unimodularen ganzzahligen Transformationen nur endlich viele endliche Gruppen ganzzahliger homogener linearer Substitutionen gibt. Bei Jordan sowohl wie bei Minkowski folgt er aus dem Satz[1]), daß es nur endlich viele unimodulare ganzzahlige Substitutionen gibt, welche fähig sind, reduzierte Formen wieder in reduzierte Formen überzuführen. Jedoch liegt dieser eben genannte Satz wesentlich tiefer als der Gruppensatz den man daraus folgert. Es dürfte daher von prinzipiellem Interesse sein, einen Beweis jenes Gruppensatzes mitzuteilen, der das in Evidenz setzt. Es werden dabei allerdings alle die Gesichtspunkte in einfachster Form zur Geltung kommen, auf die sich auch der oben erwähnte neue Beweis für die Hauptsätze der Minkowskischen Reduktionstheorie stützt. Ich werde an geeigneten Stellen dieser Arbeit auf diesen Punkt zurückkommen. Mein Beweis benutzt außer der Existenz der reduzierten Form nur die allerelementarsten Sätze über quadratische Formen.

1. Eine quadratische Form

$$f(x_1, \dots x_n) = \sum_1^n {}^{hk} a_{hk} x_h x_k$$

heißt positiv, wenn es kein Wertsystem $x_1, \dots x_n$ gibt, für das sie kleiner als Null wird. Sie heißt wesentlich positiv, wenn sie positiv ist und es auch kein Wertsystem (außer $0, 0, \dots 0$) gibt, für das sie verschwindet.

2. Die (nicht als positiv vorausgesetzte) quadratische Form

$$f(x_1, \dots x_n) = \sum_1^n {}^{hk} a_{hk} x_h x_k$$

heißt nach Minkowski reduziert, wenn sie allen möglichen Ungleichungen

$$f(s_1^{(l)}, \dots s_n^{(l)}) \geqq a_{ll}$$

genügt für jedes $l = 1, \dots n$ und alle ganzzahligen Systeme $s_1^{(l)}, \dots s_n^{(l)}$, wobei der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $s_l^{(l)}, \dots s_n^{(l)}$ gleich 1 ist (und ferner noch den Bedingungen

$$a_{12} \geqq 0, \dots a_{n-1,n} \geqq 0).$$

3. Die Gesamtheit der Formen, die man dadurch erhält, daß man auf eine gegebene Form alle möglichen unimodularen ganz-

---

1) In meiner Arbeit Ann. 70 habe ich diesen Satz irrtümlicherweise Minkowski zugeschrieben. Ich benutze diese Gelegenheit um das richtig zu stellen.

zahligen Substitutionen, d. h. alle ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 ausübt, heißt Formenklasse oder Klasse von Formen.

4. Es ist leicht zu sehen, daß jede Klasse wesentlich positiver Formen eine und im allgemeinen auch nur eine reduzierte Form enthält. (Minkowski, Ges. W. II, 60).

5. Sind $f_1, f_2, \ldots$ positive Formen, so ist auch $\lim\limits_{i=\infty} f_i = F$ eine positive Form.

6. Sind $f_1, f_2, \ldots$ reduzierte Formen, so ist auch $\lim\limits_{i=\infty} f_i = F$ eine reduzierte Form.

7. Eine reduzierte Form ist stets eine positive Form. Denn sie ist für ganzzahlige Werte der Variabelen nie negativ. Denn in den unter 1. aufgeführten Bedingungen sind auch die folgenden enthalten

$$0 \leqq a_{11} \leqq a_{22} \leqq \ldots \leqq a_{nn} \quad \text{und:}$$

8. Eine reduzierte Form besitzt für ganzzahlige Werte der Variabelen ein Minimum. Es ist durch den Koeffizienten a_{11} gegeben.

9. Es seien $f_1, f_2, \ldots$ reduzierte Formen für die der Limes $i = \infty$ existieren möge. Ist diese Form keine wesentliche positive Form, so ist notwendig

$$\lim_{i=\infty} a_{11}^{(i)} = 0.$$

Beweis. Wegen 5, 6, 8 haben wir nur zu zeigen, daß eine positive aber nicht wesentlich positive Form durch ganzzahlige Werte der Variabelen kleiner gemacht werden kann, als jede vorgegebene positive Größe. Sei

$$F = \sum_{1}^{n}{}^{ik} \alpha_{ik} x_i x_k$$

die Limesform. Wenn einer ihrer Koeffizienten α_{ii} verschwindet, dann wird sie für ganzzahlige Wertsysteme Null und wir sind am Ziele unserer Wünsche. Es sei also keiner der genannten Koeffizienten Null. Dann subtrahieren wir

$$\alpha_{11}\left(x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n\right)^2.$$

Es bleibt eine positive quadratische Form $F_1(x_2, \ldots x_n)$. Wenn einer ihrer Koeffizienten $a_{ii}^{(1)}$ verschwindet, dann gibt es ganzzahlige Wertsysteme, nämlich eines

$$x_h = \xi_h = 0\,(h \neq i)\; x_i = \xi_i = 1$$

und dessen ganzzahlige Multipla $\eta\xi_2, \ldots \eta\xi_n$ für die F_1 verschwindet. Man kann aber $\eta \leqq t$ und dazu ein x_1 so bestimmen, daß

$$\left(x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\eta\xi_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\eta\xi_n\right) < \frac{1}{t}$$

wird, wo t eine beliebig vorgegebene ganze Zahl ist. Denn es besteht der Satz: Zu einer gegebenen Größe a und einer positiven ganzen Zahl t kann man immer mindestens eine in den Grenzen $1, t$ liegende Zahl z und dazu eine andere ganze Zahlen ξ so bestimmen, daß

$$|\xi - az| < \frac{1}{t}$$

wird.

Ist also einer der Koeffizienten von F_1 Null, so sind wir am Ziel; ist aber keiner derselben Null, so subtrahieren wir weiter:

$$\alpha_{22}^{(1)}\left(x_2 + \frac{\alpha_{23}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}}x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}}x_n\right)^2.$$

Es bleibt eine positive Form $F_2(x_3, \ldots x_n)$. Wenn einer ihrer Koeffizienten $a_{ii}^{(2)}$ verschwindet, so gibt es ganzzahlige Wertsysteme, nämlich $x_2 = \xi_h = 0$ $(h \neq i)$ $x_i = \xi_i = 1$ und dessen Multipla $\eta\xi_3, \ldots \eta\xi_n$, für die F_2 verschwindet. Dann bestimme man η in den Grenzen $1, t^2$ und dazu $x_2 = \xi_2$, so daß

$$\left(\xi_2 + \frac{\alpha_{23}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}}\eta\xi_3 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}^{(2)}}{\alpha_{22}^{(1)}}\eta\xi_n\right) < \frac{1}{t^2}$$

wo t eine vorgegebene ganze Zahl ist. Liegt dann ζ in den Grenzen $1, t$ so, bleibt

$$\zeta\left(\xi_2 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}^{(1)}}{\alpha_{22}^{(1)}}\eta\xi_n\right)$$

kleiner als $\frac{1}{t}$. Man bestimme ζ in diesen Grenzen und dazu $x_1 = \xi_1$; so daß

$$\left(\xi_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\xi_2\zeta + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{11}}\xi_n\eta\zeta\right) < \frac{1}{t}.$$

Auf diese Weise kann man auch in diesem Falle mit ganzzahligen Werten der Variabelen $F(x_1, \ldots x_n)$ unter jede gegebene Grenze herunterbringen. So kann man weiter schließen. Einmal muß aber in der restierenden Form F_k ein Koeffizient $a_{ii}^{(k)}$ verschwinden, denn sonst würde sich aus diesem Verfahren ergeben, daß die vorgelegte Form F wesentlich positiv ist. Die Limesform

kann also (das ist jetzt bewiesen) mit ganzzahligen Werten der Variabelen beliebig klein gemacht werden. Da sie aber als Limesform reduzierter Formen selbst reduziert ist und also ein Minimum besitzt, kann dies nur Null sein. Also muß ihr erster Koeffizient, der ja das Minimum einer reduzierten Form darstellt verschwinden, und also ist $\lim\limits_{i=\infty} a_{11}^{(i)} = 0$.

10. Sei F eine wesentlich positive quadratische Form, a eine vorgegebene Zahl, dann ist die Zahl der ganzzahligen Wertsysteme $x_1, \dots x_n$, für die $F \leqq a$ wird, endlich. Dies leuchtet sofort ein, wenn man in bekannter Weise F durch das auch in der vorigen Nummer benutzte Verfahren als Summe von Quadraten darstellt. Daraus folgt sofort, daß die Zahl der ganzzahligen Transformationen einer wesentlich positiven Form in sich eine endliche ist, da nach dem eben gesagten für das von einer einzelnen Kolonne der Matrix einer solchen Substitution gebildete ganzzahlige Wertsystem nur endlich viele verschiedene Wertsysteme in Betracht kommen.

11. Sei Γ irgend eine endliche Gruppe linearer homogener ganzzahliger Substitutionen in n Variabelen, dann gibt es immer wesentlich positive Formen, die bei Γ invariant sind, wie man leicht einsieht. Wenn wir beweisen wollen, daß es abgesehen von Transformationen durch unimodular ganzzahlige Substitutionen nur endlich viele endliche Gruppen solcher Substitutionen gibt, so dürfen wir uns auf die Betrachtung der Gruppen, welche reduzierte wesentlich positive Formen invariant lassen beschränken, denn man kann es durch eine solche Transformation immer erreichen, daß die invariante Form der Gruppe eine reduzierte Form wird, weil nach 4 in jeder Formenklasse eine reduzierte Form enthalten ist.

12. Es sei eine unendliche Folge von wesentlich positiven reduzierten Formen mit ganzzahligen Transformationen in sich gegeben. Dann sind unter den zugehörigen Gruppen ganzzahliger Substitutionen nur endlich viele enthalten, die nicht durch unimodular ganzzahlige Transformationen aus einander hervorgehen. In diesem gleich zu beweisenden Satze ist, wie leicht zu sehen, der Satz enthalten, auf den wir es von vornherein abgesehen hatten.

B e w e i s. Wir nehmen an, es seien im Gegenteil unbegrenzt viele Formen darunter, deren Gruppen nicht in der angegebenen Weise zusammenhängen. Wir greifen eine unendliche Folge dieser Art heraus. Wir dürfen annehmen ohne Beschränkung der All-

gemeinheit, daß die größten Koeffizienten a_{nn} durchweg eins sind. Alle anderen Koeffizienten sind dann mit Rücksicht auf die Ungleichungen $|2a_{hk}| \leqq a_{hh} (h < k)$, die aus den Reduktionsbedingungen fließen, kleiner als 1.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß unsere Folge eine Limesform hat, d. h. wenn $f_1, \ldots f_s$ die Formen der Folge sind, soll $\lim\limits_{i=\infty} f_i = f$ existieren. Dann sind 2 Fälle zu unterscheiden, jenachdem ob diese Limesform f wesentlich positiv ist oder nicht.

Fall a. Die Limesform sei wesentlich positiv. Dann gibt es nur endlich viele ganzzahlige Wertsysteme für die die Limesform Werte kleiner als 1 annimmt. Man kann ein N so groß bestimmen, daß für alle $\nu > N$ die so bestimmten Wertsysteme auch die einzigen sind für die die Formen $f_\nu (\nu > N)$ Werte kleiner als 1 annehmen. (Man denke nur immer an die in 9 benutzte Darstellung als Summe von Quadraten.) Diese Wertsysteme müssen aber nun gerade die von den einzelnen Kolonnen der Matrizes unserer Substitutionen gebildeten ganzzahligen Wertsysteme liefern. Es kommen also für diese und also auch für unsere Gruppen nur endlich viel Möglichkeiten in Betracht entgegen unserer Annahme.

Fall b. Die Limesform

$$f = \sum_{1}^{n} {}^{k} a_{ik} x_i x_k$$

sei nicht wesentlich positiv. Da sie aber eine reduzierte Form ist, muß nach 9 $a_{11} = 0$ sein. Es können auch noch weitere Koeffizienten a_{ii} verschwinden aber jedenfalls nicht alle, da ja wie in allen f_i auch in f $a_{nn} = 1$ ist. Es seien etwa

$$a_{11} = a_{22} = a_{hh} = 0.$$

Dann sind auch alle

$$a_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots h)\ (k = 1, 2, \ldots n).$$

Ist also $\nu > N$ groß genug, so müssen in allen $f_\nu (\nu > N)$ die eben angeführten Koeffizienten kleiner als eine vorgegebene Zahl geworden sein. Seien nun $\gamma_{ik}^{(\nu)}$ die Koeffizienten einer Substitution, die f_ν invariant läßt und es möge etwa i die Kolonne k die Zeile bezeichnen. Es gibt immer ein N, so daß für alle $\nu > N$

$$\gamma_{ik}^{(\nu)} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots h \\ k = h+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

(Sind die

$$a_{ik}^{(\nu)} = 0, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = 1, \dots n \end{pmatrix}$$

so ist das ja evident. Unsere (nur für ganzzahlige Gruppen richtige) Behauptung enthält diese für ganzzahlige Gruppen als Spezialfall). Man setze nämlich durch das in 9 benutzte Verfahren f_ν auf die Form

$$\begin{aligned} f_\nu = {} & q_1^{(\nu)}(x_1 + \alpha_{12}^{(\nu)} x_2 + \cdots + \alpha_{1n}^{(\nu)} x_n)^2 \\ & + q_2^{(\nu)}(x_2 + \alpha_{13}^{(\nu)} x_3 + \cdots + \alpha_{2n}^{(\nu)} x_n)^2 \\ & + \cdots \\ & + q_n^{(\nu)} x_n^2. \end{aligned}$$

Für hinreichend große ν werden die $q_1^{(\nu)}, \dots q_h^{(\nu)}$ kleiner als eine vorgegebene Zahl, während die $q_{h+1}^{(\nu)}, \dots q_n^{(\nu)}$ oberhalb einer festen Grenze q bleiben. Nun müssen die Relationen gelten:

$$f(\gamma_{i,1}^{(\nu)}, \gamma_{i,2}^{(\nu)}, \dots \gamma_{in}^{(\nu)}) = a_{ii}^{(\nu)} \qquad (i = 1, \dots h)$$

(weil nämlich unsere Substitution f_ν in sich überführen soll.) Man wähle N so groß, daß für alle $\nu > N$ $a_{11}^{(\nu)} \leq a_{22}^{(\nu)} \leq \dots \leq a_{hh}^{(\nu)} \leq q$ wird.

Wäre nun nicht

$$\gamma_{ik}^{(\nu)} = 0, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix}$$

so müßte $f(\gamma_{i1}^{(\nu)}, \dots \gamma_{in}^{(\nu)})$ größer als ein $q_i^{(\nu)}$ $(i > h)$ sein und also auch größer als q, während es doch gleich einem der $a_{ii}^{(\nu)}$ $(i = 1, \dots h)$ also kleiner als q sein soll. Daher muß sein

$$\gamma_{ik}^{(\nu)} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix}$$

Das gilt für alle Substitutionen unserer Gruppen. Man nennt solche Gruppen reduzibel.

Die ersten h Zeilen und Kolonnen und ebenso die letzten $n - h$ Zeilen und Kolonnen bilden jeweils für sich eine endliche Gruppe linearer ganzzahliger Substitutionen. Es kommen also für jede dieser nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht[1]). Wir greifen aus unserer Formenfolge unendlich viele Formen heraus, die in den eben genannten Teilgruppen alle übereinstimmen mögen

---

1) Wenn wir den für eine Variable evidenten Satz für weniger als n Variabelen als bewiesen ansehen.

abgesehen von unimodular ganzzahligen Substitutionen. Wir verlassen nun das Gebiet der reduzierten Formen und üben auf die einzelnen Formen unserer Folge unimodular ganzzahlige Substitutionen der ersten h Variabelen unter sich und der letzten $n-h$ unter sich aus, so daß die mehr erwähnten Teilgruppen durchweg identisch werden.

Wir werden nun sukzessive neue Formenfolgen einführen, bis wir zu Folgen gelangt sind, für die wieder Fall a eintritt.

Zunächst üben wir auf f_ν die folgende Substitution S_ν aus:

$$\begin{aligned}
x_i' &= x_i \quad (i = h+1 \dots n) \\
x_h' &= x_h + \alpha^{(\nu)}_{h,\,h+1} x_{h+1} + \cdots + \alpha^{(\nu)}_{h,\,n} x_n = x_h + s_h^{(1)} \\
x_{h-1}' &= x_{h-1} + \alpha^{(\nu)}_{h-1,\,h+1} x_{h+1} + \cdots + \alpha^{(\nu)}_{h-1,\,n} x_n - \alpha^{(\nu)}_{h-1,\,h} s_h^{(\nu)} = x_{h-1}\, s_{h-1}^{(\nu)} \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_1' &= x_1 + \alpha^{(\nu)}_{1,\,h+1} x_{n+1} + \alpha^{(1)}_{1n} x_n - \alpha^{(\nu)}_{1,h} s_h^{(\nu)} - \alpha^{(\nu)}_{1,\,h-1} s_{h-1}^{(\nu)} - \cdots - \alpha_{12} s_2^{(\nu)} = x_1 + s_1^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Dadurch geht f_ν in eine Form über $\overline{f}_\nu$, die als Summe einer Form in den ersten h Variabelen und einer Form in den letzten $n-h$ Variabelen sich darbietet. Durch diese Transformation S_ν geht die Gruppe Γ_ν' mit den Koeffizienten $\gamma_{ik}^{(\nu)}$ in eine $\overline{\Gamma}_\nu$ mit den Koeffizienten $\overline{\gamma}_{ik}^{(\nu)}$ über.

Hier ist aber wie man sich leicht überzeugt nicht nur

$$\overline{\gamma}_{ik}^{(\nu)} = 0, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix}$$

sondern es ist auch

$$\overline{\gamma}_{ik}^{(\nu)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = h+1, \dots n \\ k = 1, \dots h \end{pmatrix}$$

und außerdem ist

$$\overline{\gamma}_{ik}^{(\nu)} = \gamma_{ik}^{\prime(\nu)}. \qquad \begin{matrix} \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = 1, \dots h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i = h+1, \dots n \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\overline{\Gamma}_{(\nu)}$ zerfällt also nun völlig in eine Gruppe der ersten h Variabelen und in eine der letzten $n-h$ Variabelen[1]). Für alle x_ν ist aber nun auch $\overline{\Gamma}_\nu = \overline{\Gamma}_1$, alle unsere Formen gehen also nun durch ein

---

1) Diese Betrachtungen (die sich für beliebige Gruppen genau so anstellen lassen) enthalten zugleich einen Beweis eines bekannten Satzes von **Maschke**, der dem von **Maschke** (Ann. 52) gegebenen nahe steht.

und dieselbe Gruppe in sich über. Wir werden also zu jeder unserer Gruppen Γ_ν eine invariante Form erhalten, wenn wir alle Substitutionen S_ν^{-1} also die inversen unserer S_ν auf $\overline{f}_1$ ausüben. Wir wollen aber außerdem noch auf jede unserer Formen bezw. Gruppen eine unimodular ganzzahlige Substitution Σ_ν mit den Koeffizienten $(\sigma_{ik}^{(\nu)})$ ausüben für die

$$\sigma_{ik}^{(\nu)} = 0 \begin{cases} \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i = 1, \dots h \\ k = 1, \dots h \end{pmatrix} i \gtrless k \\ \begin{pmatrix} i = h+1, \dots n \\ k = h+1, \dots n \end{pmatrix} i \gtrless k \end{cases} \qquad \sigma_{ii}^{(\nu)} = 1$$

sein soll. Wir wählen sie so, daß in $\Sigma_\nu S_\nu^{-1}$ also der Substitution die wir im ganzen auf $\overline{f}_1$ ausgeübt haben alle Koeffizienten kleiner als 1 werden, so weit sie nicht durch die übrigen Festsetzungen schon notwendig Null oder 1 sind. Da also die Koeffizienten aller Substitutionen, die wir so auf $\overline{f}_1$ ausüben unter einer endlichen Schranke nämlich 1 liegen, müssen auch die Koeffizienten aller Formen φ_ν die wir so erhalten beschränkt sein. Wir nehmen $\overline{f}_1$ von vorn herein in der Form

$$\begin{aligned} & q_1 (x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n)^2 \\ + & q_2 (x_2 + \alpha_{13} x_3 + \cdots + \alpha_{2n} x_n)^2 \\ + & \cdots \\ + & q_n x_n^2 \end{aligned}$$

an; dann haben die φ_ν sofort auch diese Gestalt und die q_i stimmen jeweils in allen diesen Formen überein. Wählen wir also aus der Folge der φ_ν eine Folge aus, welche eine Limesform besitzt (wegen der Beschränktheit der Koeffizienten ist dies möglich) so muß diese wegen des Übereinstimmens der q_i für alle φ_ν eine wesentlich positive Form sein und damit sind wir auf Fall a zurückgekommen (denn beim Beweis in diesem Falle benutzten wir nicht den Umstand, daß wir es mit reduzierten Formen zu tun hatten.)

13. Durch im Prinzip ganz ähnliche Schlüsse wie die eben vorgeführten kann man auch die Existenz der von Minkowski benutzten Zahl λ_n beweisen. Die Existenz dieses λ_n ist aber der Angelpunkt der ganzen Minkowskischen Beweisführung. Hat man diese erst, so ist es ein leichtes den Minkowskischen Hauptsatz von der Endlichseitigkeit des reduzierten Raumes zu

beweisen. Aber über die Existenz von λ_n hinaus gelangt man auf dem angedeuteten Wege auch zu numerischen Angaben über λ_n, die sich aus der Bestimmung von λ_n bei Minkowski nur schwer dürften ableiten lassen. Durch Verfolgung dieser Gedankenketten kann man auch zu Grenzen für die Koeffizienten der Substitutionen der Gruppen gelangen. Die nähere Durchführung dieser Andeutungen bleibt jedoch einer weiteren Arbeit vorbehalten, in der ich auch eine geometrische Deutung der Reduktionstheorie geben werde.

Theoretisches über die Fortpflanzung des Lichtes in absorbierenden aktiven einaxigen Kristallen.

Von

K. Försterling.

Mit 6 Figuren im Text.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 1. Juli 1911.

Einleitung.

Zu der vorliegenden Abhandlung gaben mir Veranlassung die Beobachtungen von Hr. Stumpf[1]) über die optischen Eigenschaften des von Hrn. Vorländer hergestellten flüssigen Kristalls *p*-Cyanbenzalaminozimtsäure-Akt-Amylester. Es liegt nun nahe, auf einen solchen flüssigen Kristall die Differentialgleichungen, welche die Grundlage der Theorie für feste aktive einaxige Kristalle bilden, anzuwenden. Da indes bei den flüssigen Kristallen die Doppelbrechung senkrecht zur Axe keineswegs groß ist neben der Doppelbrechung der zwei zirkularen Wellen parallel der Axe, so sind die gebräuchlichen Vernachlässigungen nicht erlaubt. Da ferner der beobachtete flüssige Kristall im sichtbaren Gebiet des Spektrums einen Absorptionsstreifen besitzt, und dabei die Absorption für die beiden Wellen parallel der Axe sehr verschieden ist, so haben wir mit komplexen Größen zu rechnen. Trotzdem lassen sich die Formeln ziemlich weitgehend diskutieren. Inwieweit die Theorie die beobachteten Erscheinungen darstellt, werden wir am Schluß wenigstens in qualitativer Hinsicht vergleichen. Wir nehmen also an, wir hätten es mit einem einaxigen drehenden Kristall zu tun und betrachten das Spektralbereich in der Umgebung eines

1) F. Stumpf, Physikal. Zeitschrift X, S. 780, 1911. Diss. Göttingen 1911.

Absorptionsstreifens. (In dem Absorptionsstreifen kann die Drehung ihren Sinn behalten oder umkehren.) Als Grundläge wählen wir die Differentialgleichungen von W. Voigt, weil sie symmetrischer sind als die von P. Drude. Uebrigens hat die Beziehung zwischen Feldstärken und Polarisationen bei der neueren Theorie Drudes dieselbe Form, wie die aus der Voigtschen abgeleitete Gleichung (1), nur ist die elektronentheoretische Deutung der Parameter eine andere. Diese spielt aber für das Folgende außer § 3 keine Rolle.

1) Seien:

X, Y, Z die elektrischen, A, B, C die magnetischen Feldstärken,
Ξ, H, Z „ „ $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ „ „ Polarisationen,

so bestehen, zunächst für rhombische Kristalle bezogen auf ein Hauptaxensystem, die Relationen:

$$\Xi = X + 4\pi \Sigma e x_h, \ldots \qquad \mathsf{A} = A + 4\pi \Sigma a_h,$$

und $x_h \ldots$ und $a_h \ldots$ bestimmen sich aus den Differentialgleichungen:

$$m \frac{d^2 x_h}{dt^2} + k_1^{(h)} \frac{dx_h}{dt} + k_1^{(h)} x_h = e X - \delta_1^{(h)} \frac{\partial A}{\partial t}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und

$$a_h = \delta_1^{(h)} \frac{dx_h}{dt}$$
$$\cdots\cdots$$

Hierzu kommen die Maxwell-Hertzschen Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial t} = v \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \Xi}{\partial t} = v \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wenn v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Diese Gleichungen sind als erweiterte Schwingungsgleichungen der gebundenen Elektronen der Dispersionstheorie aufzufassen. Die Summen sind zu erstrecken über alle schwingenden Elektronen.

Da der Kristall einaxig ist, sei $k_1 = k_2 \ldots$ Man führt als Lösungen komplexe Ausdrücke für $X, Y \ldots$ und x, y von der Form $e^{i v \left(t - \frac{ax + cz}{\omega}\right)}$ resp. e^{ivt} ein.

Hierin sind im allgemeinen a und c komplexe Größen; sie können aufgefaßt werden als Sinus und Cosinus eines komplexen Winkels ζ, und bestimmen sich aus dem Winkel der Normalen auf der Fläche konstanter Phase gegen die optische Axe und der Normalen auf der Fläche konstanter Amplitude gegen die optische

Axe. Sind die Wellen eben und homogen, so ist ξ direkt der Winkel der Wellennormale gegen die optische Axe. Man erhält:

$$-x_h(m\nu^2 + i\nu h_1^{(h)} - k_1^{(h)}) = D_1^{(h)} x_h = eX - \delta_1^{(h)} \frac{\partial A}{\partial t}$$

. . . .

$$a_h = e\frac{\delta_1^{(h)}}{D_1^{(h)}} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\delta_1^{h^2}}{D_1^{(h)}} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

. . . .

Also:

$$\Xi = X\left(1 + 4\pi \Sigma \frac{e^2}{D_1^{(h)}}\right) - i\nu 4\pi \Sigma \frac{e\delta_1^{(h)}}{D_1^{(h)}} A = \varepsilon_1 X - ig_1 A$$

(1) . . . .

$$\mathsf{A} = A\left(1 + \nu^2 4\pi \Sigma \frac{\delta_1^{(h)^2}}{D_1^{(h)}}\right) + i\nu 4\pi \Sigma \frac{e\delta_1^{(h)}}{D_1^{(h)}} X = \mu_1 A + ig_1 X,$$

. . . .

wobei $D_k^{(h)}$, g_h, ε_h und μ_h neue Abkürzungen sind.

Daraus folgt:

(2)
$$X = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2}\Xi + i\frac{g_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2}\mathsf{A}$$
$$A = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2}\mathsf{A} - i\frac{g_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2}\Xi.$$

Es soll noch abgekürzt werden:

(3)
$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2} = \Theta_1, \quad \frac{\mu_3}{\varepsilon_3\mu_3 - g_3^2} = \Theta_3$$
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2} = \Omega_1, \ldots \quad \frac{g_1}{\varepsilon_1\mu_1 - g_1^2} = d_1, \ldots$$

wodurch $X = \Theta_1\Xi + id_1\mathsf{A}, \ldots A = \Omega_1\mathsf{A} - id_1\Xi \ldots$

Da die Polarisationen transversal schwingen, stellen sich deren Komponenten Ξ' und A' $\|$ der xz-Ebene dar:

$$\Xi' = c\Xi - aZ, \quad \mathsf{A}' = c\mathsf{A} - a\Gamma,$$

während $O = a\Xi + cZ$, $O = a\mathsf{A} + c\Gamma$.

Ferner ist es bequem, folgende Abkürzungen anzuführen:

$$\Theta_{11} = \Theta_1 c^2 + \Theta_3 a^2, \; d_{11} = d_1 c^2 + d_3 a^2 \ldots \text{ und}$$

$$cX - aZ = X', \; cA - aC = A'.$$

Diese beiden Symbole X' und A' stellen natürlich nicht die Komponenten dar [1]).

In dieser Schreibweise gilt:

$$X' = \Theta_{11}\,\Xi' + i d_{11}\,\mathsf{A}' \qquad A' = \Omega_{11}\,\mathsf{A}' - i d_{11}\,\Xi'$$

$$Y = \Theta_1\,H + i d_1\,\mathsf{B} \qquad B = \Omega_1\,\mathsf{B} - i d_1\,H$$

und nach den Maxwellschen Gleichungen:

$$\Xi' = \mathfrak{n} B, \qquad \mathsf{A}' = -\mathfrak{n}\,Y \left(= -\mathfrak{n}\,\Theta_1 H - i\mathfrak{n} d_1\,\mathsf{B}\right)$$

$$H = -\mathfrak{n} A', \qquad \mathsf{B} = +\mathfrak{n}\,X' \left(= \mathfrak{n}\,\Theta_{11}\,\Xi' + i\mathfrak{n} d_{11}\,\mathsf{A}'\right).$$

Hierbei ist

$$\mathfrak{n} = \frac{c}{\omega} = n(1 - ik) = n - ik$$

der komplexe Brechungsindex.

Durch Elimination von Ξ', H' erhält man:

$$\mathsf{B} = \mathfrak{n}^2\,\Theta_{11}\,B + i\mathfrak{n} d_{11}\,\mathsf{A}' \qquad A' = \Omega_{11}\,\mathsf{A}' - \frac{d_{11}^2}{\Theta_{11}}\mathsf{A}' - i\,\frac{d_{11}}{\mathfrak{n}\Theta_{11}}\mathsf{B}$$

$$\mathsf{A}' = \mathfrak{n}^2\,\Theta_1\,A - i\mathfrak{n} d_1\,\mathsf{B} \qquad B = \Omega_1\,\mathsf{B} - \frac{d_1^2}{\Theta_1}\mathsf{B} + i\,\frac{d_{11}}{\mathfrak{n}\Theta_1}\mathsf{A}'.$$

Schließlich hat man zwischen A' und B die Beziehungen:

$$\mathsf{B}\left[1 - \mathfrak{n}^2\,\Theta_{11}\left(\Omega_1 - \frac{d_1^2}{\Theta_1}\right)\right] = +i\mathfrak{n}\left[d_{11} + \frac{\Theta_{11}}{\Theta_1}\,d_1\right]\mathsf{A}' \tag{4}$$

$$\mathsf{A}'\left[1 - \mathfrak{n}^2\,\Theta_1\left(\Omega_{11} - \frac{d_{11}^2}{\Theta_{11}}\right)\right] = -i\mathfrak{n}\left[d_1 + \frac{\Theta_1}{\Theta_{11}}\,d_{11}\right]\mathsf{B}. \tag{5}$$

2) Bis hierher war die Aufstellung der strengen Formeln kaum komplizierter als die der durch Annäherung vereinfachten. Für das Folgende sollen indeß die Annäherungen eingeführt werden, daß alle $d^2\,\Theta\Omega$ neben 1 fortbleiben, und auf der rechten Seite soll der Faktor der d_{hh} : $\frac{\Theta_1}{\Theta_{11}}$ gleich 1 gesetzt werden, da $d_{11}\,(\Theta_1 - \Theta_{11})$ eine kleine Größe höherer Ordnung ist. Diese Annäherungen würden etwa bis $g = 0{,}2$ sehr gut anwendbar sein, d. h. bis zu einer

1) Man kann d_{11} ..., und Θ_{11} als Tensorkomponenten auffassen, welche durch Drehung des Koordinatensystems um einen komplexen Winkel ζ gegen das Axenkreuz der d_1 ... und Θ_1 ... aus diesem hervorgegangen sind.

Drehung von ca. 200000° pro mm. $\Big($In dieser Annäherung ist:

$\Theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\ldots, \quad \Omega_1 = \frac{1}{\mu_1}\ldots, \quad d_1 = \frac{g_1}{\varepsilon_1\mu_1}\ldots\Big)$.

Man erhält jetzt:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathsf{B}\,(1 - \mathfrak{n}^2\,\Theta_{11}\,\Omega_1) &= +i\bar{\mathfrak{n}}\,(d_{11} + d_1)\,\mathsf{A}' \\ \mathsf{A}'\,(1 - \mathfrak{n}^2\,\Theta_1\,\Omega_{11}) &= -i\bar{\mathfrak{n}}\,(d_{11} + d_1)\,\mathsf{B} \end{aligned}$$

($\bar{\mathfrak{n}}$ ist hier der Mittelwert der beiden Brechungsindizes). Setzt man:

$$(7) \qquad \frac{1}{\Theta_1\,\Omega_{11}} - \frac{1}{\Theta_{11}\,\Omega_1} = 2\eta, \quad 2\mathfrak{n}_0^2 = \frac{1}{\Theta_1\,\Omega_{11}} + \frac{1}{\Theta_{11}\,\Omega_1}$$

$$\frac{\bar{\mathfrak{n}}^2\,(d_{11} + d_1)^2}{\Theta_1\,\Theta_{11}\,\Omega_1\,\Omega_{11}} = \bar{\mathfrak{n}}^2\,(g_{11} + g_1)^2 = \vartheta^2,$$

so ist:

$$(8) \qquad \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}_0^2 \pm \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}$$

und:

$$(9) \qquad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = \pm i \sqrt{\frac{-\eta \mp \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}{+\eta \mp \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}}\,\sqrt{\frac{\Theta_{11}}{\Theta_1}}.$$

In Annäherung kann man auch hier den Faktor $\sqrt{\frac{\Theta_{11}}{\Theta_1}}$ gleich 1 setzen.

Man sieht, daß dann gilt:

$$\left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_1 \left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_2 = +1.$$

Die Formel (9) läßt sich noch einfacher schreiben:

$$(9') \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = \pm i\left[\frac{\eta}{\vartheta} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\vartheta}\right)^2}\,\right] \text{ oder } = \pm i\left[\pm\frac{\eta}{\vartheta} + \sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\vartheta}\right)^2}\,\right].$$

Da $\left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_1 \left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_2 = +1$ sein soll, so ist der zweite Ausdruck zu wählen; dabei hat $\frac{\eta}{\vartheta}$ das positive Zeichen, wenn in (8) für $\mathfrak{n}^2$ die Wurzel mit dem + Zeichen genommen ist.

Um in (9') das Vorzeichen vor i festzulegen, setzt man entsprechende Werte von $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$ und $\mathfrak{n}^2$ etwa in die erste Gleichung (6) ein. Man erhält, wenn man in $\mathfrak{n}^2$ das + Zeichen wählt:

$$(10) \quad -\frac{1}{\bar{\mathfrak{n}}^2}\,(\eta + \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}) = +i\,\mathfrak{n}\,(d_{11} + d_1)\left[\pm i\left(\frac{\eta}{\vartheta} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{\vartheta}\right)^2 + 1}\right)\right]$$

Sind alle Parameter zunächst reell, so hat man, um bei dem Grenzübergang $\vartheta = 0$ zur Normalenfläche eines gewöhnlichen Kristalls zu gelangen, etwa festzusetzen[1]), daß in (8) $+\sqrt{\eta^2+\vartheta^2}$ bedeuten soll, daß die Wurzel mit dem Vorzeichen von η zu nehmen ist.

Nun läßt sich (9) schreiben:

$$\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = \pm i \sqrt{\frac{\eta^2\left(1 \pm \left|\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right)^2}{\vartheta^2}} = \pm i \frac{\eta}{|\vartheta|}\left\{\pm 1 + \left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\}.$$

Daraus folgt für (10):

$$-\frac{\eta}{\mathfrak{n}^2}\left\{1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\} = \mp \frac{\mathfrak{n}(d_{11}+d_1)\eta}{|\vartheta|}\left\{1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\}$$

$$-\frac{1}{\mathfrak{n}^2} = \mp \frac{\mathfrak{n}(d_{11}+d_1)}{|\vartheta|}.$$

Man hat also im durchsichtigen Gebiet ($\mathfrak{n} = n$) zuzuordnen:

$$\text{(11)} \quad \begin{aligned} n_+^2 &= n_0^2 + \eta\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right| \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = +\frac{i\eta}{\vartheta}\left\{1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\} \\ n_-^2 &= n_0^2 - \eta\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right| \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = -\frac{i\eta}{\vartheta}\left\{-1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\}. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß ϑ klein neben η ist, folgt bei Vernachlässigung quadratischer Glieder

$$\text{(11a)} \quad \begin{aligned} n_+^2 &= n_0^2 + \eta \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = -\frac{2i\eta}{\vartheta} \\ n_-^2 &= n_0^2 - \eta \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = +\frac{i\vartheta}{2\eta} \end{aligned}$$

Die Brechungsindizes befolgen in dieser Annäherung dasselbe Gesetz, wie bei einem nichtdrehenden Kristall, und zwar ist n_+ der Brechungsindex des ordentlichen, n_- der des außerordentlichen Stahl. Der Ausdruck für $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$ enthält das Gesetz der Schwingungsform. Bekanntlich bedeuten komplexe Ausdrücke für $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$, daß die Schwingung elliptisch polarisiert ist, und das Vorzeichen des imaginären Teils bestimmt den Rotationssinn. In unserem Falle sind beide Wellen elliptisch polarisiert und haben entgegengesetzten Umlaufssinn.

1) Vgl. z. B. F. Pockels, Kristalloptik S. 328.

Aus den Festsetzungen (11) ersieht man, daß im durchsichtigen Gebiet die Normalenflächen sich unter keinen Umständen schneiden können für irgend ein ζ; ferner daß z. B. die schnellere Welle ihren Rotationssinn für alle ζ behält, solange ϑ nicht durch 0 geht und sein Vorzeichen ändert (was an sich möglich ist).

Alle diese Festsetzungen haben zunächst nur einen Sinn für reelle Parameter. In einem Spektralgebiet, wo der Kristall absorbiert, liegen die Verhältnisse viel komplizierter. Wie sich $\mathfrak{n}^2$ und $\frac{A'}{B}$ hier verhält, werden wir später sehen. Wir wollen uns die Festsetzung der Vorzeichen so getroffen denken, daß bei dem Uebergang zu einem durchsichtigen Gebiet $\mathfrak{n}^2$ und $\frac{A'}{B}$ stetig in die Ausdrücke (11) übergehen.

Bisher haben wir an die Ausdrücke für $\mathfrak{n}^2$ angeknüpft. Aus ihnen erhält man, wenn man die Doppelbrechung nur in Gliedern erster Ordnung beibehält:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{1}{\Theta_{11}\,\Omega_1} - \eta \pm \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Theta_1\,\Omega_{11}}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Theta_1\,\Omega_{11}}\left\{\eta \pm \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}\right\}$$

$$\mathfrak{n}_+ - \mathfrak{n}_- - i(k_+ - k_-) = \sqrt{\Omega_1\,\Theta_1\,(\eta^2 + \vartheta^2)}.$$

Wie man sieht, unterschieden sich $\mathfrak{n}_+^2 - \mathfrak{n}_-^2$ und $\mathfrak{n}_+ - \mathfrak{n}_-$ nur durch den Faktor $\frac{\sqrt{\Theta_1\Omega_1}}{2}$, der für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich ist. Da es einfacher ist, an die Differenz $\mathfrak{n}_+ - \mathfrak{n}_-$ selbst die Diskussion anzuknüpfen, so wollen wir künftig die angenäherten Formeln zu Grunde legen. Hierbei denken wir uns den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{\Theta_1\,\Omega_{11}}$ in η und ϑ hereingezogen, und bezeichnen, um nicht neue Buchstaben einzuführen, $\frac{1}{2}\eta\sqrt{\Theta_1\,\Omega_1}$ mit η, $\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\Theta_1\,\Omega_1}$ mit ϑ. Man kann übrigens jederzeit zu den strengeren Formeln zurückgehen, wenn man die ursprünglichen Definitionen für η und ϑ beibehält und im Text für $\mathfrak{n}_+ - \mathfrak{n}_-$ setzt $|\mathfrak{n}_+^2 - \mathfrak{n}_-^2|_r$ und für $k_+ - k_-$: $|\mathfrak{n}_+^2 - \mathfrak{n}_-^2|_i$.

3) Wir wollen zunächst eine kurze Ueberlegung anstellen, welche über die Größenordnung von Ω Aufschluß gibt.

Hat man nur eine Art von schwingenden Elektronen — ihre Zahl in der Volumeneinheit sei N — so sind nicht alle Größen n_1, n_3, $\varkappa_1$, $\varkappa_3$, g_1', g_3', g_1'', g_3'' (wobei $g_1 = g_1' + ig''$, $g_3 = g_3' + ig_3''$ gesetzt ist) von einander unabhängig, wie schon P. Drude hervorgehoben hat.

Setzt man

$$\frac{4\pi e^2 N}{m} = \varrho, \quad \frac{k_1}{m} = \nu_{01}^2, \quad \frac{h_1}{m} = \nu_1', \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1'', \quad g_1 = g_1' + ig_1'',$$
$$\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1'', \ldots$$

so ist:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_{01}' + \frac{\varrho(\nu_{01}^2 - \nu^2)}{(\nu_{01}^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu_1^2}, \qquad \varepsilon_1'' = \frac{\varrho \nu \nu'}{(\nu_{01}^2 - \nu^2)^2 + \nu_1'^2 \nu^2}$$

$$g_1' = g_{10}' + \frac{\nu \varrho \frac{\delta_1}{e}(\nu_{01}^2 - \nu^2)}{(\nu_{01}^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu_1'^2}, \qquad g_1'' = \frac{\nu \varrho \frac{\delta_1}{e} \nu \nu_1'}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu_1'^2 \nu^2}$$

$$\mu_1' = \mu_{10} + \frac{\nu^2 \varrho \frac{\delta_1^2}{e^2}(\nu_{01}^2 - \nu^2)}{(\nu_{01}^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu'^2}, \qquad \mu_1'' = \frac{\nu^2 \varrho \frac{\delta_1^2}{e^2} \nu \nu_1'}{(\nu_{01}^2 - \nu^2)^2 + \nu_1'^2 \nu^2}.$$

Wie man sieht, ist[1]):

$$\frac{g_1''}{\varepsilon_1''} = \frac{g_1' - g_{10}'}{\varepsilon_1' - \varepsilon_{10}'} = \nu \frac{\delta_1}{e}.$$

Hieraus folgt:

$$\mu_1' - \mu_{10}' = \nu (g_1' - g_{10}') \frac{\delta_1}{e} = \frac{(g_1' - g_{10}')^2}{\varepsilon_1' - \varepsilon_{01}'} = \frac{(g_1' - g_{10}) g_1''}{\varepsilon_1''}.$$

Diese Gleichung kann unter Umständen dazu dienen, einen Begriff von der Größe von $\mu_1' - \mu_{01}'$ zu geben.

Der Brechungsindex || der Axe ist nämlich gegeben durch:

$$n^2 = \frac{1}{\Theta_1 \Omega_1} \pm \frac{2n d_1}{\Theta_1 \Omega_1} = \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1} \pm n g_1.$$

Die Größe des Pleochroismus || der Axe ist also in Annäherung gegeben durch g''. In Annäherung kann also $\frac{g''}{\varepsilon''}$ als das Verhältnis der Differenz des Absorptionsindizes zum mittleren Absorptionsindex aufgefaßt werden, ist also beobachtbar; damit ist $\nu \frac{\delta_1}{e}$ bekannt. Da andrerseits $g_1' - g_{10}'$ aus der Dispersion der Rotationspolarisation berechnet werden kann, so erhält man $\mu_1 - \mu_{10}$.

Bei dem von Hr. Stumpf beobachteten Kristalle wurde die eine Welle sehr stark (unter Umständen bei sehr dünner Schicht schon fast vollständig), die andere fast garnicht absorbiert. Daraus folgt $g' = \varepsilon''$ nahezu. Dann wäre $\nu \frac{\delta_1}{e}$ nahezu gleich 1. Da im Ab-

1) Vgl. P. Drude, Optik. 1906. S. 406.

sorptionsstreifen bei dem in Rede stehenden Kristall sich das Vorzeichen von g umkehrt, so kann man wenigstens der Größenordnung nach $g'_1 - g'_{01}$ durch g' selbst ersetzen. Dann wäre $\mu_1 - \mu_{10}$ also von der Größenordnung von g' selbst, in diesem Fall etwa 0,05.

Leider haben die Ω keinen leicht beobachtbaren Einfluß auf die Lichtfortpflanzung, da ihre Differenz in erster Annäherung sich einfach zu der der Θ addiert.

Es ist nämlich:

$$\eta = \frac{1}{\Theta_1 (\Omega_1 \cos^2 \zeta + \Omega_3 \sin^2 \zeta)} - \frac{1}{\Omega_1 (\Theta_1 \cos^2 \zeta + \Theta_1 \sin^2 \zeta)}$$
$$= \frac{1}{\Theta_1 \Omega_1} \left[\frac{\Omega_1 - \Omega_3}{\Omega_1} - \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \right] \sin^2 \zeta.$$

4) Wir gehen nun zur Betrachtung der Schwingungsform über, die durch die Gleichungen (4) gegeben ist.

Zunächst folgt, wenn $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = \operatorname{tg} \psi e^{i\delta}$, aus:

$$\left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_1 \left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_2 = 1 = \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2 \, e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \qquad \begin{array}{l} \psi \text{ Azimut} \\ \delta \text{ Phasenverzögerung} \end{array}$$

die Beziehung $\delta_1 + \delta_2 = 0$. Die Beziehung $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$ ist unmöglich, weil $\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2 \cos(\delta_1 + \delta_2) = +1$ und $0 < \psi_h < \frac{1}{2}\pi$ ist. Die Ellipsen werden also stets im entgegengesetzten Sinne durchlaufen.

Bedeutet β den Winkel der einen Ellipsenaxe mit dem Axenkreuz, so gilt stets:

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 2\psi \cos \delta.$$

Da nun wegen $\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2 = 1$ auch $\operatorname{tg} 2\psi_1 = -\operatorname{tg} 2\psi_2$ ist, so ist auch

$$\operatorname{tg} 2\beta_1 = -\operatorname{tg} 2\beta_2, \qquad \beta_2 = 90 - \beta_1.$$

Die beiden Ellipsen liegen im allgemeinen nicht mehr gekreuzt mit den Axen $\|$ und $\perp$ zum Hauptschnitt, sondern sie sind um gleiche Winkel, aber in entgegengesetztem Sinne aus dieser Lage herausgedreht.

Ihr Axenverhältnis $\operatorname{tg} \alpha$ ist bestimmt durch

$$\text{(12a)} \qquad \pm \sin 2\alpha = \sin 2\psi \sin \delta.$$

Es ist also

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Die beiden Ellipsen haben gleiches Axenverhältnis.

Um die Abhängigkeit von α und β von den Parametern des Kristalls zu erkennen, knüpft man passend an den Ausdruck

$$\frac{2}{\left(\frac{A'}{B}\right)_1 + \left(\frac{A'}{B}\right)_2} = \frac{2}{\left(\operatorname{tg}\psi + \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}\right)\cos\delta + i\left(\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}\right)\sin\delta},$$

wobei es gleichgültig ist, ob man zu ψ und δ den Index (1) oder (2) wählt. Diese Formeln kann man weiter vereinfachen:

$$\frac{2}{\left(\frac{A'}{B}\right)_1 + \left(\frac{A'}{B}\right)_2} = \frac{\sin 2\psi}{\cos\delta - i\sin\delta\cos 2\psi}$$

$$= \frac{\sin 2\psi\cos\delta + i\sin 2\psi\cos 2\psi\sin\delta}{\cos^2\delta + \sin^2\delta\cos^2 2\psi}.$$

Führt man mit Hilfe der bekannten Beziehung:

$$\cos 2\psi = \cos 2\alpha\cos 2\beta$$

und unter Berücksichtigung von (12) und (13) statt ψ und δ jetzt α und β ein, so ist:

$$\frac{2}{\left(\frac{A'}{B}\right)_1 + \left(\frac{A'}{B}\right)_2} = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha} \pm i\operatorname{tg} 2\alpha\cos 2\beta = -\frac{i\vartheta}{\eta}.$$

Dabei ist das + Zeichen zu wählen, wenn $\sin\delta > 0$, das − Zeichen wenn $\sin\delta > 0$.

ϑ und η sind im allgemeinen komplexe Größen, ebenso

$$\frac{2}{\left(\frac{A'}{B}\right)_1 + \left(\frac{A'}{B}\right)_2}.$$

Um die letzte Formel diskutieren zu können, setzen wir:

$$\eta = \eta' - i\eta'',\quad g_1 + g_{11} = g' + ig'' = g'_{11} + g'_1 + i(g''_{11} + g''_1)$$

$$\frac{2}{\left(\frac{A'}{B}\right)_1 + \left(\frac{A'}{B}\right)_2} = q + ip.$$

Dann gilt:

(13)
$$p = -\frac{g'\eta' + g''\eta''}{\eta'^2 + \eta''^2} = \pm\operatorname{tg} 2\alpha\cos 2\beta$$

$$q = +\frac{g''\eta' - g'\eta''}{\eta'^2 + \eta''^2} = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha}.$$

Ist $p = 0$, so muß entweder $\alpha = 0$, d. h. das Licht linear polarisiert sein oder $\beta = \pm 45^\circ$, d. h. die Axe der Schwingungsellipse

muß einen Winkel von $\pm 45^\circ$ mit dem Hauptschnitt bilden. Welche von den beiden Möglichkeiten vorliegt, entscheidet man danach, ob $|q| > 1$ oder $|q| < 1$ ist. Im ersten Fall ist nämlich:

$$|q| = |\sin 2\beta| \leqq 1,$$

im zweiten

$$|q| = \left|\frac{1}{\cos 2\alpha}\right| \geqq 1.$$

Nunmehr wollen wir die Gesetze der Geschwindigkeiten und Absorptionskoeffizienten und die der Schwingungsform in der Umgebung eines isolierten Absorptionsstreifens etwas näher ins Auge fassen.

5) Bei ein und demselben Neigungswinkel der Wellennormale gegen die optische Axe kann sowohl der reelle wie der imaginäre Teil von $\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Theta_1 \Omega_{11}} - \frac{1}{\Theta_{11} \Omega_1}\right)$ wie auch der reelle von $g_1' + g_{11}' = g'$ sein Vorzeichen umkehren, wenn man in der Skala der Frequenzen fortschreitend den Absorptionsstreifen passiert. Für das durchsichtige Gebiet zu beiden Seiten des Streifens würde das nach (11) besagen, daß, wenn g' und η' beide ihr Vorzeichen wechseln, oder beide ihr Zeichen behalten, jede Welle — wenn wir eine Welle als ordinären und extraordinären Strahl unterscheiden, in den sie für $\vartheta = 0$ übergeht — ihren Rotationssinn behält, daß aber, wenn nur eine der Größen η' oder g' ihr Zeichen umkehrt, jede Welle ihren Rotationssinn umkehrt. Dieser letztere Fall ist der interessantere und ihn wollen wir zunächst diskutieren. Um die Fragestellung leichter aussprechen zu können, nehmen wir für den Augenblick an, daß bei keiner Farbe eine der Größen g' oder g'' für verschiedene ζ verschiedenes Vorzeichen hat.

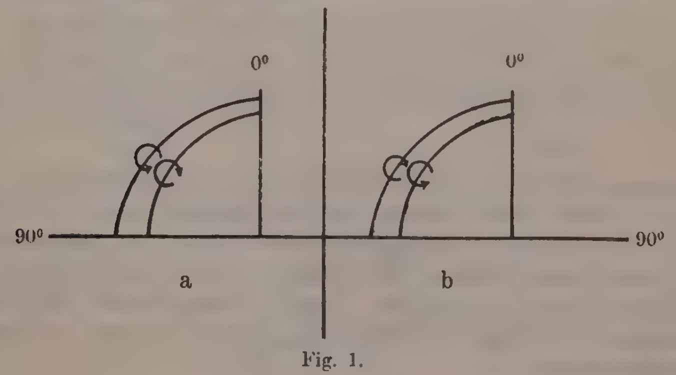


Fig. 1.

Für den betrachteten Fall stellen dann etwa die Kurven in Fig. 1 die Geschwindigkeiten mit dem zugehörigen Rotationssinn zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens (also für zwei verschiedene Farben dar, als abhängig von dem Winkel ζ. Der vertikalen Richtung entspricht $\zeta = 0$, der horizontalen $\zeta = 90^0$. Wir stellen nun die Frage: Wie geht im Absorptionsstreifen die Figur *a* in die Figur *b* über?

Man sieht sofort ein, daß dies auf zweierlei Art geschehen kann:

1) Für ein bestimmtes ζ kann jede Welle ihren Rotationssinn behalten, es wechselt aber der reelle Teil der Differenz der Brechungsindizes $\Delta' = n_+ - n_-$ sein Vorzeichen. Dies findet z. B. statt für $\zeta = 0$. Wie aus (6) folgt, bleibt trotzdem das Licht für $\zeta = 0$, wo $\Theta_{\text{I}} = \Theta_{\text{II}}$ ist, stets zirkular polarisiert und die Absorptionsindizes bleiben im allgemeinen verschieden, sodaß bei $\zeta = 0$ im allgemeinen zwei zirkulare Wellen sich in verschiedener Weise fortpflanzen. Δ' bleibt indes im allgemeinen von 0 verschieden bei $\zeta = 90^0$. Es kann also im allgemeinen nicht die Existenz einer von $\zeta = 0$ bis $\zeta = 90^0$ kontinuierlich verlaufenden Kurve, auf der $\Delta' = 0$ ist, in der $\nu\,\zeta$-Ebene vorausgesetzt werden (Fig. 2).

2) Δ' behält für alle Farben sein Vorzeichen; es kehrt sich der Rotationssinn jeder einzelnen Welle mittels Durchganges durch lineare Polarisation um. Dies wird im allgemeinen nicht für alle ζ vorkommen, da z. B. parallel der Axe das Licht zirkular bleibt, wie wir eben sahen. Der besprochene Uebergang kann also auch nicht durch eine analoge Kurve $\operatorname{tg} \alpha = 0$ allein vermittelt werden.

Aus dem Gesagten folgt, daß man im allgemeinen bei einem Kristall für gewisse ζ den unter 1) auseinandergesetzten Uebergang

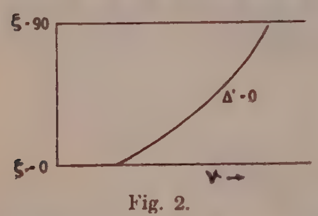


Fig. 2.

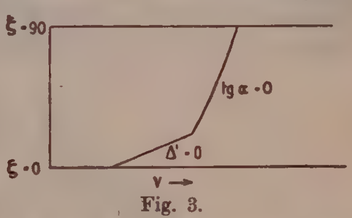


Fig. 3.

anzunehmen hat, für die übrigen den unter 2) besprochenen (vgl. Fig. 3). Diese beiden Arten des Ueberganges lassen sich aber nicht ohne weiteres für variierende Farben ν und variierende ζ stetig aneinander knüpfen. Der Punkt, in dem diese beiden Arten aneinander stoßen, der durch ν_0 und ζ_0 definiert sein mag, muß jedenfalls für n und die Schwingungsform ein ausgezeichnetes Verhalten zeigen.

In dem ersten der besprochenen Fälle muß für ein gewisses ζ in irgend einer Farbe im Absorptionsstreifen

$$\Delta' = \mathfrak{n}_{+} - \mathfrak{n}_{-} = 0$$

sein. Es muß also die Wurzel in (8) rein imaginär sein. Also muß gelten

(14) $\eta' \eta'' + g' g'' = 0$ und zugleich $\eta'^2 + g'^2 - (\eta''^2 + g''^2) \leqq 0.$

In dem zweiten Fall muß für ein solches ζ bei einer gewissen Farbe das Licht linear polarisiert sein. Es muß also gelten:

(15) $g' \eta' + g'' \eta'' = 0$ und zugleich $\left| \frac{g' \eta'' - g'' \eta'}{\eta'^2 + \eta''^2} \right| \leqq 1.$

6) Im allgemeinen hat man zugleich mit zwei Variabeln zu rechnen: mit dem Winkel ζ und der Farbe ν. Dann sind die Betrachtungen ziemlich kompliziert und wir wollen zunächst mit einem einfachen Falle anfangen und dann zu komplizierteren gehen. Wir nehmen zunächst an, daß für alle Farben ν gilt

$$\eta'' = 0, \quad g_1' = g_3', \quad g_1'' = g_3'',$$

also $g_1 + g_{11} = 2 g_1$ unabhängig von ζ ist.

Die Gleichung (14) geht dann über in

(14) $g' = 0$ zugleich $\eta'^2 - g''^2 \leqq 0.$

Aus Gleichung (15) erhält man:

(15a) $g' = 0$ zugleich $\left| \frac{g''}{\eta'} \right| \leqq 1.$

Nach unserer Annahme ist $g' = 2 g_1'$, hängt also nicht mehr von ζ ab. Die Lösungen der Gleichungen (14a) und (15a) liegen also bei derselben Frequenz ν.

Für alle Winkel, für welche $|\eta'| \leqq |g'|$ ist, gilt $\Delta' = 0$. Für alle Winkel, für welche $|\eta'| \geqq |g''|$ ist, gilt $\alpha = 0$. Hier ist also das Licht linear polarisiert. Beide Gleichungen (14a) und (15a) sind zugleich erfüllt, wenn

(16) $|\eta'| = |g''|$

oder

$$\sin^2 \zeta = \left| \frac{g''}{\bar{\eta}'} \right|$$

ist, wobei

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_1 \Omega_1}} \left[\frac{\Omega_1 - \Omega_3}{\Omega_1} - \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \right]$$

also den Wert von η senkrecht zur Axe bedeutet. In dem durch (16) definierten Punkte ist also das Licht linear und unter 45° gegen den Hauptschnitt polarisiert. Ferner werden in diesem Punkte nicht nur die n der beiden Wellen einander gleich, sondern auch die k. Es ist nämlich

$$\eta^2 + \vartheta^2 = 0.$$

Hier pflanzt sich also nur eine Welle fort; der Kristall verhält sich isotrop. Da η' für $\zeta = 0$ verschwindet, so wird die Gleichung (14a) ihre Lösungen in der Umgebung der Axe haben; die Gleichung (15a) außerhalb dieses Gebietes. Wir haben also im Ganzen vier Stücke der Wellenfläche zu unterscheiden: Zwei Stücke, die ihren Rotationssinn für alle Farben behalten und die wir passend danach unterscheiden, zwei Stücke, für die Δ' sein Zeichen nicht ändert (für alle Farben) und in denen wir von der schnelleren und langsameren Welle sprechen wollen. Betrachten wir nun die Flächen von $\mathfrak{n}$ für verschiedene Farben: Außer bei ν_0 sind die Flächen des komplexen $\mathfrak{n}$ vollständig getrennt, d. h. greift man einen Punkt dieser Fläche heraus, so ist ihm eine Fläche für alle ζ (bei konstanter Farbe) eindeutig zugeordnet. Dies ist nicht der Fall bei ν_0. Hier hängen vielmehr die Flächen im Punkte ζ_0 zusammen. Die Zuordnung der vier Flächenstücke ist nicht mehr eindeutig. Vielmehr ist die Zuordnung je zweier Stücke verschieden, je nach der Seite der Farbenskale, von der aus man sich der Farbe ν_0 nähert. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß für jede der beiden Flächen für alle $\nu \neq \nu_0$ zu allen ζ der gleiche Rotationssinn gehört.

Es sei noch bemerkt, daß für $\nu = 0$ die Gleichung (14a) für das zweite Gebiet, wo $|\eta'| > |g''|$ ist, aussagt, daß hier $\Delta'' = k_+ - k_- = 0$ ist, und die Gleichung (15a) für das Gebiet, wo $|\eta'| < |g''|$, daß hier die Ellipsenaxe unter 45° gegen den Hauptschnitt geneigt ist.

Noch allgemeiner ist der Fall, daß nur angenommen wird, daß $g'_{\rm I} + g'_{\rm II}$ und $g''_{\rm I} + g''_{\rm II}$ beim Fortschreiten von $\zeta = 0$ bis $\zeta = 90°$ in keiner Farbe ihr Vorzeichen wechselt. Dann kann man sich den gesuchten Uebergang etwa so vorstellen.

Bei einer gewissen Farbe wird dann (15) zunächst bei $\zeta = 90°$ erfüllt sein. Hier wird auch (16) genügt werden. Das Licht ist also hier linear polarisiert. Geht man zu größeren ν, so rückt der Punkt, wo lineare Polarisation herrscht, allmählich immer nach kleineren ζ; an allen Punkten, die er bestrichen hat, hat er den Rotationssinn umgekehrt. Dies geht bis zu der Farbe $\nu = \nu_0$, wo er $\zeta = \zeta_0$ erreicht hat. Beim Passieren dieses

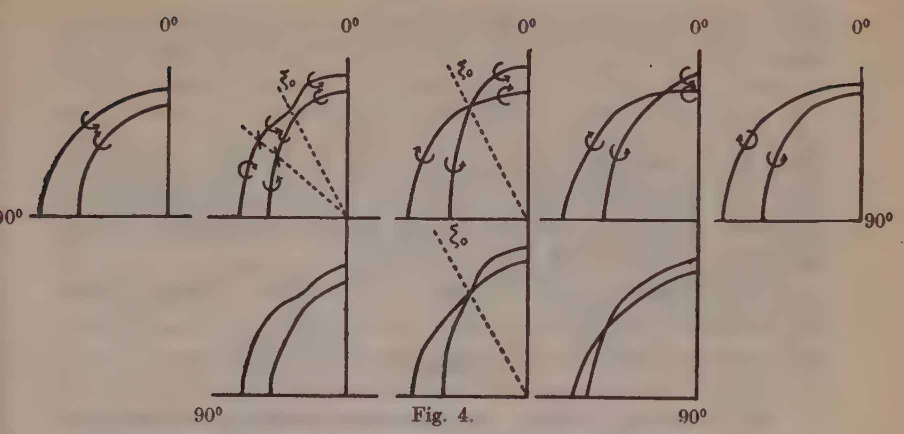


Fig. 4.

Verzweigungspunktes ändert sich die gegenseitige Zuordnung der oben definierten Flächenstücke von n. Hier knüpfen jetzt die Lösungen der Gleichung (17) an. Der Punkt, der durch eine Lösung (17) definiert ist, bedeutet Gleichheit von n. Die reellen Flächen von n ziehen sich also allmählich durch einander hindurch. Der Prozeß ist vollendet, sobald die Lösung bei $\zeta = 0$ angekommen ist.

Es sei noch bemerkt, daß unter diesen Annahmen auch der Punkt, welcher eine Lösung von (15) darstellt, weiter von $\zeta = \zeta_0$ nach $\zeta = 0$ wandert; jetzt aber die Bedeutung hat, daß in ihm die Neigung der Ellipsenaxen gegen den Hauptschnitt 45° beträgt. Ebenso können Lösungen für

$$\eta' \eta'' + g' g'' = 0, \quad \eta'^2 - \eta''^2 + g'^2 - g''^2 > 0,$$

auch für $\zeta > \zeta_0$ unter Umständen existieren; in diesen Punkten sind dann k einander gleich.

Hiermit ist nun nicht gesagt, daß die Verhältnisse immer so einfach liegen. Bei komplizierteren Dispersionsverhältnissen brauchen die Lösungen keineswegs immer in einer Richtung von ζ fortzuschreiten; auch kann man sich denken, daß eine ausgezeichnete Richtung ζ_0 bei ν_0 erreicht wird, ohne daß man hier die Zuordnung der vier Flächenstücke zu ändern braucht.

7) Wir gehen nunmehr zu dem allgemeinen Fall über, nehmen also an, daß η', η'' und g' ihr Vorzeichen wechseln können und setzen keine Beziehung zwischen g_1' und g_2' oder g_1'' und g_2'' voraus. Die Bedingung für $\Delta' = 0$ bleibt.

(14) $\quad \eta' \eta'' + g' g'' = 0, \quad$ zugleich $\quad \eta'^2 + g'^2 - (\eta''^2 + g''^2) \leqq 0.$

Geht man in der $\nu\zeta$-Ebene in beliebiger Richtung durch einen

durch (14) definierten Punkt, so wird Δ' sein Zeichen wechseln, wenn

$$\frac{\eta' \eta'' + g' g''}{\eta'^2 + g'^2 - \eta''^2 - g''^2}$$

oder, da außer im singulären Punkte $\nu_0 \zeta_0$ der Nenner nicht zugleich mit dem Zähler durch 0 geht, wenn $\eta' \eta'' + g' g''$ sein Zeichen wechselt. Das gilt natürlich auch, wenn man speziell bei konstantem ζ einen solchen Punkt passiert.

Die Bedingung dafür, daß das Licht in einem Punkte $\nu \zeta$ linear polarisiert ist, lautete:

$$(15) \qquad g' \eta' + g'' \eta'' = 0, \quad \text{zugleich} \quad \frac{g' \eta'' - g'' \eta'}{\eta'^2 + \eta''^2} \lesseqgtr 1.$$

Als Bedingung dafür, daß in einem Punkte $p = 0$, $|q| < 1$ sich der Rotationssinn wirklich umkehrt, ergibt sich, daß der imaginäre Teil von $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$ seine Zeichen wechselt. Setzt man also in der Nähe von $p = 0$, $|q| < 1$:

$$\frac{\eta}{\vartheta} = -i \frac{1}{q} - \frac{p}{q^2} = i a + b,$$

wobei $a > 1$, b eine sehr kleine Größe bedeutet, so erhält man:

$$\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = \pm i \left[\pm (i a + b) + \sqrt{1 - a^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{1 - a^2} \right\} \right]$$

Da $\sqrt{1 - a^2}$ imaginär ist, so folgt, daß der reelle Teil von $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$ mit b sein Zeichen wechselt.

Die Welle vertauscht also ihren Rotationssinn, wenn p sein Zeichen ändert.

Aus (14) kann man leicht die Bedingungen ableiten

$$|g''| \geqq |\eta'|, \quad |g'| \leqq |\eta''|,$$

während aus (15) folgt

$$|g''| \leqq |\eta'|, \quad |g'| \leqq |\eta''|.$$

Die Lösungen der Gleichungen liegen also stets in dem Gebiet, wo

$$|g'| \leqq |\eta''|$$

ist. Ferner sieht man, daß, wenn $g'' \neq 0$[1]), ein Punkt nie zugleich die Gleichungen (14) und (15) befriedigen kann außer wo $|g''| = |\eta'|$ und $|g'| = |\eta''|$ ist. Für diesen Punkt ist aber

1) Dieser Fall spielt in der Magnetooptik eine Rolle. Da ich später ausführlich hierauf zurückzukommen gedenke, mag er an dieser Stelle beiseite bleiben.

$$\eta^2 + \vartheta^2 = 0.$$

In ihm sind also stets die komplexen Brechungsindizes der beiden Wellen einander gleich. Die komplexen Flächen für $\mathfrak{n}_+$ und $\mathfrak{n}_-$ hängen bei der Farbe ν_0 in ζ_0 zusammen. Wieder kann man vier Stücke der Fläche betrachten von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \zeta_0$, welche außer für die Farbe $\nu = \nu_0$ eindeutig einander zugeordnet sind. Ob bei ν_0 die Anordnung der einzelnen Stücke zu ändern ist, folgt aus der Betrachtung des Rotationssinnes der einzelnen Flächen. Es kann auch sein, daß z. B. die Lösung der Gleichung (15) beim Fortschreiten in ν von $\zeta = 90^0$ bis $\zeta = \zeta_0$ und dann zurück von $\zeta = \zeta_0$ bis $\zeta = 90^0$ läuft, statt daß sich bei $\zeta = \zeta_0$ die Lösungen von (14) abschließen. In diesem Falle würde die Zuordnung der vier Flächenstücke für alle Farben dieselbe sein, da sich dann für keine Farbe die Flächen schneiden.

Nur wenn sich in $\zeta = \zeta_0$ an die Lösungen von (15) die der Gleichung (14) anschließen, wenn man die Farbenskala in einer Richtung durchläuft, hat man die Zuordnung der einzelnen Flächenstücke zu ändern.

Sehr häufig wird es der Fall sein, daß η' und g'' im Absorptionsstreifen ihr Vorzeichen behalten. Dann muß offenbar $\frac{\eta''}{g'}$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie $\frac{\eta'}{g''}$, um die Gleichung (14) zu erfüllen. Dasselbe erfordert aber auch Gleichung (15). Daraus ergibt sich, daß die Lösungen der beiden Gleichungen auf dieselben Bereiche innerhalb des Absorptionsstreifens beschränkt sind.

Es liegt nun nahe zu fragen, ob auch Fälle vorkommen können, wo zwei singuläre Punkte ζ_0 auftreten. Dies ist in der Tat der Fall und mit einem solchen Beispiel wollen wir diese Betrachtungen abschließen.

Wir nehmen an, daß η' sein Vorzeichen im Absorptionsstreifen behält, g' das seinige umkehrt. Es kann unter Umständen möglich sein, daß auf der ganzen normalen Fläche von $\zeta = 0$ bis $\zeta = 90$ für gewisse Farben $|g''| > |\eta'|$ ist. Eine solche Annahme scheint nach den vorliegenden Beobachtungen an flüssigen Kristallen durchaus nicht unmöglich zu sein.

Wir wollen nun annehmen, daß in der Umgebung von $\zeta = 90$ für gewisse Farben

$$|g''| > |\eta'| \qquad \eta' \neq 0$$

ist, und für solche nirgends im Spektrum Lösungen von

$$g'\eta' + g''\eta'' = 0 \quad \text{zugleich} \quad \left|\frac{g'\eta'' - g''\eta'}{\eta'^2 + \eta''^2}\right| \leq 1$$

existieren. Wir wollen ferner annehmen, daß für einen Winkel ζ_1 unabhängig von ν (der Einfachheit halber)

$$g'' = g_1'' \cos^2 \zeta + g_3'' \sin^2 \zeta$$

verschwindet, also $g_3'' = -g_1'' \operatorname{cotg}^2 \zeta_1$ ist.

Bei ζ_1 hat dann sicher (14) für keine Farbe eine Lösung. Wohl aber hat (15) eine Lösung in ζ_1, nämlich für die Farbe, wo $g' = 0$ ist. Man sieht also, daß in diesem Falle in der Umgebung von $\zeta = 0$ und $\zeta = 90^0$ der Uebergang von Fig. 1a zu 1b so stattfindet, daß Δ' sein Zeichen umkehrt, für ein ringförmiges Gebiet um $\zeta = \zeta_1$ in der Weise, daß der Rotationssinn sich umkehrt, indem die Schwingung durch lineare Polarisation hindurchgeht.

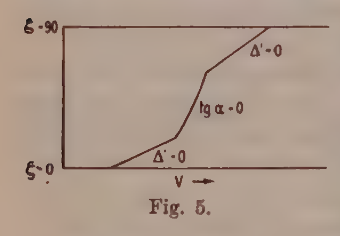


Fig. 5.

In diesem Falle existieren zwei singuläre Richtungen ζ_0, wo nämlich:

$$g'' = \pm \eta', \quad g' = \mp \eta''$$

(natürlich im allgemeinen nicht bei derselben Farbe), welche den Ring um ζ_1 begrenzen. Das Schema (5) stellt diesen Uebergang dar.

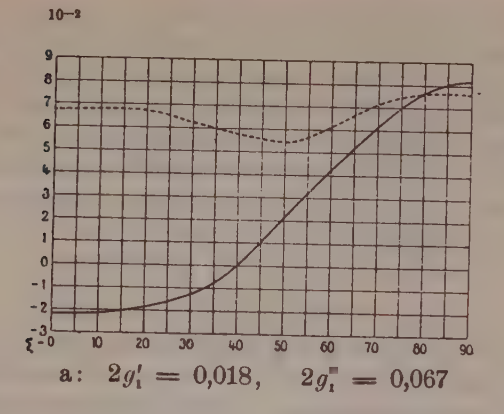
8) Wir wenden uns jetzt zu der Abhängigkeit der Fortpflanzung bei konstanter Farbe für verschiedene ζ. Aus (13) folgt, daß $\alpha = 45^\circ$ nur möglich ist, wenn $p = q = \infty$, d. h. für $\eta' = \eta'' = 0$, also nur $\parallel$ der Axe. Wir können also annehmen, daß $\operatorname{tg} \alpha$ stets $< 45^\circ$ ist. Dann ist $\operatorname{tg} 2\alpha$ positiv. β kann dann natürlich $> 45^\circ$ werden. Wir wollen nun von der Welle ausgehen, welche in den ordentlichen Strahl übergeht für $g' = g'' = 0$. Für diese muß bei diesem Uebergange $\beta = 0$, also $\cos 2\beta = +1$ werden.

Das Vorzeichen vor $\operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta$ ist nun danach zu bestimmen, ob $\delta \gtreqless 90^\circ$ ist, also nach dem Umlaufssinn des ordentlichen Strahls. Ist δ positiv, also der Umlaufssinn positiv, so ist auch hier das $+$ Zeichen zu wählen. In diesem Fall entspricht $p > 0$, ein $\beta < 45^\circ$, $p < 0$, $\beta > 45^\circ$. Ist der Umlaufssinn negativ, so entspricht $p > 0$: $\beta > 45^\circ$, $p < 0$, $\beta < 45^\circ$. Um das Axenverhältnis und die Neigung der Hauptaxe der Ellipse aus den Konstanten des Kristalls zu berechnen, hat man (14) nach α und β aufzulösen. Man erhält:

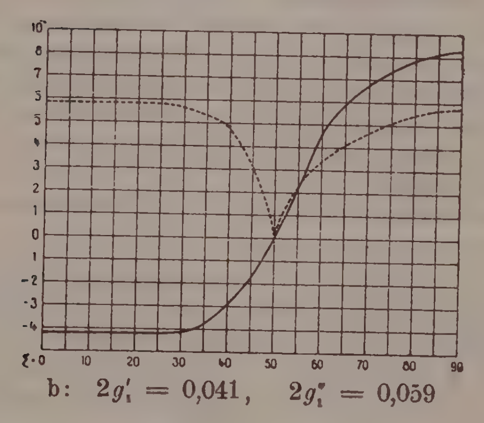
$$\frac{q^2}{\sin^2 2\beta} - \frac{p^2}{\cos^2 2\beta} = 1$$

$$\frac{q'^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{p'^2}{\cos^2 2\alpha} = 1 \qquad p' = -\frac{1}{q} \quad q' = \frac{p}{q}.$$

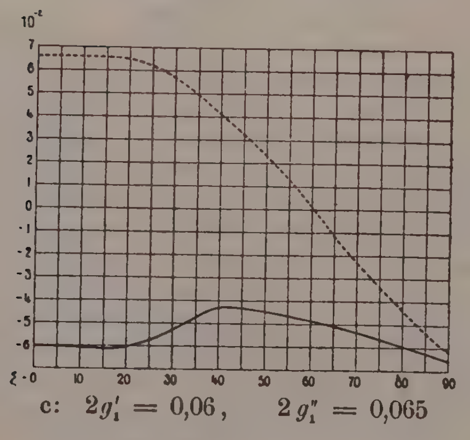
Die weitere Behandlung würde am einfachsten geometrisch erfolgen.



a: $2g_1' = 0{,}018$, $2g_1'' = 0{,}067$



b: $2g_1' = 0{,}041$, $2g_1'' = 0{,}059$



c: $2g_1' = 0{,}06$, $2g_1'' = 0{,}065$

Fig. 6.

Die Gleichungen stellen in der p, q- resp. $p'\,q'$-Ebene Hyperbeln von der Exzentrizität Eins dar. p, q und p', q' sind Funktionen von ζ. Eliminiert man ζ, so erhält man stets eine lineare Abhängigkeit q von p (resp. q' von p'). In der $p\,q$ resp. $p'\,q'$ Ebene entspricht also ein Fortschreiten in ζ dem Wandern eines Punktes auf eine gerade Linie. Diese Gerade durchschneidet die Hyperbeln. Verfolgt man die getroffene Hyperbel bis zum Scheitel, so ist der Scheitelabstand das gesuchte $\sin 2\beta$ resp. $\sin 2\alpha$.

Für durchsichtige Kristalle wird $\beta = 0$, und

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{g_1 + g_{11}}{\eta} = \frac{2 g_1}{\eta_s \sin^2 \zeta} - \frac{(g_1 - g_s)}{\eta_s}.$$

Ein näheres Eingehen auf die komplexen Brechungsindizes ist wegen der Kompliziertheit der Formel (8) nicht wohl möglich. Im Folgenden gebe ich drei Kurven für drei typische Fälle für den reellen und imaginären Teil von $n_1 - n_2$ wieder. Der imaginäre (reelle) Teil ist durch die punktierten (ausgezogenen) Kurven dargestellt (Fig. 6). Es ist angenommen, daß in allen drei Fällen

$$\eta'_{\zeta=90} = 0{,}1, \quad \eta''_{\zeta=90} = 0{,}07, \quad g'_1 = g'_s, \quad g''_1 = g''_s$$

ist. Die zugehörigen Werte für g'_1 und g''_1 finden sich unter jeder Figur.

9) Wir haben bisher mit ebenen homogenen Wellen gerechnet. Die an flüssigen Kristallen vorliegenden Beobachtungen beziehen sich aber meist auf inhomogene Wellen. Hier wird die Diskussion außerordentlich kompliziert, da ζ jetzt ein komplexer Winhel ist. Immerhin lassen sich die Gleichungen für die Schwingungsform unschwer auch für inhomogene aufstellen.

Bei den Beobachtungen befindet sich zumeist die flüssig kristallinische Substanz zwischen zwei Glasplatten in einer dünnen Schicht, und die optische Axe steht senkrecht zur Glasplatte. Um Beobachtungen anzustellen, bei denen das Licht sich schief zur Axe fortpflanzt, muß man also den Lichtstrahl geneigt auf die Kristallschicht auffallen lassen. Den Polarisationszustand des einfallenden Strahls kann man so wählen, daß im Kristall nur eine Welle entsteht und so nach einander die zwei Wellen analysieren. Bei diesem Verfahren kann man zwar — wenn man die Doppelbrechung ungefähr kennt — es erreichen, daß die Normalen der beiden Wellen im Kristall gleiche Richtung haben; dann aber sind, wenn der Kristall absorbierend ist, die beiden Wellen in verschiedener Weise inhomogen. Man könnte diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die Axe des flüssigen Kristalls schief zu der

Glasplatte legen könnte, und das Licht senkrecht auf die Kristallfläche fallen ließe. Doch ist mir nicht bekannt daß diese Anordnung hergestellt werden könnte. Darum ist für die beiden beobachtbaren Wellen der komplexe Winkel ζ verschieden.

Läßt man also Licht schief auf eine Kristallplatte fallen, dann gilt für die beiden Wellen — auch nicht in der Annäherung $\frac{\Theta_{I}}{\Theta_{II}} = 1$ im Faktor von $\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}$ — nicht mehr

$$\left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_1 \left(\frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}}\right)_2 = 1.$$

Damit fallen aber auch die Schlüsse über die Phasenverzögerung δ und das Azimut ψ; folglich auch über das Axenverhältnis α und den Winkel der Ellipsenaxe gegen den Hauptschnitt β. Im allgemeinen haben also die beiden Schwingungen verschiedenes Axenverhältnis und verschiedene Neigung der Ellipsenaxe gegen den Hauptschnitt.

10) Beobachtungen an festen einaxigen Kristallen, welche eine Prüfung der Theorie gestatten, liegen bisher meines Wissens noch nicht vor. Obwohl ein jeder drehende Kristall in irgend einem Spektralgebiete die hier besprochenen Erscheinungen zeigen muß, so scheinen doch die bekannten Kristalle solche Absorptionsstreifen in schwer zugänglichen Gebieten zu haben, oder — wie z. B. vielleicht bei Zinnober — ist der Absorptionsstreifen so breit und stark, daß an seinen Rändern, wo man beobachten kann, die hier signalisierten Erscheinungen nicht mehr merklich sind, während im Streifen der Pleochroismus gering ist gegenüber der Gesamtabsorption.

Die Veranlassung zu der vorliegenden Diskussion des Ansatzes von W. Voigt gaben vielmehr, wie gesagt, Erscheinungen an flüssigen Kristallen.

An dem von Hr. Vorländer hergestellten *p*-Cyanbenzalaminozimtsäure-akt.-amylester hat Hr. Stumpf die Fortpflanzung des Lichtes eingehend untersucht. Dieser Körper hat einen Absorptionsstreifen in Gelb. Der Pleochroismus ist hier so stark, daß $\|$ der Axe selbst nach Passieren sehr kleiner Schichtdicken merklich zirkulares Licht austritt.

Diese Erscheinungen führen fast direkt dazu, im Kristall parallel der Axe zwei zirkulare Wellen nach dem Vorgange Fresnels anzunehmen. Dann ist aber der Ansatz von W. Voigt und P. Drude wohl der allgemeinste, der den Symmetrieverhältnissen und dem Energieprinzip Rechnung trägt. Auch die Hinzu-

nahme höherer Differentialquotienten von A ... nach t wird, wie man leicht sieht, die Ausgangsgleichungen (1) nicht verändern. Somit scheint es gerechtfertigt, die Grundgleichungen fester einaxiger drehender Kristalle, wenn auch zunächst versuchsweise, auf flüssige zu übertragen, und die aus ihnen gezogenen Folgerungen zunächst in qualitativer Hinsicht mit den Resultaten der Beobachtung zu vergleichen.

Für das durchgehende Licht erhält man dann eine sehr befriedigende qualitative Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie.

Daß das Drehungsvermögen so ungewöhnlich groß ist, erklärt sich aus der Nähe eines Absorptionsstreifens, wo ja tatsächlich nach Seite (219) D sehr klein ist. Auch nehmen die Kurven des Drehungsvermögens, welche Herr Stumpf beobachtet hat, durchaus den Verlauf, wie wir es nach der Dispersionstheorie erwarten dürfen.

Daß die Absorption für die beiden zirkularen Wellen sehr verschieden ist, ist nach unserer Theorie sehr wohl möglich. Wenn dies der Fall ist, so ist das durchgehende Licht zirkular polarisiert.

Die Schwingungsform des durchgehenden Lichtes ist auf Seite 226 berechnet. Die Theorie verlangt, daß sich zwei Ellipsen von entgegengesetztem Rotationssinn fortpflanzen, welche gleiches Axenverhältnis haben und deren Axen um gleiche Winkel, aber in entgegengesetztem Sinne aus dem Hauptschnitt herausgedreht sind. Dies entspricht durchaus den Beobachtungen. Allerdings zeigen diese im blauen Licht nahe der Axe kleine Abweichungen von diesem Gesetz. Aber in diesem Spektralgebiet und nahe der Axe ist die Absorption der beiden Wellen recht verschieden. Die Wellen sind hier in verschiedenem Maße inhomogen, und so dürften diese Abweichungen wohl hierdurch ihre Erklärung finden. Die Gesetze der Schwingungsform bei konstanter Farbe fügen sich also qualitativ den Forderungen der Theorie.

Betrachten wir jetzt die Schwingungsform bei verschiedenen Farben. Im Absorptionsstreifen behält nach den Beobachtungen die Doppelbrechung ihr Vorzeichen, die Drehung aber kehrt ihren Sinn um. Gehen wir von der Farbe ν_1 aus, für die der reelle Teil von n parallel der Axe verschwindet. Dann werden auf der einen Seite im Spektrum von dieser Farbe aus die beiden Flächen von n für alle ζ vollständig getrennt verlaufen, auf der anderen (innerhalb des betrachteten Spektralgebietes) sich schneiden.

Dann ergibt die Theorie, daß eine Drehung der Axe um mehr als 45° aus dem Hauptschnitt nur auf der Seite von ν_0 möglich ist, auf der sich die Flächen von n durchschneiden, (falls, wie es

hier der Fall ist, die Doppelbrechung senkrecht der Axe nicht durch Null geht).

Die Beobachtung hat auch diesen Satz bestätigt. Abweichung der Ellipsenaxe aus dem Hauptschnitt um mehr als 45° wurde nur im Blau beobachtet. Andererseits konnte man durch Beobachtung der Schwingungsform für verschiedene Winkel ζ der Wellennormale gegen die Axe feststellen, wie die Schwingungsrichtung senkrecht zur Axe und der Rotationssinn parallel der Axe zuzuordnen sind. Die Messung der Brechungsindizes senkrecht zur Axe und die Beobachtungen des Drehungssinnes parallel der Axe zeigten dann, daß im roten Licht die langsamere Welle parallel zur Axe auch die langsamee senkrecht zur Axe ist, daß aber im blauen Licht die langsamere Welle senkrecht zur Axe, die schnellere Welle senkrecht zur Axe ist.

Eine schöne Bestätigung der Theorie wäre das Auffinden des auf Seite 228 u. 232 geforderten singulären Punktes bei der Farbe ν_0 und dem Winkel ζ_0 der Normale gegen die optische Axe. Hier sollen nach der Theorie beide Strahlen gleiche Brechungsindizes und gleiche Absorptionsindizes haben, der Kristall sich also in dieser Richtung wie ein isotroper Körper verhalten. Leider war es nicht möglich, beim Cyanester diesen Punke zu erreichen. Der Winkel, wo die Ellipsenaxe unter 45° gegen den Hauptschnitt geneigt ist, wandert, je weiter man nach Violett geht, zu größeren ζ. ζ_0 ist also wahrscheinlich größer als die beobachteten ζ, für die die Ellipsenaxe um 45° aus dem Hauptschnitt herausgetreten ist, und ν_0 liegt weiter im Violett, als die Beobachtungen ausgedehnt werden konnten. Beim Cyanester tritt nämlich im Violett eine für beide Strahlen gleichmäßige Absorption auf, welche die Beobachtung des durchgehenden Lichtes verhindert. Vielleicht gelingt die Auffindung dieses merkwürdigen Punktes $\nu_0 \zeta_0$ bei einem anderen Kristall.

Im Ganzen scheint also diese qualitative Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung des durchgehenden Lichtes zu einem befriedigenden Resultat zu führen.

Zur Transformationstheorie der automorphen Funktionen II.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt in der Sitzung am 13. Januar 1912 durch den vorsitzenden Sekretär.

In einer unter dem gleichen Titel der Kgl. Ges. der Wiss. am 13. Oktober 1911 vorgelegten ersten Note habe ich die Transformation 3. Grades auf die zur Gruppe Γ der Signatur (0,3; 2, 4, 5) gehörende automorphe Funktion angewandt und die Untersuchung bis zur Aufstellung der zugehörigen Transformationsgleichung 10. Grades gefördert, welche als Analogon der in der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen auftretenden Modulargleichungen im Mittelpunkt der ganzen Entwicklung steht. Diese Transformationsgleichung besitzt eine Galoissche Gruppe G_{360} der Ordnung 360, welche ich in der Note „Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen“ (Gött. Nachr. von 1896, Heft 3) arithmetisch erklärt und in ihre Untergruppen zerlegt habe.

Es ist die, wie schon a. a. O. bemerkt wurde, eben jene G_{360}, die A. Wiman in den Math. Ann. Bd. 47, pg. 531 ff., einer invariantentheoretischen Untersuchung unterworfen hat. Am Schlusse seiner Arbeit bezeichnet Wiman die Aufstellung gewisser zur G_{360} gehörenden Gleichungen 6., 10. und 15. Grades als Ziel weiterer Untersuchungen. Die Gleichung 10. Grades ist die oben erwähnte Transformationsgleichung. Dieselbe besitzt als niederste Resolventen zwei solche vom 6. Grade, welche in der oben genannten Note von 1896 mitgeteilt sind. Eine unter ihnen sei hier in unwesentlich abgeänderter, der Transformationsgleichung besser angepaßter Gestalt mitgeteilt:

$$(1)\qquad J:J-1:1=$$

$$\left(\tau^2-\frac{8\sqrt{5}+6i\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\tau+25\right)\left(\tau^2-\frac{7\sqrt{5}+9i\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\tau-\frac{11+3i\sqrt{15}}{10}\right)^2$$

$$:\left(\tau-\frac{11+3i\sqrt{15}}{2}\right)^2(\tau-1)^4:\frac{2^8.3^4.i\sqrt{3}}{5^2.\sqrt{5}}\tau.$$

Die Transformationsgleichung hat ferner in Übereinstimmung mit der Angabe Wimans zwei Resolventen 15. Grades. Der Aufstellung dieser Resolventen ist die vorliegende Note gewidmet.

Wie die beiden Resolventen 6. Grades zu den beiden Systemen von je 6 gleichberechtigten Ikosaedergruppen G_{60} innerhalb der G_{360} gehören, so entsprechen die beiden Resolventen 15. Grades den beiden Systemen von je 15 gleichberechtigten Oktaedergruppen G_{24}, welche in der G_{360} enthalten sind (cf. Note von 1896). Diesen 2.15 G_{24} entsprechen als Untergruppen der oben mit Γ bezeichneten Gruppe der Signatur (0, 3; 2, 4, 5) zwei Systeme von 15 gleichberechtigten Γ_{15} des Index 15, die jedoch in der durch Spiegelungen erweiterten Gruppe $\overline{\Gamma}$ gleichberechtigt werden.

Der erste Schritt der funktionentheoretischen Untersuchung dieser Untergruppen Γ_{15} ist die Aufstellung eines Diskontinuitätsbereiches für eine unter ihnen. Man hat hierbei an die arithmetische Erklärung der bevorzugten Γ_{15} anzuknüpfen (cf. Note von 1896) und muß aus den Substitutionen der Gesamtgruppe Γ ein geeignetes System von 15 bezüglich der Γ_{15} inaequivalenten Substitutionen zusammenstellen. Diese Untersuchung, welche wegen der irrationalen Bauart der Substitutionskoeffizienten nicht ganz mühelos ist, zeigt, daß die einzelne Γ_{15} vom funktionentheoretischen Standpunkte aus als eine unsymmetrische Gruppe der Signatur (0, 5; 2, 2, 2, 2, 4) zu bezeichnen ist.

Der Γ_{15} kommt dieserhalb eine Hauptfunktion zu, die wir $\sigma(\zeta)$ nennen wollen. Auch ist aus dem Diskontinuitätsbereiche der Γ_{15} sofort angebbar, wie die σ-Ebene über der Ebene der Hauptfunktion $J(\zeta)$ der Gesamtgruppe Γ verzweigt ist. Aber es ist aussichtslos etwa von hieraus direkt die zwischen J und σ bestehende algebraische Relation berechnen zu wollen. Die bei der Transformationsgleichung 10. Grades, sowie bei der Resolvente (1) mit Vorteil verwendete „Methode der Funktionaldeterminanten“ verstrickt hier wegen der Höhe des Grades der Relation und der

sich einstellenden Irrationalitäten $\sqrt{5}$ und $\sqrt{-3}$ in unübersteigliche Rechnungen.

Zur Gewinnung der Resolvente 15. Grades habe ich demnach einen anderen Weg eingeschlagen und an die Tatsache angeknüpft, daß jede Oktaedergruppe G_{24} eine ausgezeichnete Tetraedergruppe G_{12} enthält. In der G_{360} finden sich demnach auch zwei Systeme von je 15 gleichberechtigten Tetraedergruppen G_{12}, und ihnen entsprechen zwei Systeme von je 15 gleichberechtigten Untergruppen Γ_{30} innerhalb der Gruppe Γ. Für die einzelne Γ_{30} kann man einen Diskontinuitätsbereich ohne Mühe durch Verdoppelung des schon gewonnenen Bereiches der zugehörigen Γ_{15} finden. Es stellt sich hierbei heraus, daß die einzelne Γ_{30} eine unsymmetrische Gruppe der Signatur (1, 3; 2, 2, 2) ist.

Obwohl hier das Geschlecht auf $p = 1$ gestiegen ist, können wir doch ein Funktionssystem der Γ_{30} leicht angeben. Man kann nämlich die Gruppen Γ_{30} auch sehr leicht von den zu den Ikosaeder-G_{60} gehörenden Gruppen Γ_6 gewinnen. Jede G_{60} enthält nämlich 5 gleichberechtigte Tetraeder-G_{24}, die 6 gleichberechtigten G_{60} deren also 30. Da aber die einzelne G_{12} eine unter 15 gleichberechtigten ist, so sind jene 30 G_{12} zu Paaren einander gleich, woraus sich ergibt, daß die einzelne G_{12} immer in zwei gleichberechtigten G_{60} enthalten ist, und zwar offenbar als ihr größter gemeinsamer Bestandteil. Zur Gewinnung der Γ_{30} aus den Γ_6 hat man hiernach so zu verfahren: Durch Kombination zu zweien stellt man aus den 6 gleichberechtigten Γ_6 des einzelnen Systems 15 Paare Γ_6, Γ_6' her; der größte gemeinsame Bestandteil der Gruppen Γ_6, Γ_6' des einzelnen Paares ist dann eine diesem Paare zugeordnete Γ_{30}, so daß jene 15 Paare Γ_6, Γ_6' die 15 gleichberechtigten Γ_{30} des einzelnen Systems ergeben. Die Γ_{30} ist in ihrer Γ_{15} ausgezeichnet enthalten. Merken wir also gleich noch an: Eine in der Γ_{15} enthaltene, aber der Γ_{30} fremde Substitution transformiert Γ_6 und Γ_6' in einander.

Zufolge dieser Darlegungen haben wir in den beiden Hauptfunktionen $\tau(\zeta)$, $\tau'(\zeta)$ von Γ_6 und Γ_6' unmittelbar ein Funktionssystem der Γ_{30}. Dabei muß zwischen τ und τ' eine algebraische Relation bestehen, in der τ und τ' auf den 5. Grad steigen. Diese Relation ist sofort angebbar. Da nämlich τ und τ' Wurzeln der Gleichung (1) sind, so setze man die Ausdrücke von $(J-1)$ in τ und in τ' einander gleich und findet:

$$\left(\tau - \frac{11+3i\sqrt{15}}{2}\right)^2 (\tau-1)^4 \tau' - \left(\tau' - \frac{11+3i\sqrt{15}}{2}\right)^2 (\tau'-1)^4 \tau = 0.$$

Befreit man diese Gleichung von ihrem nicht identisch verschwindenden Faktor $(\tau - \tau')$, so entspringt die fragliche Relation:

$$(2) \qquad (\tau+\tau')^4 \tau\tau' - 3(\tau+\tau')^2(\tau\tau')^2 + (\tau\tau')^3$$
$$-3(5+i\sqrt{15})\left((\tau+\tau')^3\tau\tau' - 2(\tau+\tau')(\tau\tau')^2\right)$$
$$+\tfrac{3}{2}(31+19i\sqrt{15})\left((\tau+\tau')^2\tau\tau' - (\tau\tau')^2\right) - 2^2.7(2+3i\sqrt{15})(\tau+\tau')\tau\tau'$$
$$+3.(8+37i\sqrt{15})\tau\tau' + \tfrac{1}{2}(7-33i\sqrt{15}) = 0.$$

Infolge der Symmetrie wird diese Relation durch den Austausch von τ und τ' in sich transformiert. Aber dieser Austausch wurde, wie oben bemerkt, durch eine der Γ_{30} fremde Substitution der Γ_{15} bewirkt. Man gewinnt demnach weiter in den beiden symmetrischen Funktionen:

$$t(\zeta) = \tau(\zeta)\tau'(\zeta), \quad u(\zeta) = \tau(\zeta) + \tau'(\zeta)$$

der τ, τ' ein Funktionssystem für die der Oktaeder-G_{24} entsprechende Gruppe Γ_{15} des Geschlechtes $p = 0$. Zufolge (2) sind t und u an einander gebunden durch die Relation:

$$(3) \quad tu^4 - t^2u^2 + t^3 - 3(5+i\sqrt{15})(tu^3 - 2t^2u) + \tfrac{3}{2}(31+i\sqrt{15})(tu^2 - t^2)$$
$$-2^2.7(2+3i\sqrt{15})tu + 3(8+37i\sqrt{15})t + \tfrac{1}{2}(7-33i\sqrt{15}) = 0.$$

Die Funktion $t(\zeta)$ ist im Polygon der Γ_{15} vierwertig. Dabei kann man aus dem bekannten Verhalten von $\tau(\zeta)$ und $\tau'(\zeta)$ feststellen, daß die vier Nullpunkte von t zusammenfallen, sowie daß die vier Pole zu Paaren koinzidieren. Somit ist auch noch:

$$(4) \qquad v(\zeta) = \sqrt{t(\zeta)} = \sqrt{\tau(\zeta).\tau'(\zeta)}$$

eine unverzweigte und also wegen des Geschlechtes 0 auch eindeutige Funktion der Γ_{15}, und zwar eine solche von der Wertigkeit 2. Setzen wir $t = v^2$ in die Relation (3) ein, so muß dieselbe reduzibel werden, indem die linke Seite in das Produkt zweier Faktoren zerfällt, die durch Zeichenwechsel von v in einander übergehen. Die Rechnung bestätigt dies in der Tat; dabei wählen wir das bei der Erklärung (4) von v noch unbestimmt gebliebene Vorzeichen, indem wir einen beliebigen jener beiden Faktoren der linken Seite von (3) als den verschwindenden wählen. So gelangen wir für die Γ_{15} zu einem System von Funktionen $u(\zeta)$, $v(\zeta)$ der Wertigkeiten 3 bezw. 2, welche

verbunden sind durch die Relation:

$$u^2 v + uv^2 - v^3 - \tfrac{1}{2}(15 + 3i\sqrt{15})\,uv - \tfrac{1}{2}(15 + 3i\sqrt{15})\,v^2 \tag{5}$$
$$+ (12 + 3i\sqrt{15})\,v + \tfrac{1}{2}(11 + 3i\sqrt{15}) = 0.$$

Eine Hauptfunktion $\sigma(\zeta)$ für die Γ_{15} kann man jetzt auf zwei Wegen finden. Erstlich muß sich der Diskontinuitätsbereich der Γ_{15} über der v-Ebene als zweiblättrige Fläche des Geschlechtes $p = 0$, und also mit zwei Verzweigungspunkten lagern lassen. Die Diskriminante der für u quadratischen Gleichung (5):

$$5v^4 + (15 + 3i\sqrt{15})\,v^3 - \tfrac{1}{2}(51 - 21i\sqrt{15})\,v^2 - (22 + 6i\sqrt{15})\,v$$

muß demnach einen Linearfaktor im Quadrat enthalten und zerlegt sich in der Tat wie folgt:

$$v(v+4)\left(v\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 3i\sqrt{3})\right).$$

Die beiden Verzweigungspunkte der zweiblättrigen Fläche über der v-Ebene liegen also bei $v = 0$ und $v = -4$, so daß eine Hauptfunktion der Γ_{15} bis auf das noch zu wählende Vorzeichen durch:

$$\sigma(\zeta) = \sqrt{\frac{v(\zeta) + 4}{v(\zeta)}} \tag{6}$$

gewonnen ist. Das Vorzeichen aber wollen wir dadurch bestimmen, daß wir unter den beiden Lösungen der Gleichung (5) nach u die folgende wählen:

$$u = -\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4}(15 + 3i\sqrt{15}) - \tfrac{1}{2}\left(v\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 3i\sqrt{3})\right)\sigma. \tag{7}$$

Bei der zweiten Art, die Hauptfunktion $\sigma(\zeta)$ zu bestimmen, deuten wir u und v als Koordinaten in der Ebene. Dann liefert (5) eine Kurve dritten Grades vom Geschlechte $p = 0$, auf dieser aber muß das Geradenbüschel durch den Doppelpunkt die Hauptfunktion ausschneiden. Indessen muß dieser Ansatz einfach zu der aus (7) entspringenden Darstellung von σ:

$$\sigma = -\frac{4u + 2v - 3(5 + i\sqrt{15})}{2\sqrt{5}\,v - \sqrt{5} + 3i\sqrt{3}} \tag{8}$$

führen; und in der Tat zeigt man leicht, daß die Koordinaten:

$$v_0 = \frac{7\sqrt{5} + 9i\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \quad v_0 = \frac{\sqrt{5} - 3i\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \tag{9}$$

für welche Zähler und Nenner der rechten Seite von (8) zugleich verschwinden, den Doppelpunkt liefern.

Durch Auflösung der Gleichung (6) nach v und Eintragung des entstehenden Ausdrucks von v in (7) ergeben sich die Gleichungen:

$$u = \tau + \tau'$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-3i\sqrt{3})\sigma^3 + 3(5+i\sqrt{15})\sigma^2 - 3(3\sqrt{5}-i\sqrt{3})\sigma - (23+3i\sqrt{15})}{2^2(\sigma^2-1)}$$

$$v = \sqrt{t} = \sqrt{\tau\tau'} = \frac{4}{\sigma^2-1}.$$

Benutzt man demnach $\sigma(\zeta)$, $\tau(\zeta)$ für die Γ_{30} als ein System von Funktionen der Wertigkeiten 2 bezw. 5, so sind dieselben durch folgende Relation an einander gebunden:

$$(10) \qquad 4\tau^2(\sigma^2-1)^2 - \tau(\sigma^2-1)((\sqrt{5}-3i\sqrt{3})\sigma^3 + 3(5+i\sqrt{15})\sigma^2 - 3(3\sqrt{5}-i\sqrt{3})\sigma - (23+3i\sqrt{15})) + 64 = 0.$$

Bildet man den Diskontinuitätsbereich der Γ_{30} mittelst der Funktion $\sigma(\zeta)$ ab, so entspringt eine zweiblättrige Fläche, welche wegen des Geschlechtes 1 der Γ_{30} vier Verzweigungspunkte haben muß. Die Diskriminante der für τ quadratischen Gleichung (10), welche vom 10. Grade in σ ist, muß demnach außer vier einfachen Linearfaktoren das Quadrat eines kubischen Ausdruck enthalten. In der Tat zeigt die Rechnung, daß jene Diskriminante sich aus dem Quadrat von:

$$\sigma^3 + i\sqrt{3}\,\sigma^2 - \sigma - i\sqrt{3}$$

und dem biquadratischen Faktor:

$$(\sigma-\sqrt{5})(\sigma-\tfrac{1}{8}(3\sqrt{5}+i\sqrt{3}))(\sigma^2+\tfrac{5}{8}(\sqrt{5}+3i\sqrt{3})\sigma+\tfrac{1}{8}(7+9i\sqrt{15}))$$

zusammensetzt. Die Funktion $\sigma(\zeta)$ und die Quadratwurzel aus diesem biquadratischen Ausdruck liefern das einfachste Funktionssystem der Γ_{30}.

Um nun die Resolvente 15. Grades zu gewinnen, gehe man auf die Einteilung des Diskontinuitätsbereiches der Γ_{15} in 15 Doppeldreiecke der Gesamtgruppe Γ zurück und bestimme die besonderen Werte von $\sigma(\zeta)$ in den Ecken dieser Einteilung. Hierher gehören bereits die Nullwerte $\sigma = \pm 1, -i\sqrt{3}, \sqrt{5}, \tfrac{1}{8}(3\sqrt{5}+i\sqrt{3}), \cdots$ der eben angegebenen Funktionen 3. und 4. Grades von σ, und aus den fertig gezeichneten Bereichen unserer Gruppen ist auch nicht schwer anzugeben, an welchen Stellen diese Werte zutreffen.

Im übrigen kennt man aus (1) die Wertverteilung von τ und τ'. Aus den Werten von τ und τ' in der einzelnen Ecke der fraglichen Dreiecksteilung ergeben sich aber sofort die Werte $u = \tau + \tau'$ und $v^2 = \tau\tau'$, sowie dann weiter mittelst der aus (5) folgenden Gleichung:

$$v = -\frac{2uv^2 - (15 + 3i\sqrt{15})\,v^2 + 11 + 3i\sqrt{15}}{2u^2 - 2v^2 - (15 + 3i\sqrt{15})\,u + 24 + 6i\sqrt{15}}$$

auch der Wert von v. Den gesuchten Wert σ liefert dann endlich die Gleichung (8).

Ohne auf die Einzelheiten der Rechnungen einzugehen, geben wir sofort die Gestalt der einen Resolvente 15. Grades der Transformationsgleichung an:

$$J : J - 1 : 1 = \left(\sigma + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\sigma^2 + \frac{5\sqrt{5} + 15i\sqrt{3}}{8}\sigma + \frac{7 + 9i\sqrt{15}}{8}\right)$$

$$\cdot\left\{\left(\sigma^2 - \frac{9 + 3i\sqrt{15}}{4}\right)\left(\sigma^4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\sigma^3 + \frac{1 + 15i\sqrt{15}}{20}\sigma^2 - \frac{3 - 3i\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}\sigma + \frac{9 + 3i\sqrt{15}}{20}\right)\right\}^2$$

$$:\left(\sigma - \frac{3\sqrt{5} + i\sqrt{3}}{8}\right)(\sigma - \sqrt{5})^2 \cdot \left\{(\sigma + i\sqrt{3})\left(\sigma^2 + \frac{\sqrt{5} - i\sqrt{3}}{4}\sigma - \frac{3 + i\sqrt{15}}{4}\right)\right\}^4$$

$$: \frac{3^4 i\sqrt{3}}{2^7 . 5^3 . \sqrt{5}}(\sqrt{5} + 3i\sqrt{3})^5 (\sigma^2 - 1)^5.$$

Die zweite Resolvente 15. Grades geht hieraus einfach dadurch hervor, daß man in den Koeffizienten überall das Vorzeichen von i wechselt.

Über der Transformationsgleichung und ihren angegebenen Resolventen 6. und 15. Grades steht, sie alle beherrschend, die zugehörige Galois'sche Resolvente vom 360. Grade. Diese kann unmittelbar aus den invariantentheoretischen Entwicklungen von Wiman über die G_{360} entnommen werden. Wie sich die Lösungen unserer Gleichungen 6., 10. und 15. Grades in dieser Galoisschen Resolvente gewinnen lassen, werde ich demnächst an anderer Stelle im Zusammenhange entwickeln.

Bad Harzburg, den 29. Dezember 1911.

Nachweis, daß in der sog. Tonhöhe zwei von einander unabhängige Eigenschaften zu unterscheiden sind.

Von

Privatdozent **Géza Révész**, Budapest.

Vorgelegt von G. E. Müller in der Sitzung am 13. Januar 1912.

Qualität und Höhe.

Die im Gebiete der Tonempfindungen bestehenden Verhältnisse sind nur dann zu begreifen, wenn wir jedem Tone außer der Intensität nicht, wie üblich, nur eine wesentliche musikalische Eigenschaft, die Tonhöhe, sondern deren zwei zuschreiben. Die eine Eigenschaft wollen wir musikalische Qualität des Tones, die andere Höhe des Tones nennen. Für uns sind also die Ausdrücke Qualität und Höhe keine Synonyma; auch bedeuten sie nicht genau dasselbe wie in der vorliegenden Literatur.

Schon die phänomenologische Betrachtung der Tonreihe lehrt, daß jedem Ton neben seiner Intensität zwei von einander unabhängige Merkmale zukommen.

Führen wir uns die Tonreihe auf- oder absteigend vor, so nehmen wir erstens die Erscheinung des Steigens oder des Sinkens wahr, eine Erscheinung, die offenbar als die Veränderung eines Merkmals in einer konstanten Richtung anzusehen ist. Diese Änderungsmöglichkeit hat die Aufmerksamkeit der bisherigen Beobachter am meisten auf sich gezogen, und sie ist die einzige, die bisher theoretisch eingehender gewürdigt worden ist. Darum finden wir die Tonreihe, abgesehen von der Intensität, fast in allen bisherigen Darstellungen als eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Empfindungen aufgefaßt. Zweitens macht sich bei der Vorführung der Tonreihe eine Periodizität der Empfindungen geltend, indem in den Oktaventönen (im Oktavenverhältnis stehenden Tönen)

ähnliche Empfindungen wiederkehren. Wir fassen diese bisher als nebensächlich angesehene, theoretisch nicht weiter verwertete und gelegentlich sogar in ihrer Existenz geleugnete Tatsache als mindestens ebenso wesentlich auf als die Erscheinung des Steigens und Sinkens; wir sehen darin eine periodische Wiederkehr des anderen unserer beiden Merkmale. Dieses Merkmal ist es, welches wir Qualität nennen, während das andere, welches in der Erscheinung des Steigens und Sinkens zum Ausdruck kommt, den Namen Höhe behalten soll.

Daß wir in der Periodizität der Tonreihe die periodische Wiederkehr eines besonderen Merkmals sehen, wird dadurch gerechtfertigt, daß die Periodizität in der Ähnlichkeit der Oktaventöne ihren Grund hat, die sich im vorliegenden Falle ungezwungen aus einem gemeinsamen Element verständlich machen läßt; daß aber diese Ähnlichkeit wirklich da ist und einem Paar von Oktaventönen unter allen Umständen ursprünglich zukommt, habe ich durch Versuche bewiesen, die zeigen, daß nicht gemeinsame Partialtöne, wie Helmholtz meinte, die Ähnlichkeit bedingen. Versuchspersonen, die in der Erkennung von Intervallen ungeübt waren, habe ich Reihen von obertonfreien Tönen, die bald in diesem, bald in jenem Verhältnis (Quinte, Terz etc.) und zwischendurch auch im Oktavenverhältnis standen, mit der Frage vorgeführt, ob sie aus ähnlichen Tönen bestünden, wobei die Antwort nur bei den Oktavenreihen, dort aber stets bejahend ausfiel. Dabei wurde sogar angegeben, daß die im Oktavenverhältnis stehenden ähnlichen Töne eigentlich identische Töne seien. Das ist nichts anderes als eine Bestätigung unserer theoretischen Auffassung, nach welcher in den Oktaventönen eines der beiden Merkmale, die Qualität, identisch ist. Daß Oktaventöne doch nicht schlechthin identisch sind, beruht nach unserer Auffassung darauf, daß sie sich durch das andere Merkmal, die Höhe, unterscheiden.

Zum Beweise, daß jedem Tone zwei selbständige, unabhängig von einander veränderliche musikalische Merkmale zukommen, daß diese unter besonderen Umständen auch in anderer als der gewöhnlich zu beobachtenden Verknüpfung vorkommen können, ja, daß das eine oder das andere sogar nahezu isoliert an einer Tonempfindung auftreten kann, will ich folgende Beobachtungen anführen.

Änderung der Qualität ohne Änderung der Höhe.

1. Nimmt man an, daß eine Änderung der Qualität eines Tones ohne merkliche Änderung seiner Höhe möglich sei, so lassen sich

die Aussagen verstehen, die man erhält, wenn man einer Versuchsperson zwei Töne von sehr wenig verschiedener Schwingungszahl vorführt. Macht man den Unterschied genügend klein, so gibt der Beobachter oft an die Töne als verschieden zu erkennen, ohne daß er doch sagen könnte, welcher Ton der höhere sei. Da also hier ein Unterschied erkannt wird, der Beobachter aber doch hinsichtlich der Beurteilung nach der Höhe hin unschlüssig bleibt, so müssen wir schließen, daß die beiden Töne inbezug auf ihre Höhe gleich oder nicht in unterscheidbarer Weise verschieden, inbezug auf ihre Qualität aber deutlich verschieden sind.

2. Sind pathologische Bedingungen vorhanden, so läßt sich eine Änderung der Qualität bei unveränderter Höhe beobachten, und es kann auch geschehen, daß zwei vorgeführte Töne zwar verschieden hinsichtlich der Qualität, aber gleich hinsichtlich der Höhe erscheinen. Es gelingt nämlich nachzuweisen, daß bei der Paracuse, wie sie das Gehör der Vp. Dr. v. Liebermann aufweist[1]), die Qualität der Töne verändert, die Höhe aber normal ist. Die Fälschung der Qualität wurde nachgewiesen durch Nachsingen, durch Beurteilung der Intervalle sukzessiver Töne und durch das sog. absolute Gehör (absolutes Tonbewußtsein in Beziehung auf die Qualität), die bei gefälschter Qualität normale Höhe durch absolute Höhenurteile (absolutes Tonbewußtsein in Beziehung auf die Höhe, vgl. S. 252), durch Urteile über Höhendistanzen und durch die unveränderte Erscheinung des Steigens und Sinkens. Durch diese Methoden konnte z. B. festgestellt werden, daß das dreigestrichene c die Qualität gis angenommen hatte, ohne seine normale Höhe verlassen zu haben. In diesem Ton war also die gis-Qualität mit einer Höhe verbunden, mit der sie normalerweise niemals in einer Tonempfindung vereint ist. Während wir also einerseits finden, daß eine falsche Qualität infolge pathologischer Einflüsse die Stelle einer normalen angenommen hat, können wir anderseits mit Hülfe desselben pathologischen Zustandes demonstrieren, daß zwei verschiedene Qualitäten mit derselben Höhe verbunden vorkommen können, indem wir das Verhalten des einen Ohres mit dem des anderen vergleichen. Da die Höhe der Töne für beide Ohren normal geblieben ist, die Fälschung der Qualität aber im allgemeinen für beide Ohren verschieden ist, so brauchen wir nur ein und denselben Ton beiden Ohren sukzessive vorzuführen, um zwei verschiedene Qualitäten in derselben Höhe zu erhalten.

---

1) Vergl. Zeitschrift f. Psychologie, Bd. 48, 1908, S. 259 ff.

Ein eigentümlicher Fall von veränderter Qualität bei normaler Höhe ließ sich ferner bei derselben Vp. in der tiefsten Lage auffinden, wo z. B. das Contra-c, ohne seine Höhe zu verändern, die normale Qualität c und die Qualität g in raschem Wechsel annahm.

Änderung der Höhe ohne Änderung der Qualität.

1. Eine Änderung der Höhe ohne Änderung der Qualität finden wir unter normalen Umständen bei sukzessiver Vorführung von Tönen, die im Oktavenverhältnis stehen. Das ist oben erläutert worden.

2. Das pathologische Tongebiet der Vp. L. ist so beschaffen, daß gewöhnlich eine große Reihe benachbarter Töne dieselbe Qualität hat. So kam es z. B. vor, daß alle Töne von g^2 bis dis^4 dieselbe Qualität gis hatten. Da dabei die Höhe der einzelnen Töne normal, also verschieden war, brauchte man nur diese Reihe von Tönen zu spielen, um eine Veränderung der Höhe bei gleichbleibender Qualität zu erhalten.

Gehörsempfindungen mit deutlich erkennbarer Höhe bei undeutlich erkennbarer Qualität.

1. Die Töne der untersten und obersten Teile der hörbaren Tonreihe, die zwischen der jeweiligen Hörgrenze und der musikalischen Tonregion liegen, sind der Qualität nach nicht zu bestimmen. Man kann ihnen z. B. keinen Ton als Oktave zuordnen, da sie überhaupt keine deutlichen Intervalle mit anderen Tönen, etwa solchen der mittleren Gegend bilden. Ihr Eindruck ist nicht der von der musikalischen Tonregion her bekannte. Daß aber trotz fehlender Qualität das Höhenmerkmal in ausgeprägtester Weise erhalten ist, wird niemand bestreiten, der einmal einen Subkontraton oder einen Ton der Galtonpfeife gehört hat. Auch läßt sich zeigen, daß diese Töne Unterschiede der Höhe aufweisen; geht man also z. B. die Subkontraoktave entlang, so bekommt man eine Änderung der Höhe ohne Änderung der Qualität.

2. Es existieren alle möglichen Übergänge zwischen Tönen und Geräuschen. Je näher nun eine Gehörempfindung einem Geräusch kommt, desto mehr büßt sie von ihrem qualitativen Merkmal ein, wobei aber das Höhenmerkmal ganz deutlich erhalten bleiben kann. Dies gilt von den Tönen der Pauke, der Trommel, von den Tönen von Holzstäben und Platten, vom Blasen des Windes. Die qualitätslose Höhe ist dabei so deutlich, daß Empfindungen dieser Art sogar Höhendistanzen miteinander bilden, die

durch eine Art von Illusion sogar als volle musikalische Intervalle erscheinen können.

Intervalle.

Welches Intervall zwei sukzessiv gegebene Töne bilden, hängt von den beiden von uns an ihnen unterschiedenen Merkmalen an.

Einfluß der Höhe. Sind die Qualitäten c und e gegeben, so ist damit das Intervall nicht bestimmt; es kann erstens eine Terz oder Sexte sein, zweitens jedes dieser Intervalle in enger oder erweiterter Form. Die Entscheidung wird durch die Höhen gegeben.

Sind zwei gleiche Qualitäten in beliebig verschiedenen Höhen gegeben, wie das pathologischer Weise in Tongebieten vorkommt, wo eine ganze Reihe benachbarter Töne dieselbe Qualität hat, so läßt sich doch das objektive Intervall zweier solcher qualitätsgleicher Töne einzig auf Grund ihres Höhenunterschiedes mit leidlicher Genauigkeit beurteilen.

Bei undeutlicher Qualität, wie eine solche geräuschartige Töne haben, kann doch der Eindruck eines Intervalles zwischen zwei Tönen entstehen.

Einfluß der Qualität. Erweiterte Intervalle sind den engen äußerst ähnlich und können sie sogar in der Melodie vertreten.

Die beiden Töne eines Intervalles haben in tiefer Lage bekanntlich viel kleinere Höhendistanz als in mittlerer. Wenn also das Intervall dort dasselbe ist, so kann das nur an den Qualitäten liegen. Unter pathologischen Verhältnissen erscheinen die Intervalle auch in einer eng begrenzten Lage mit allen Höhendistanzen. Zwei gis-Töne z. B. mit der Höhendistanz einer Septime bilden eine Oktave, machen den genauen Eindruck einer Oktave.

Ein Ton, dessen Höhe nachweisbar normal ist, kann doch mit einem anderen Ton ein Intervall bilden, das objektiv falsch beurteilt wird. Das kann nur daher kommen, daß seine Qualität gefälscht ist und diese falsche Qualität das Intervall bestimmt.

Hat eine Reihe benachbarter Töne bei normalem Höhenunterschied dieselbe Qualität und soll ein Intervall zwischen zwei Tönen einer solchen Reihe beurteilt werden, so ist das psychische Verhalten beim Urteilen gänzlich anders als unter normalen Verhältnissen.

Absolutes Gehör.

Es hat sich herausgestellt, daß man zwei Arten von absolutem Gehör unterscheiden muß. Das absolute Gehör kann sich auf das

eine oder das andere unserer beiden Toneigenschaften beziehen. Wir unterscheiden danach Tonqualitätenerkennung und Tonhöhenerkennung.

Wer Tonqualitäten erkennen kann, gibt seine Urteile genau, rasch, subjektiv sicher ab; die Namen der Töne kommen ihm unmittelbar, er erlebt dabei nichts Besonderes, verhält sich sozusagen psychisch passiv. Die Töne erscheinen ihm als Individualitäten. Seine Fähigkeit hat nicht eine eingehende Beschäftigung mit den Klängen der Musik zur Voraussetzung.

Wer Tonhöhen erkennen kann, bestimmt die Töne nur ungefähr nach längerer Überlegung, mit geringerer subjektiver Sicherheit; er verhält sich beim Urteilen eher aktiv, was sich im Suchen, Probieren, Kontrollieren äußert. Die Töne haben für ihn keinen individuellen Charakter; seine Fähigkeit ist erworben, durch Musikmachen und bewußtes Üben entwickelt.

Das qualitative absolute Gehör kommt nicht ohne die Fähigkeit der Tonhöhenerkennung vor; dagegen findet sich bei vielen Menschen die Tonhöhenerkennung allein.

Ich konnte bei einer Vp. die beiden Arten des absoluten Gehörs nebeneinander beobachten. Das qualitative fand sich nur in der mittleren Tonregion, während in der Tiefe und Höhe nur Tonhöhen erkannt wurden[1]). Aber auch in der Mitte gelang es, die beiden Arten des absoluten Gehörs zu isolieren, indem ich davon Gebrauch machte, daß gesungene Töne viel schwerer erkannt werden als z. B. Geigen- und Klaviertöne; denn so verhält es sich bekanntlich bei den meisten Menschen mit absolutem Gehör. Ich konnte nun bei diesem Beobachter nachweisen, daß er bei gesungenen Tönen nur die Höhe, nicht die Qualität erkennt.

In einem Gebiete konstanter Qualität konnte endlich dieser Beobachter die Töne nach Belieben der Höhe nach oder der Qualität nach bestimmen, was sich hier deswegen so scharf trennen ließ, weil die beiden Urteilsweisen in diesem abnormen Falle zu ganz verschiedenen Ergebnissen führen mußten.

---

1) Wie das möglich ist, wo doch in der Tiefe und Höhe die Qualitäten dieselben sind wie in der Mitte, kann an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Zur molekularen Theorie der Piëzoelektrizität des Turmalins.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1912.

1. Der molekularen Theorie der Piëzoelektrizität, welche ich im Jahre 1892 veröffentlicht habe[1]), liegen die folgenden Vorstellungen zugrunde. Die Mittelpunkte der Kristallmoleküle bilden Raumgitter, welche den Symmetriecharakter der verschiedenen Kristallsysteme besitzen. In dem allgemeinsten Falle des triklinen Systems liegen die Gitterpunkte in den Ecken kongruenter Parallelepipeda, welche als primitive Parallelepipeda bezeichnet werden. Beim monoklinen System ist das primitive Parallelepipedon eine gerade rhomboidische Säule, beim rhombischen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, beim quadratischen eine grade quadratische Säule, beim regulären ein Würfel. Beim hexagonalen System liegen die Gitterpunkte in den Ecken kongruenter gerader Prismen, deren Grundflächen gleichseitige Dreiecke sind. Jedes Molekül ist umgeben von einem System elektrischer Pole; seine Anordnung besitzt die Symmetrieverhältnisse der speziellen Gruppe, welcher der betreffende Kristall angehört. Das System ist mit dem Moleküle so verbunden, daß seine Symmetrieebenen und Achsen mit den entsprechenden Symmetrieelementen des Raumgitters zusammenfallen. Wie man sieht, ist die hierdurch gegebene Konstitution eines Kristalles im wesentlichen identisch mit dem, was Schönfließ als ein Molekelgitter bezeichnet.

Die mit den einzelnen Molekülen verbundenen Polsysteme müssen sich im natürlichen Zustande des Kristalls in stabilem

1) Abh. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1892, Bd. 38.

Gleichgewichte befinden. Dieses Gleichgewicht wird vielleicht nicht allein durch elektrische Wechselwirkungen bedingt sein, sondern noch von Kräften anderer Art, etwa elastischen Kräften aufrecht erhalten werden. Hat der Kristall wie der Turmalin eine ausgezeichnete polare Hauptachse, so kann angenommen werden, daß jedes Molekül in der Richtung der Hauptachse ein permanentes elektrisches Moment besitzt. Die Gesamtwirkung all solcher Momente ist äquivalent mit der Wirkung von elektrischen Oberflächenschichten, welche auf den Endflächen des Kristalls auftreten, und welche an der einen Endfläche positives, an der anderen negatives Vorzeichen haben. Die Wirkung dieser Schichten wird aber nach außen und innen vollkommen kompensiert durch Schichten von überall entgegengesetzter Dichte, welche der Oberfläche äußerlich aufgelagert sind. Sie bilden sich stets infolge der wenn auch geringen Leitfähigkeit der Oberfläche oder der den Kristall umgebenden Luft.

Die Moleküle des Kristalls betrachten wir als diëlektrisch erregbar. Nun werden schon im natürlichen Zustande des Kristalls elektrische Kräfte auf die einzelnen Moleküle ausgeübt werden. Die ihnen entsprechenden diëlektrischen Momente kommen aber nicht in Betracht, da ihre Wirkungen durch entgegengesetzte Oberflächenschichten ebenso kompensiert werden, wie die Wirkungen permanenter molekularer Momente. Wenn aber der Kristall durch Temperaturänderung oder durch Druck deformiert wird, so werden neue diëlektrische Momente erregt, und diese werden zu beobachtbaren Wirkungen Veranlassung geben.

2. Die Berechnung der durch einen äußeren Druck hervorgerufenen Momente habe ich zunächst in folgender Weise ausgeführt. Der Mittelpunkt eines Moleküls A wurde zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt. Sodann wurde das Potential und die elektrischen Kräfte, welche von irgend einem anderen Molekül B auf A ausgeübt werden, berechnet. Die elektrischen Kräfte selber kommen nach der vorhergehenden Bemerkung nicht in Betracht, sondern nur die Änderungen, welche sie bei der Deformation des Kristalls erfahren. Die Komponenten der gesamten elektrischen Kraft, welche so auf den Mittelpunkt des Moleküls A neu ausgeübt wird, habe ich bezeichnet mit Ξ, H, Z; ich habe sodann die Annahme gemacht, daß das diëlektrische Moment des Moleküls der Resultante aus den Kräften Ξ, H, Z proportional und ihr gleichgerichtet sei. Dabei ist der Faktor, mit dem die Kraft zu multiplizieren ist, um das Moment zu erhalten, unbestimmt gelassen.

Man kann den Ansatz so modifizieren, daß jener Faktor durch die diëlektrische Konstante des Kristalls ausgedrückt werden kann. Wir beschreiben zu diesem Zwecke um den Mittelpunkt des Moleküls *A* eine kleine Kugel. Die Richtung und die Größe der elektrischen Kraft sei in ihrem ganzen Innern dieselbe, und sie enthalte eine große Zahl einzelner Moleküle. Auf all diese wirkt dann dieselbe Kraft; in allen wird ein elektrisches Moment von derselben Größe erregt. Die Gesamtsumme der molekularen Momente stellt das elektrische Moment der kleinen Kugel dar. Für dieses aber werden die bekannten Gleichungen, welche in der Theorie der Diëlektrizität entwickelt werden, gelten. Berücksichtigt muß dabei werden, daß die diëlektrische Konstante des Kristalls für verschiedene Richtungen verschiedene Werte besitzt. Wir setzen voraus, daß die Richtungen der Koordinatenachsen mit den Hauptachsen des Kristalls zusammenfallen. Die diëlektrischen Konstanten nach diesen Richtungen seien K_1, K_2, K_3. Dann gelten für die entsprechenden Elektrisierungskonstanten die Formeln:

$$\varkappa_1 = \frac{K_1 - 1}{4\pi}, \qquad \varkappa_2 = \frac{K_2 - 1}{4\pi}, \qquad \varkappa_3 = \frac{K_3 - 1}{4\pi}.$$

Für die auf die Volumeneinheit bezogenen elektrischen Momente der kleinen Kugel nach den Richtungen der Koordinatenachsen ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\varkappa_1}{1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa_1}\,\Xi = \frac{3}{4\pi}\,\frac{K_1 - 1}{K_1 + 2}\,\Xi; \\ p_2 &= \frac{\varkappa_2}{1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa_2}\,H = \frac{3}{4\pi}\,\frac{K_2 - 1}{K_2 + 2}\,H; \\ p_3 &= \frac{\varkappa_3}{1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa_3}\,Z = \frac{3}{4\pi}\,\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\,Z. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Wir gehen nun über zu der Berechnung der Kräfte Ξ, H, Z. Das von einem Moleküle *B* mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 ausgeübte Potential sei P_1; dann sind die Komponenten der ihm entsprechenden Kraft gegeben durch:

$$X_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \qquad Y_1 = \frac{\partial P_1}{\partial y_1}, \qquad Z_1 = \frac{\partial P_1}{\partial z_1}. \tag{2}$$

Die Verschiebungen, welche das Molekül *B* infolge des ausgeübten Druckes erleidet, seien u_1, v_1, w_1. Dann sind die Änderungen der

Kraftkomponenten gegeben durch:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\delta X_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdot u_1 + \frac{\partial X_1}{\partial y_1}\cdot v_1 + \frac{\partial X_1}{\partial z_1}\cdot w_1;\\
\delta Y_1 &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}\cdot u_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}\cdot v_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}\cdot w_1;\\
\delta Z_1 &= \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}\cdot u_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial y_1}\cdot v_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\cdot w_1.
\end{aligned}
$$

Für die Verschiebungen u_1, v_1, w_1 machen wir die Ansätze:

$$
4)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1,\\
v_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1,\\
w_1 &= a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1,
\end{aligned}
$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Mit den gewöhnlichen Deformationsgrößen x_x u. s. w. stehen die Größen a in der Beziehung:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
a_{11} &= x_x, & a_{22} &= y_y, & a_{33} &= z_z;\\
2.a_{23} &= y_z, & 2.a_{31} &= z_x, & 2.a_{12} &= x_y.
\end{aligned}
$$

Wir setzen voraus, daß die Deformation des Kristalls eine homogene sei, d. h. daß die Gleichungen (4) für sämtliche Moleküle des Kristalles gelten. Dann ergeben sich für die gesamten Kräfte, welche durch Parallelverschiebung der Moleküle neu erzeugt werden, die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \Xi = {} & a_{11}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial x_1}x_1 + a_{22}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}y_1 + a_{33}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}z_1\\
& + a_{23}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 + \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right) + a_{31}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1\right)\\
& + a_{12}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial x_1}y_1 + \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}x_1\right).
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen für H und Z ergeben sich, wenn man in der Gleichung für Ξ an Stelle von X_1 die Komponenten Y_1 und Z_1 setzt.

Im allgemeinen werden die Verschiebungen der Moleküle verbunden sein mit Drehungen um ihre Mittelpunkte. Wir bezeichnen die Drehungen um drei zu den Koordinatenachsen parallele Achsen mit l, m, n. Diese Drehungen geben Veranlassung zu neuen Kräften, welche auf den Mittelpunkt des Moleküls A ausgeübt werden. Sie sind gegeben durch die Formeln:

$$(7)\quad \Xi' = l\,\Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1} z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1} y_1\right) + m\,\Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial z_1} x_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} z_1 + Z_1\right)$$
$$+ n\,\Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} y_1 - \frac{\partial X_1}{\partial y_1} x_1 - Y_1\right).$$

Die Formeln für H und Z ergeben sich wieder durch Substitution von Y_1 und Z_1 an Stelle von X_1.

Ferner ist in dem Ausdrucke für H' in der ersten Summe hinzuzufügen $-Z_1$, in der dritten X_1 an Stelle von $-Y_1$, Z_1 in der zweiten fällt weg. In dem Ausdrucke für Z' ist in der ersten Summe hinzuzufügen $+Y_1$, in der zweiten $-X_1$ an Stelle von Z_1, Y_1 in der dritten fällt weg.

Aus den Symmetrieverhältnissen des Turmalins folgt, daß

$$l = \lambda . y_z, \quad m = -\lambda . z_x, \quad n = 0 \quad \text{ist.}$$

4. Wir wollen die allgemeinen Formeln anwenden auf den speziellen Fall des Turmalins. Den Symmetrieverhältnissen des Kristalls entspricht man durch die folgende Anordnung elektrischer Pole. Wir machen den Mittelpunkt eines Moleküls zum Mittelpunkt eines Hülfskoordinatensystems ξ, η, ζ; die Achse ζ sei parallel mit der Hauptachse des Turmalins; die positive Achsenrichtung stimme überein mit der Richtung vom analogen zum antilogen Ende. Auf der Achse ζ nehmen wir in gleichen Abständen vom Mittelpunkte ein Polpaar von der Stärke ε, der positive Pol liege auf dem positiven Zweige der Achse.

In der Ebene $\xi\eta$ konstruieren wir ein reguläres Sechseck, dessen Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Mittelpunkte des Moleküls. Zwei seiner Ecken liegen auf der Achse η. Die Ecken dieses Sechseckes besetzen wir abwechselnd mit positiven und negativen Polen von der Stärke ε. Berechnet man nun die Molekularsummen unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse des Kristalls, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\Xi = \frac{3}{2}\Gamma . \Sigma\left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\,\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) z_x$$
$$+ E\,\Sigma\left\{6\,\frac{x_1^2}{r_1^7} - 28\,\frac{x_1^4}{r_1^9} + 63\,\frac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}\right\} x_y;$$

$$(8)\quad H = \frac{3}{2}\Gamma . \Sigma\left(\frac{y_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\,\frac{y_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) y_z$$
$$+ E\,\Sigma\left\{6\,\frac{x_1^2}{r_1^7} - 28\,\frac{x_1^4}{r_1^9} + 63\,\frac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}\right\} (x_x - y_y);$$

$$Z = 3\Gamma.\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1-5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)x_x + 3\Gamma.\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1-5\frac{z_1^2}{r_1^5}\right)y_y$$
$$+3\Gamma.\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(3-5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)z_z;$$

$$\Xi' = -\Gamma.\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)m;$$

$$H' = \quad \Gamma.\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{y_1^2}{r_1^2}\right)l; \quad Z' = 0.$$

In diesen Gleichungen ist Γ gleich dem elektrischen Momente des auf der Achse ζ liegenden Polsystems, und E ist gleich $6a_3^2\varepsilon\alpha^3$, wo α die Seite des Sechseckes und a_3^2 einen Zahlenfaktor bedeutet. Ferner ist zu bemerken, daß $l = \lambda y_z$, $m = -\lambda z_x$, $n = 0$ ist. Diejenigen Molekularsummen, welche sich nur dadurch unterscheiden, daß x_1 und y_1 mit einander vertauscht sind, haben gleiche Werte. Setzen wir die Werte von Ξ, H, Z, sowie von Ξ', H', Z' ein in den Gleichungen (1), so ergeben sich die Momente p_1, p_2, p_3 als Funktionen der Deformationsgrößen. Die Gleichungen, zu welchen man auf diesem Wege gelangt, stimmen vollkommen mit den Ansätzen überein, welche sich aus den allgemeinen Formeln der phänomenologischen Theorie von Voigt bei Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse für den Turmalin ergeben:

$$(9) \qquad p_1 = e_{15}z_x - e_{22}x_y, \qquad p_2 = -e_{22}(x_x - y_y) + e_{15}y_z,$$
$$p_3 = e_{31}(x_x + y_y) + e_{33}z_z.$$

Hier sind die piëzoelektrischen Konstanten e gegeben durch die folgenden Summen:

$$e_{15} = \quad \frac{9}{8\pi}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,\Gamma\Sigma\left(\frac{x_1^2+z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right)$$
$$+\frac{3\lambda}{4\pi}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,\Gamma\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right),$$

$$(10) \quad e_{22} = -\frac{3}{4\pi}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,E\Sigma\left\{6\frac{x_1^2}{r_1^7} - 28\frac{x_1^4}{r_1^9} + 63\frac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}\right\},$$

$$e_{31} = \quad \frac{9}{4\pi}\,\frac{K_3-1}{K_3+2}\,\Gamma\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1-5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right),$$

$$e_{33} = \quad \frac{9}{4\pi}\,\frac{K_3-1}{K_3+2}\,\Gamma\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(3-5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right).$$

In diesen Formeln ist den Symmetrieverhältnissen des Kristalls entsprechend, $K_1 = K_2$ gesetzt.

5. Um uns die Berechnung der Molekularsummen zu erleichtern, werden wir ein Verfahren benützen, das wenigstens näherungsweise den wirklichen Verhältnissen entsprechen dürfte. Wir vernachlässigen von vornherein die von den Polen des regulären Sechseckes herrührenden Wirkungen; wir berücksichtigen nur die der z-Achse parallelen molekularen Momente. Das dürfte besonders in dem Falle erlaubt sein, in dem die Beobachtung auf das in der Richtung der z-Achse induzierte Moment beschränkt wird, denn dieses ist unabhängig von der Konstanten e_{22}. Die auf die kleine Kugel, welche um den Mittelpunkt des Moleküls A beschrieben ist, ausgeübten Kräfte berechnen wir dann in der folgenden Weise. Wir ersetzen die wirkliche, den Symmetrieverhältnissen des Turmalins entsprechende Verteilung der Moleküle durch eine stetige Erfüllung des Raumes. Diese muß der Bedingung genügen, daß das permanente elektrische Moment der Volumeinheit γ denselben Wert behält. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Moleküle im ccm, so ist das elektrische Moment der Volumeinheit

$$\gamma = \mathfrak{N} . \Gamma \tag{11}$$

und das elektrische Moment eines Raumelementes $dx_1\, dy_1\, dz_1$ gleich

$$\gamma\, dx_1\, dy_1\, dz_1 .$$

Die in den Gleichungen (6) auftretenden Molekularsummen können nun ersetzt werden durch Integrale, welche sich über das ganze Innere des Turmalins mit Ausnahme der kleinen um A beschriebenen Kugel erstrecken. Zu diesem Zwecke setzen wir an Stelle der von einem einzelnen Moleküle B_1 auf A ausgeübten Kräfte X_1, Y_1, Z_1 die Komponenten

$$\mathfrak{X}_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ; \quad \mathfrak{Y}_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ; \quad \mathfrak{Z}_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ,$$

welche von einem an der Stelle von B_1 befindlichen Raumelemente auf den Mittelpunkt von A ausgeübt werden. Es wird dann:

$$\tag{12} \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial X_1}{\partial x_1} x_1 &= \int \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1} x_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ; \\ \Sigma \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} x_1 &= \int \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial x_1} x_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ; \\ \Sigma \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} x_1 &= \int \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial x_1} x_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 ; \end{aligned}$$

und analoge Formeln ergeben sich für die übrigen Molekularsummen.

Führen wir diese Werte ein in den Gleichungen (6), und berechnen wir dann mit Hülfe der Gleichungen (1) die Momente p_1, p_2, p_3, so ergeben sich die folgenden Werte für die allgemeinen piëzoelektrischen Konstanten.

$$
(13) \quad
\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{3}{4\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}x_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{12} &= \frac{3}{4\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}y_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{13} &= \frac{3}{4\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}z_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{14} &= \frac{3}{8\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}z_1+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}y_1\right)dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{15} &= \frac{3}{8\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}x_1+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}z_1\right)dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{16} &= \frac{3}{8\pi}\frac{K_1-1}{K_1+2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}x_1\right)dx_1\,dy_1\,dz_1;\\
e_{21} &= \frac{3}{4\pi}\frac{K_2-1}{K_2+2}\int\frac{\partial\mathfrak{Y}_1}{\partial x_1}x_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{24} &= \frac{3}{8\pi}\frac{K_2-1}{K_2+2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{Y}_1}{\partial y_1}z_1+\frac{\partial\mathfrak{Y}_1}{\partial z_1}y_1\right)dx_1\,dy_1\,dz_1;\ \ldots\\
e_{31} &= \frac{3}{4\pi}\frac{K_3-1}{K_3+2}\int\frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial x_1}x_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{34} &= \frac{3}{8\pi}\frac{K_3-1}{K_3+2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial y_1}z_1+\frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial z_1}y_1\right)dx_1\,dy_1\,dz_1;\ \ldots
\end{aligned}
$$

Um die Integrationen auszuführen, transformieren wir die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke in der folgenden Weise:

$$
\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}x_1 = \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 x_1)}{\partial x_1}-\mathfrak{X}_1, \qquad \frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}y_1 = \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 y_1)}{\partial y_1}-\mathfrak{X}_1,
$$
$$
\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}z_1 = \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 z_1)}{\partial z_1}-\mathfrak{X}_1.
$$

$$
(14) \quad
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}z_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 z_1)}{\partial y_1}, & \frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}y_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 y_1)}{\partial z_1},\\
\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial z_1}x_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 x_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}z_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 z_1)}{\partial x_1},\\
\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}y_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 y_1)}{\partial x_1}, & \frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial y_1}x_1 &= \frac{\partial(\mathfrak{X}_1 x_1)}{\partial y_1}.
\end{aligned}
$$

Analoge Gleichungen gelten für $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Z}_1$.

Bezeichnen wir das von einem Raumelement $dx_1\, dy_1\, dz_1$ auf den Mittelpunkt des Moleküls A ausgeübte Potential mit $\mathfrak{P}_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1$, so wird:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{Y}_1 = \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial y_1}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial z_1}.$$

Man sieht somit, daß alle unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke sich durch die Differentialquotienten gewisser Funktionen nach x_1, y_1, z_1 darstellen lassen. Daraus folgt weiter, daß alle über das Innere des Turmalins erstreckte Integrale sich verwandeln lassen in solche, welche über die Oberfläche des Turmalins auszudehnen sind. Die von dem Inneren ausgehenden Wirkungen verwandeln sich in Wirkungen der Oberfläche. Die in Betracht kommende Oberfläche besteht zunächst aus zwei Teilen, nämlich aus der Oberfläche der um A beschriebenen Kugel und aus der äußeren Oberfläche des Turmalins. Die letzteren Wirkungen kommen aber bei einer Kompression des Turmalins in der Richtung der z-Achse nicht in Betracht, sobald diese Endflächen mit Stanniolbelegen versehen werden, welche nach den Quadrantenpaaren eines Elektrometers abgeleitet sind. Denn dann wird jede Änderung, welche in der Größe der molekularen Ladung eintritt, sofort kompensiert durch eine entgegengesetzte Influenzladung in den Stanniolbelegen. Wir können also in diesem Falle von der Betrachtung der äußeren Oberfläche absehen, und die Integrale lediglich auf die Oberfläche der um A beschriebenen Kugel beziehen. Für $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$, sind die folgenden Ausdrücke einzuführen:

$$(15)\quad \mathfrak{P}_1 = -\gamma \frac{z_1}{r_1^3}; \quad \mathfrak{X}_1 = 3\gamma \frac{z_1 x_1}{r_1^5}; \quad \mathfrak{Y}_1 = 3\gamma \frac{z_1 y_1}{r_1^5}; \quad \mathfrak{Z}_1 = -\frac{\gamma}{r_1^3} + 3\gamma \frac{z_1^2}{r_1^5}.$$

Dann ergibt die Ausführung der Integration

$$(16)\quad e_{15} = e_{24} = -\frac{3}{5}\frac{K_1 - 1}{K_1 + 2}\gamma \text{ und } e_{31} = e_{32} = e_{33} = -\frac{3}{5}\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\gamma.$$

Hier ist den Symmetrieverhältnissen des Kristalls entsprechend, $K_1 = K_2$ gesetzt.

Es möge hierzu noch bemerkt werden, daß die Anwendung der Formeln (1) voraussetzt, daß die Werte der Komponenten Ξ, H, Z im ganzen Inneren der um A beschriebenen Kugel die gleichen sind. Diese Voraussetzung würde nicht erfüllt sein für die Wirkungen, welche die Oberflächenladung der um A beschrie-

benen Kugel auf die verschiedenen Punkte ihres Inneren ausübt. Wir begehen also einen gewissen Fehler, indem wir die von Ort zu Ort wechselnden Komponenten der Kraft überall durch die in A herrschenden Komponenten ersetzen. Die Anwendung der Gleichungen (1) läßt sich übrigens noch in anderer Weise rechtfertigen. Zunächst sei bemerkt, daß die Komponenten Ξ, H, Z, von dem Halbmesser der um A beschriebenen Kugel unabhängig sind. Das ergibt sich unmittelbar aus der Form der Oberflächenintegrale und aus den Werten von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$. Wir wollen nun annehmen, der Halbmesser der Kugel könne so klein gemacht werden, daß die Wirkung der Moleküle, welche innerhalb der Kugel sich befinden, vernachlässigt werden kann gegen die Wirkung der außerhalb befindlichen. Dann würden die Komponenten Ξ, H, Z der ganzen auf A ausgeübten elektrischen Kraft entsprechen. Es ist aber klar, daß die ganze Kraft für irgend einen Punkt B im Innern der Kugel dieselbe sein muß, wie für A. Anders liegen die Verhältnisse nur für Punkte, welche der Oberfläche des Turmalins so nahe liegen, daß die um sie beschriebene Kugel von der Oberfläche des Turmalins durchschnitten wird.

6. Bei der vorhergehenden Betrachtung sind die Kräfte nicht berücksichtigt, welche aus den Drehungen der Moleküle resultieren. Wir brauchen aber die im vorhergehenden angedeuteten Rechnungen für den Fall der Drehung nicht ausführlich zu wiederholen. Wir bemerken, daß die Drehung nur auf die Konstante e_{15} einen Einfluß ausübt. Sie fügt zu dem aus der Translation folgenden Werte noch das folgende Glied hinzu:

$$e'_{15} = \frac{3\lambda}{4\pi}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,\Gamma\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right).$$

Setzen wir hier an Stelle der Summation wieder eine Integration, so ergibt sich:

$$e'_{15} = \frac{3\lambda}{4\pi}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,\gamma\int\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)dx_1\,dy_1\,dz_1.$$

Setzen wier hier

$$x_1 = r_1\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 \quad \text{und} \quad dx_1\,dy_1\,dz_1 = r_1^2\,dr_1\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1,$$

so wird:

$$\int\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

$$=\int\frac{dr_1}{r_1}(1-3\sin^2\vartheta_1\cos^2\varphi_1)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1 = 0.$$

Der Einfluß der Drehung der Moleküle fällt also bei einer homogenen Deformation des Turmalins weg, wenigstens bei der von uns benützten Näherungsmethode.

7. Wir gehen nun über zu einer Vergleichung der durch unsere Integration erhaltenen Werte der piëzoelektrischen Konstanten mit den durch die Beobachtung gefundenen. Übereinstimmung ist insofern vorhanden, als die Integration auf dieselbe Reihe von Konstanten führt, wie die Beobachtung oder auch wie die molekulare Theorie mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse. Ein auffallendes Ergebnis unserer Rechnung ist, daß bei der Annahme einer stetigen Raumerfüllung die Konstanten e_{31} und e_{33} einander gleich werden, und in diesem Ergebnis spricht sich eben das Unzulängliche unserer Betrachtung aus. Nach den Symmetrieverhältnissen des Kristalls können nur die Konstanten e_{15} und e_{24}, sowie e_{31} und e_{32} einander gleich sein. Wir stellen die berechneten und die beobachteten Werte der Konstanten im folgenden zusammen:

$$-e_{15} = 7{,}40 . 10^4 = \frac{3}{5}\,\frac{K_1-1}{K_1+2}\,\gamma$$

$$-e_{24} = 7{,}40 . 10^4 = \frac{3}{5}\,\frac{K_1-1}{K_1-2}\,\gamma \qquad (\gamma =)$$

$$-e_{31} = 3{,}09 . 10^4 = \frac{3}{5}\,\frac{K_3-1}{K_3+2}\,\gamma \qquad 0{,}85 . 10^5$$

$$-e_{32} = 3{,}09 . 10^4 = \frac{3}{5}\,\frac{K_3-1}{K_3+2}\,\gamma \qquad 0{,}85 . 10^5$$

$$-e_{33} = 9{,}60 . 10^4 = \frac{3}{5}\,\frac{K_3-1}{K_3+2}\,\gamma\,(+\gamma) \qquad 0{,}70 . 10^5.$$

Nun ist für Turmalin:

$$K_1 = 6{,}77 \quad \text{und} \quad K_3 = 5{,}60.$$

Somit ist:

$$\frac{3}{5}\,\frac{K_1-1}{K_1+2} = 0{,}395,$$

und

$$\frac{3}{5}\,\frac{K_3-1}{K_3+2} = 0{,}363.$$

8. Bei der vorhergehenden Betrachtung ist der sehr wesentliche Umstand noch nicht berücksichtigt, daß das elektrische Moment der Volumeneinheit schon durch eine Volumkontraktion oder Dilatation verändert wird. Wir müssen die hierdurch hervorgerufenen Änderungen des molekularen Momentes den im

vorhergehenden betrachteten noch hinzufügen. Verstehen wir unter γ das elektrische Moment der Volumeneinheit im natürlichen, unter γ' das im deformierten Zustande, so ist:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{1 + x_x + y_y + z_z}.$$

Somit ist der Zuwachs, welchen das Moment der Volumeneinheit infolge der Dilatation erleidet:

$$\gamma' - \gamma = -(x_x + y_y + z_z)\gamma.$$

Diese Änderung kommt aber nach außen hin nicht voll zur Geltung. Der Anteil $\gamma(x_x + y_y)$ hängt ab von den seitlichen Kontraktionen oder Dilatationen. Diese treten aber ganz in derselben Weise bei den Oberflächenladungen auf, durch welche die Wirkungen der permanenten elektrischen Momente im Gleichgewichtszustande kompensiert werden. Es folgt daraus, daß die in Betracht kommende Änderung des elektrischen Momentes, welche in der Volumeneinheit durch die Dilatation erzeugt wird, vollständig gegeben ist durch:

$$(17) \qquad \gamma' - \gamma = -\gamma . z_z.$$

Dieser Ausdruck ist zu dem durch die elektrischen Kräfte bestimmten Werte von p_3 noch hinzuzufügen. Der vollständige Wert von p_3 ist also gegeben durch:

$$-p_3 = \frac{3}{5}\,\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\,\gamma(x_x + y_y) + \left(1 + \frac{3}{5}\,\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\right)\gamma . z_z.$$

Für $-e_{33}$ haben wir also in der vorhergehenden Tabelle den Wert

$$\left(1 + \frac{3}{5}\,\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\right)\gamma$$

zu setzen an Stelle von $\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}\gamma$. Die störende Gleichheit von e_{31} und e_{33} ist damit beseitigt. Mit Hülfe des am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Wertes von $\frac{3}{5}\,\frac{K_3 - 1}{K_3 + 2}$ sind die in der letzten Kolumne der Tabelle angegebenen Werte von γ berechnet. Im Mittel ergibt sich:

$$\gamma = 0{,}80 . 10^5.$$

Die Momente in der Richtung der x- und der y-Achse können nur verändert werden durch Drehungen der Moleküle um diese Achsen. Ihre Berücksichtigung würde einen neuen unbekannten Faktor in die Rechnung einführen. Die Drehungen beeinflussen

aber nur die Werte der Konstanten e_{15} und e_{24}. Wir machen uns also von ihnen unabhängig, wenn wir uns auf die Betrachtung des der z-Achse parallelen Momentes p_3 beschränken.

9. Wir gehen über zu der Berechnung des permanenten elektrischen Momentes der Moleküle des Turmalins. Das Molekulargewicht des Turmalines sei M, das spezifische Gewicht s; dann ist das Volumen eines g-Moleküls gleich M/s. Die Anzahl der wirklichen Moleküle, welche in einem g-Molekül enthalten sind, ist gegeben durch: $6{,}17.10^{23}$. Somit ergibt sich für die Zahl der Moleküle, welche in einem ccm des Turmalines enthalten sind, der Ausdruck:

$$\mathfrak{N} = \frac{s}{M} 6{,}17.10^{23}. \tag{18}$$

Die Dichte des Turmalins ist $s = 3{,}11$. Für die Zusammensetzung des magnesiumfreien Turmalins findet sich in der Mineralogie von Bauer die Formel:

$$Si_{12}\,B_6\,Al_8\,Na_4\,H_4\,O_{60}.$$

Aus einer von Riggs mitgeteilten Analyse des hellgrünen brasilianischen Turmalines habe ich die folgende Formel berechnet:

$$Si_{12}\,B_5\,Al_{12}\,Na\,Li_3\,H_6\,O_{56}.$$

Für das Molekulargewicht ergibt sich aus der ersten Formel die Zahl 1666, aus der zweiten die Zahl 1658. Wir wollen also im Mittel das Molekulargewicht gleich 1660 setzen. Substituieren wir die angegebenen Werte von s und M in Gleichung (18), so ergibt sich:

$$\mathfrak{N} = \frac{3{,}11.6{,}17}{1660} \cdot 10^{23} = 1{,}16.10^{21}.$$

Für die Kantenlänge d des Molekularwürfels folgt daraus der Wert

$$d = 0{,}95.10^{-7}\,\text{cm}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}$ den Durchmesser des gleichfalls würfelförmig gedachten Moleküls, so ist nach der Formel von Clausius-Mosotti

$$\frac{\mathfrak{d}^3}{d^3} = \frac{K-1}{K+2}.$$

Im Mittel können wir für Turmalin setzen:

$$\frac{K-1}{K+2} = 0{,}61.$$

Dann ergibt sich:

$$\mathfrak{d} = 0{,}80.10^{-7}\,\text{cm}.$$

Das elektrische Moment Γ eines einzelnen Moleküls erhalten wir, wenn wir das Moment der Volumeneinheit durch $\mathfrak{N}$ dividieren. Es wird somit:

$$\Gamma = \frac{0{,}80 \, . \, 10^{5}}{1{,}16 \, . \, 10^{21}} = 0{,}69 \, . \, 10^{-16}. \tag{19}$$

Die Distanz des auf der Hauptachse ζ eines Moleküls liegenden Polpaares kann jedenfalls nicht größer sein, als die Kante $\mathfrak{d}$ des von dem Moleküle eingenommenen Raums. Für die Poldistanz bezeichnet also die Länge $\mathfrak{d} = 0{,}80 \, . \, 10^{-7}$ cm eine obere Grenze. Verstehen wir unter $\mathfrak{e}$ die Stärke der Pole, so wird dann

$$\Gamma = \mathfrak{e}\mathfrak{d}$$

und wir erhalten aus dieser Gleichung für $\mathfrak{e}$ eine untere Grenze. Aus den angegebenen Zahlen ergibt sich:

$$\mathfrak{e} = \frac{0{,}69 \, . \, 10^{-16}}{0{,}80 \, . \, 10^{-7}} = 8{,}62 \, . \, 10^{-10}$$

Das würde nahezu dem doppelten des Elementarquantums entsprechen. Man wird indessen jene Zahl keineswegs als zuverlässig betrachten dürfen. Einmal hat unsere ganze Rechnung den Charakter eines Näherungsverfahrens, sodann ist auch der Wert des Molekulargewichtes M einigermaßen willkürlich. Würde z. B. das Molekulargewicht auf die Hälfte des angenommenen Wertes erniedrigt, so würde auch das Moment Γ und die Polstärke $\mathfrak{e}$ nur halb so groß werden. Immerhin wird man es als ein bemerkenswertes Ergebnis der Rechnung betrachten dürfen, daß die Stärke der auf der Hauptachse ζ des Moleküls liegenden Pole jedenfalls nur ein kleines Vielfaches des elektrischen Elementarquantums ist.

Die polare elektrische Ladung, welche wir den Molekülen des Turmalins zuschreiben, ist darnach von derselben Größenordnung, wie bei den Molekülen eines Elektrolyten.

10. Beim Turmalin wird die Entwicklung einer angenäherten Theorie wesentlich durch den schon hervorgehobenen Umstand erleichtert, daß die Wirkung der Deformation auf den Mittelpunkt einer kleinen im inneren des Turmalins abgegrenzten Kugel von dem Kugelhalbmesser unabhängig ist. Das ist bei Polsystemen von höherer Ordnung nicht mehr der Fall; bei diesen wird man auf die Auswertung der Molekularsummen selber zurückgehen müssen, man wird auch die induzierten elektrischen Momente unmittelbar auf die Moleküle zu beziehen haben.

Die seismischen Registrierungen am Samoa-Observatorium der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in den Jahren 1909 u. 1910.

Von

Dr. Kurt Wegener.

Vorgelegt von Herrn H. Wagner in der Sitzung vom 15. Juli 1911.

Mit einer Tafel.

Die Aufzeichnungen in Samoa wurden für die Jahre 1909 und 1910, wie bisher, monatsweise berechnet; die provisorischen Monats- oder Wochenberichte sind bereits von Göttingen aus vervielfältigt und weiter versandt worden. In diesen Tabellen sind indessen keine Angaben über den eventuellen Herd enthalten, weil irgend welche näheren Nachrichten über ihn nicht abgewartet wurden. Auch sind vereinzelt Zeit- und Rechenfehler vorhanden, da in Samoa bei pünktlicher Versendung der Berichte keine Möglichkeit einer Kontrolle durch die Nachrichten benachbarter Stationen besteht.

Nach diesen beiden Gesichtspunkten wurden daher die gesamten Zahlenangaben einer Durchsicht unterzogen, besonders auf Grund des Materials von Göttingen (Geophysikalisches Institut), oder, soweit hier noch Nachrichten fehlten, Hamburg (Staatslaboratorium) oder Jena, ferner Batavia, vereinzelt Manila, von November ab Tsingtau; sowie für 1910 Tiflis und Ottawa. Die nächstgelegene und daher für nahe Bebenherde wichtigste Station Sidney (Jesuiten-College River-view), die Anfang 1909 ein Wiechert'sches 1000 kg-Pendel aufgestellt hatte, kam erst spät dazu, seismische Nachrichten zu senden. Ihre Angaben konnten

aber für 1909 und die erste Hälfte 1910 zur Konstruktion einer Laufzeitkurve noch verwendet werden.

Aus der großen Zahl der registrierten Beben sind diejenigen herausgezogen worden, die als Weltbeben verwendbar schienen. Unter Benutzung des genannten fremden Materials wird dann in dem zweiten Teil dieser Arbeit der Versuch gemacht, die Laufzeitkurven von Wiechert und Zoeppritz zu erweitern.

Technisches. Das 1000 kg-Horizontalpendel von Wiechert machte, wie bisher, keine wesentlichen Schwierigkeiten. Seine hohe Empfindlichkeit hatte bei allen stärkeren nahen Beben zur Folge, daß es umfiel. Das geschah im Laufe des Jahres 1909 4 mal und 1910 2 mal so gründlich, daß ein völliger Neu-Aufbau notwendig wurde.

Bei starken Schwingungen des Erdbodens stößt der Anschlag oben an die Gewichtsmasse. Die Masse dreht sich infolgedessen um ihren ruhenden Schwerpunkt, und zieht den Fuß, der in Samoa nicht in den Zement verschraubt ist, zur Seite.

Vielleicht würde der in Samoa häufige Vorfall günstiger verlaufen, wenn der Schwerpunkt der Masse vom Anschlag getroffen würde; zu dem radikalen Mittel, den Fuß festzuschrauben, habe ich mich nicht entschließen können, da man hierbei das ganze Instrument abbrechen, neu zementieren und neu wieder aufbauen müßte; dann würden die Aufzeichnungen von etwa 14 Tagen fehlen und man liefe Gefahr, daß, wenn dann doch eine Verrückung des Instrumentes einträte, alles wieder erneuert werden müßte.

Bei dem Nahbeben am 10. IV. 09[1]) dauerte der Neu-Aufbau bis 15. IV. Am 16. IV. 09 trat ein neues starkes Nahbeben ein, der Neu-Aufbau dauerte bis 20. IV. Auch im September (13.) wurde ein Neu-Aufbau notwendig, der sich bis zum 21. hinzog, aber noch bis zum 26. blieb die Registrierung lückenhaft.

Kleinere allmähliche Versetzungen traten fast täglich auf; sie rühren wohl im Wesentlichen von Temperaturänderungen her; das doppelte Haus, das den alleinigen Wärmeschutz bildet, vermag natürlich nur rasche Temperaturschwankungen auszugleichen.

Von dem Wiechertschen 80 kg-Vertikalpendel können bei seiner Kleinheit nicht die gleichen Leistungen erwartet werden, wie vom Horizontalpendel. Es gelang ebensowenig, wie in den beiden vorhergehenden Jahren, den Dämpfer von Reibung zu befreien. Die Schuld hieran tragen vermutlich die Temperaturschwankungen, gegen die das Instrument in Samoa nicht ganz geschützt werden kann.

---

1) Stets Greenwicher Zeit, der Tag von Mitternacht bis Mitternacht gezählt.

Auch änderte sich die Eigenschwingung des Instrumentes, sobald der Dämpfer angeschlossen war, von 6 auf 3 Sekunden, vermutlich infolge Eigenschwingung des Dämpfers, oder indem dieser das Vergrößerungssystem in Eigenschwingung versetzte. Daher wurde der Dämpfer im März 1909 ganz abgenommen. Hierbei erhielt man wenigstens die Einsatzzeiten der Phasen, wenn auch eine Berechnung der Bodenbewegung nun nicht mehr möglich war. Später versuchte ich dann eine mäßige Dämpfung mit Hülfe der Reibung einzurichten, indem durch magnetische Astasierung die Schwingungsdauer des Pendels heraufgesetzt wurde. Die Kraft, die zur Verfügung steht zur Ueberwindung der Reibung, beruht auf der kinetischen Energie des Pendels und ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Schwingungsdauer T. An demselben Arm, an dem früher der Dämpfer angriff, wurde eine eiserne Nadel festgemacht, deren Spitze zwischen zwei Magnetpolen N und S horizontal pendeln konnte. Kam die Nadel nach N, so wurde ihre Spitze S magnetisiert. Sollte sie dann zurück, so wurde sie von N gebremst. Analog wirkte S. Im Maximum kam das Pendel bei diesem Verfahren bis auf $13^{\text{sek.}}$ Schwingungsdauer, wobei die Dämpfung 1 : 2 bis 1 : 3 war. Die größte Wellenlänge, die bei einem Beben aufgezeichnet wurde, betrug $23^{\text{sek.}}$.

Im Dezember kam dann ein neuer Dämpfer, der erheblich verbessert war. Am 22. Dezember 1909 wurde daher die magnetische Astasierung entfernt, und im Laufe der letzten Woche des Dezember die neue Dämpfereinrichtung, die auch rein mechanisch erheblich besser gearbeitet war, als der erste Versuchsdämpfer, in Tätigkeit gesetzt.

Aber auch mit ihr erreichten wir nur ca. $4^{\text{sek.}}$ Schwingungsperiode, und selbst eine stärkere Astasierung und eine Vermehrung des Gewichtes brachten nicht den gewünschten Erfolg. Letzterer Versuch hatte obendrein ein Nachlassen der Federn zur Folge. Zur Erläuterung muß hinzugefügt werden, daß das in Samoa aufgestellte Instrument das erste Versuchs-Instrument war, über das noch keine Erfahrungen vorlagen. Es ist bekannt, daß die verbesserten späteren Modelle des 80 kg-Vertikalpendels sich ausgezeichnet an den verschiedensten Observatorien bewährt haben.

Bemerkungen zu den Berechnungen. Den Bezeichnungen der Phasen etc. würde das Göttinger Schema zu Grunde gelegt. Nur bei der Bezeichnung d [definiert als „terrae motus domesticus = Ortsbeben (am Orte fühlbar)“] wurde hiervon abgewichen. Als „d = Ortsbeben“ wurden ausschließlich diejenigen Beben bezeichnet, deren Herd innerhalb 100 km vom schreibenden

19*

Instrument liegt. Die zahlreichen Beben, die zwar fühlbar waren, deren Herd aber mehr als 100 km entfernt lag, wurden nach ihren Entfernungen rangiert.

Als Ausschläge A sind die halben Amplituden der Wellen oder die Abweichung von der Ruhelage mitgeteilt in μ ($1\mu = 0.001$ mm).

Die absolute Zeit der Phasen kann höchstens innerhalb der zehntel Minuten genau sein. Die Zeit wird etwa 14tägig mit Meridian-Instrument und Sternzeitchronometer bestimmt. Für die Zwischenzeit waren wir 1909 auf ein Knoblich-Schiffschronometer angewiesen, das nach mittlerer Zeit ging. Zur Kontrolle war nur noch ein Bröcking-Sternzeitchronometer da. 1910 kam dann eine Pendeluhr (Strasser-Rohde), mit der eine größere Zeitgenauigkeit möglich sein wird.

Die relativen Zeiten der Vorläufer wird man in einer großen Reihe von Fällen auf 2—3 Sekunden genau ermitteln können. Die Zeiten sind deshalb oft in Sekunden angegeben. Das soll also nicht bedeuten, daß sie absolut innerhalb der Sekunde genau sind.

Vorbemerkung zu den registrierten Erdbeben.

Der Seismograph steht in Apia nur 1,2 km vom umbrandeten Riffrande entfernt. Daher werden die Pendelungen, die durch den Aufprall der Dünung hervorgerufen werden, sehr stark aufgezeichnet.

Trotzdem sollte man meinen, daß die Vorläufer ferner Beben erkennbar als Superpositionen auftreten müßten.

Ein kurzer Blick in die Liste der vergleichbaren Fernbeben im zweiten Teil dieser Arbeit genügt, um festzustellen, daß das nicht der Fall ist in Samoa.

Bei einer großen Zahl ferner Beben lassen sich Einzelheiten, besonders Vorläufer, nicht zuverlässig erkennen.

Es mag dahin gestellt bleiben, ob vielleicht der Korallensand, auf dem das Haus steht, die Wellen allgemein schlecht fortpflanzt, und nur deswegen überhaupt die der Küste so nahe Aufstellung möglich ist, jedenfalls muß man mit der Tatsache rechnen, daß dasselbe Instrument, das in Göttingen Beben vom Grade I aus weiten Entfernungen mit voller Schärfe aufzeichnet, in Samoa analoge Beben auch aus günstigeren Entfernungen nur verschwommen als lange Wellen mitteilt.

Würde man das Instrument inland auf Fels bauen (wobei aber eine Personal-Vermehrung zum Betriebe notwendig wäre), so würde

Zahl und Entfernungen der Nahbeben.

1909.

	< 100 km	100—300	300—600	600—1000	1000—2000
Januar	—	2	1	—	—
Februar	—	1	—	—	—
März	2	2	2	—	1
April	7	3	1	—	—
Mai	1	5	—	—	1
Juni	2	3	—	1	—
Juli	3	5	1	—	—
August	1	2	1	1	—
September	2	3	—	—	—
Oktober	1	2	—	—	1
November	1	4	1	3	1
Dezember	2	4	1	1	—
Jahr	22	36	6	6	4

1910.

	> 100 km	100—300	300—600	600—1000	1000—2000
Januar	—	5	3	2	—
Februar	1	1	4	—	—
März	1	10	3	—	1
April	—	2	2	2	—
Mai	1	3	—	4	1
Juni	—	1	1	—	—
Juli	1	1	—	—	1
August	1	1	—	—	4
September	—	—	3	—	—
Oktober	1	—	1	2	1
November	—	—	4	—	1
Dezember	—	—	—	1	1
Jahr	6	24	21	11	10

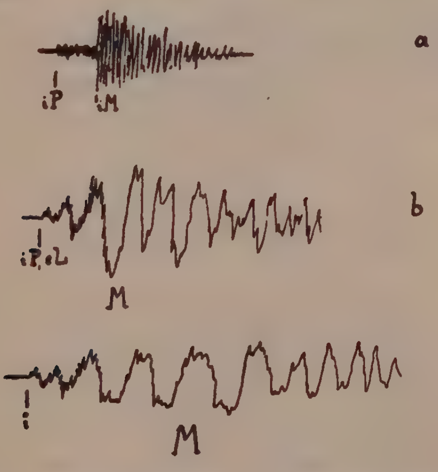
vielleicht ein anderer Mangel Samoas in seismischer Hinsicht, nämlich die zahlreichen, meist uninteressanten nahen Beben, mehr hervortreten.

Diese Nahbeben, die allgemein wohl ein geringeres Interesse besitzen, als die auch an anderen Stationen aufgezeichneten, sind in vorstehenden Tafeln kurz tabuliert.

Die Entfernung der Bebenherde wurde bestimmt nach der in den ersten 5000 Kilometern recht genauen Laufzeitkurve in L. Geiger, seismische Registrierungen in Göttingen 1907, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physikal. Klasse 1909. Die Kurve in dieser Abhandlung ist ohne Aenderung übernommen von E. Wiechert und K. Zoeppritz, über Erdbebenwellen, 1906.

Die Laufzeitkurve der Maximal-Bewegung scheint von Fall zu Fall etwas verschieden zu sein, verschieden vielleicht je nach der Beschaffenheit des Weges, den die Wellen der Maximal-Bewegung durchlaufen haben. Im Allgemeinen fallen bis zu Entfernungen von 500 km S und M noch zusammen. In einzelnen Fällen konnte aber bereits bei 400 km eine deutliche Zeitdifferenz, der Laufzeitkurve entsprechend, festgestellt werden.

Den kleinen Tafeln mögen noch die 3 Haupttypen der nahen Beben folgen.



C scheint den Haupttyp der Ortsbeben auszumachen, wobei anscheinend ein langsamer Decken-Einsturz eines der zahllosen Lavakanäle, oder ein allmählicher Abrutsch des Steilplateaus in die See den Anlaß bildet. Die heftigen kurzperiodischen Vibra-

tionen (0,1—1^sek.) versetzen die ganze Insel in Pendelungen. Diese erreichen ungefähr ein Maximum, wenn die Vibrationen entschwinden, um nun langsam abzuklingen.

Typus *a* repräsentiert ein nahes Stoßbeben: *S* und *M* fallen zusammen. Bei Typus *b* wurde geglaubt, daß die Kurve kein der Wirklichkeit entsprechendes Bild gebe; sie ähnelt stark den seismischen Aufschreibungen ungedämpfter Instrumente. Eine nachträgliche Prüfung der Dämpfung ergab zwar, daß diese genügend war, aber es blieb denkbar, daß durch Temperatureinflüsse periodisch eine Aenderung der Dämpfung eingetreten sein konnte.

Indessen gelangten schließlich in Zeitzwischenräumen von wenigen Stunden, ohne daß das seismische Haus inzwischen geöffnet worden war, 2 Beben, das eine von dem Typus *a*, das andere von dem Typus *b*, zur Aufzeichnung; es wurde daher doch die Möglichkeit in Frage gezogen, daß auch das Bild von *b* der Wirklichkeit entspricht. Vielleicht wird diese Form, ähnlich wie *C*, durch langsame Abrutsche hervorgerufen, wobei die primären, kurzperiodischen Wellen mitunter so klein bleiben, daß sie an benachbarten Stationen nicht mehr zur Aufzeichnung gelangen. Durch die Dauer derkleinen Stöße aber, so könnte man sich den Vorgang vorstellen, werden schließlich so energische langperiodische Schwingungen am Bebenherd erzeugt, daß diese sich bis an die benachbarten Stationen fortpflanzen.

Es sei hier nur noch auf die Schwierigkeit hingewiesen, derartige Beben aus größerer Entfernung zu analysieren, falls sie als reell zu betrachten sind. Vielleicht ist das Fehlen scharfer Einsätze bei vielen fernen Beben auf diesen Typus zurückzuführen.

Das allmähliche Anwachsen der großen Schwingungen beim Typus *b* findet sich auch bei den Beben, die stark fühlbar sind; nur sind hier — eine Bedingung für die Fühlbarkeit — stets kurze Perioden über die nach dem Schema *b* anschwellenden Wellenzüge superponiert.

Aus der Richtung, nach der die Ablenkung der Nadeln zuerst erfolgt, läßt sich grundsätzlich auch die Richtung der ersten Bewegung des Erdbodens bestimmen. Die bisherigen Beobachtungen machen es wahrscheinlich, daß der Erdboden zunächst vom Bebenherd entfernt wird, wenn man von einer geringen entgegengesetzten, meist sehr schwachen Bewegung absieht. Unter dieser Annahme stellte sich in fast allen Fällen, in denen die erste Ablenkung der Nadeln sicher bestimmt werden konnte, bei nahen Beben heraus, daß der Herd im Süden gelegen war. Dieser Umstand weist auf

Tonga, bezw. den tiefen Tongagraben, der zwischen Tonga und Samoa nach NW abbiegt, als hauptsächlichsten Bebenherd in der Nachbarschaft Samoas hin.

Das würde den bisherigen geophysikalischen Vorstellungen nicht widersprechen.

In Tonga sind Steinbauten nicht möglich, während in Samoa nur bei den Vulkanausbrüchen in Savaii (Matavanu 1905) einige der zahlreichen Steinhäuser, und auch dies nur in der Nähe des Kraters, beschädigt wurden; auch ist Tonga der Schauplatz unaufhörlicher, teils langsamer, teils plötzlicher Hebungen und Senkungen.

Im Allgemeinen ist Tonga in vergangenen Epochen gesunken, und nur ein ausgedehntes Korallenplateau zeugt noch von der vergangenen Inselwelt; die Südküste ist aber, vermutlich neuerdings, um ca. 30 m über das Meeresniveau gehoben worden; wenige Seemeilen südlich dieser Küste fand im Jahre 1908 ein submariner Ausbruch statt, der außer einer Flutwelle heftige Beben in Tongatabu zur Folge hatte. Außer starken Dampfsäulen erschienen an der Meeresoberfläche Felder von Bimstein.

Im Westen Tonga's war vor einer Reihe von Jahren eine Vulkaninsel entstanden, die vor 2 Jahren langsam wieder unter der Meeresoberfläche verschwunden ist. Eine Vulkaninsel mit See im NW der Tonga-Gruppe war vor etwa einem Jahr tätig, wobei der See in die Höhe gesprengt wurde.

Hiermit in Uebereinstimmung zeigt die weiter oben mitgeteilte Tafel der Entfernungen der Beben, daß eine unverhältnismäßig große Anzahl der Bebenherde in den gleichen Entfernungen wie Tonga liegt: zwischen 200 km (Niue Tabutabu) und 1000 km (Tongatabu).

Im Vergleich zu dieser Veränderlichkeit kann Samoa wohl als relativ ruhig bezeichnet werden, wie bereits Dana dies nach einigen Beobachtungen an Korallenbauten annimmt. Keines der Ortsbeben hat die Aufstellung der Instrumente wesentlich gestört, auch waren wenige fühlbar. Fast alle fühlbaren Beben im Jahre 1909 und 1910 kamen vielmehr aus $\geqq 200$ km Entfernung, obgleich in 80 km Distanz in dem benachbarten Savaii ein Lavasee unausgesetzt und unter gelegentlichen Explosionsvorgängen an der Küste tätig blieb.

Ch. Darvin sagt unter seinen Beweisen, „daß viele mit Korallenriffen (Strandriffen) umsäumte Küsten neuerdings gehoben worden sind“ (Ueber den Bau und die Verbreitung der Korallenriffe von Ch. Darvin, deutsch von N. Carus, Stuttgart, Schweizerbartsche Verlagsbuchhandlung 1876) über Samoa folgendes:

„Im Archipel der Schiffer- oder Samoa-Inseln fand Couthouy (Remarks on Coral Formations, p. 50) auf Manua viele große Fragmente von Korallen in der Höhe von 80 Fuß an einem steilen Bergabhang, welcher eine halbe Meile landeinwärts sich von einer sandigen, an marinen Ueberresten außerordentlich reichen Ebene erhob“.

Manua ist die östlichste Gruppe der Samoa-Inseln, sie erhebt sich steil aus der See und hat nur außerordentlich wenig Korallenriffbildung; auch die folgende, westlicher gelegene Tutuila-Insel hat sehr wenig Riff, trotz schöner Buchten. Die nächste Insel, Upolu, hat am Ostrande (Aleipata) ein ausgedehntes Strandriff, dann folgt eine Strecke, die so gut wie frei von Riffbildung ist (Steilküste) und von der Mitte der Insel an folgen weitere Strandriffe, die meist bei Niedrigwasser trocken liegen und schwach im Steigen begriffen sind. Der Nordwesten hat ein Barrierenriff. Das im NW gelegene Savaii hat auf seiner Ostseite ein schönes Barrierenriff, ein schwaches ebensolches bei Asau im NW, sonst meist Steilküste und zwischendurch Strandriff.

Aus der Höhe, auf der sich Korallenfragmente vorfinden, kann nicht ohne weiteres auf eine entsprechende Hebung geschlossen werden. Auf Apolima (zwischen Upolu und Savaii) liegen in 50 m Höhe Korallentrümmer, die dort bei schwerem Sturm von den Seen hinaufgeschleudert sind. In Savaii fand ich auf der nördlichen Steilküste in 10 m Entfernung vom Rande des Plateaus in einer Höhe von ca. 10—20 m Steinblöcke von $\frac{1}{8} m^3$, die rund geschliffen waren und offenbar aus der Brandung stammten.

Bei Korallenfunden im Innern muß ferner in Samoa berücksichtigt werden, daß in kriegerischen Zeiten die Eingeborenen inland wohnen, und daß ihre Häuser mit Korallenplatten umfriedigt sind.

In Bezug auf die Steilküste und das Fehlen des Riffs vor demselben möchte ich noch auf einen Punkt hinweisen, den ich weder in Darvins, noch Danas Darstellungen fand.

In Savaii lag an der Stelle, wo heute der frische, noch schwach weiterfließende Lavastrom des Matavanu (1905) eine Steilküste gebildet hat, früher eine Lagune (Strandriff). Die Lagune ist durch den Lavastrom ausgefüllt worden, der hierbei die Küste und das Riff entlang floß. Ein ähnlicher Vorgang dürfte bei vielen Lavaströmen eintreten, wenn diese eine Küste mit Strand- oder Barrierenriff erreichen. Das Vorhandensein einer Lavasteilküste kann also in manchen Fällen Unklarheit darüber entstehen lassen, ob dort ursprünglich Barrieren oder Strandriff oder Steilküste vorhanden war.

Auf seiner Karte (l. c.) hatte Darvin Samoa rot gezeichnet;

das bedeutete, daß er eine Senkung hier für unwahrscheinlich hielt und seiner Theorie entsprechend vulkanische Tätigkeit erwartete.

Wenn auch die Beobachtung Couthouy's nicht als beweiskräftig hierfür angesehen werden kann, wird man doch aus Rücksicht auf die allgemeine Riffbildung in Samoa Darvins Urteil zustimmen müssen.

Der Ausbruch des Aopo-Vulkans 1902 und des Matavanu 1905 haben einen eindrucksvollen Beleg für seine Theorie geliefert.

Wenn Samoa trotz seines tätigen Lavasees seismisch verhältnismäßig ruhig bleibt, während Tonga, obgleich kein dauernd tätiger Vulkan in seiner Nähe ist, von schweren Explosionen und Erderschütterungen heimgesucht wird, so kann man in diesen Umständen vielleicht auch eine weitere Bestätigung der Annahme erblicken, daß die Tätigkeit der Krater und Lavaseen seismisch nur von sekundärer Bedeutung ist und daß sie durch Erdverschiebungen erst hervorgerufen wird.

Die Konstantenbestimmung am Horizontalpendel.

An der Mehrzahl seismischer Stationen ist es üblich und hinreichend, alle 2—3 Monate eine neue Konstantenbestimmung vorzunehmen. Stellen sich dann Abweichungen gegen früher heraus, so wird eine lineare Aenderung mit der Zeit angenommen.

Da in Samoa alle 3—4 Tage wegen Temperaturempfindlichkeit und infolge der Störungen, die bei den kurzperiodischen (0.1—1$^{\text{sek.}}$) Wellen der Nahbeben eintreten, mit kleinen Gewichten reguliert werden muß, schien der allgemeine Brauch nicht ohne weiteres anwendbar. Nehmen wir z. B. an, daß zwei Konstantenbestimmungen an zwei aufeinander folgenden Monaten zwei extreme Zahlenreihen ergeben, während in der Zwischenzeit letztere infolge der erwähnten Umstände, aber unbeachtet, unaufhörlich um die gleichen Beträge hin und her geschwankt haben, so wäre es ohne Zweifel nicht richtig, die beobachteten Konstantenbestimmungen zu verwenden und für die Zeit dazwischen zu interpolieren; man würde vielmehr eine bessere Annäherung an die wirklichen Verhältnisse erzielen, wenn man aus den beiden Konstantenbestimmungen ein Mittel bildete und mit diesem die ganze Zeit einschließlich der Konstantenbestimmungen berechnete.

Konstantenbestimmungen, die täglich 9 Tage lang ausgeführt wurden, ergaben, daß die in 3 Monaten beobachtete Veränderlichkeit nicht wesentlich größer war als die tägliche. Die folgende kleine Tabelle zeigt die Beobachtungen, die abgerundet berechnet sind.

Linker Arm (EW. Komponente). 1909.

𝔗[1]	16. II.	20. II.	21. II.	22. II.	23. II.	24. II.	25. II.	26. II.	27. II.
1	6.5	6.6	6.9	6.9	6.9	7.1	7.9	7.5	7.1
5	5.5	5.7	5.9	6.4	6.4	6.6	7.1	6.7	6.5
10	4.8	4.3	5.2	5.2	6.6	7.1	6.6	5.7	6.0
30	44	46	48	48	52	53	52	49	47
70	260	275	270	260	300	300	290	290	270

Rechter Arm (NS-Komponente).

1	6.9	5.8	5.4	4.4	5.8	5.4	5.3	5.8	5.2
5	6.6	5.2	4.9	4.0	5.4	5.0	4.7	5.4	4.9
10	7.3	4.3	4.3	3.9	4.2	5.2	4.1	4.8	4.7
30	47	37	32	33	36	43	35	32	31
70	260	220	290	190	215	245	200	220	175

Linker Arm.

T	11.0	10.8	10.9	11.4	10.6	10.8	11.4	11.2	11.2
a	17	16	16	17	16	16	15	15	16
$\frac{a''-r}{a'+r}$	4	3	4	6	6	7	5	4	5

Rechter Arm.

T	11.3	11.4	11.8	10.6	11.6	10.4	11.4	12.2	12.0
a	17	20	23	23	20	18	22	23	25
$\frac{a''-r}{a'+r}$	8	4	4	5	3.5	6	4	5	6

Die Buchstabenbezeichnungen entsprechen wiederum den in Göttingen üblichen. Tabuliert ist die Zahl, mit welcher der in mm gemessene Ausschlag der Nadel multipliziert werden muß, um die Bodenbewegung in Tausendstel mm ($= \mu$) zu erhalten. Die Veränderlichkeit ist an sich nicht groß; im Verhältnis aber bedeutend, wenn man der berechneten Bodenbewegung eine übertriebene Genauigkeit beigelegt hätte.

Als Ergänzung zu dieser Tabelle wurde im Juli 1909 täglich

1) 𝔗 = Schwingungsdauer (von der Kurve abgelesen) einer Welle der Erdbodenbewegung; vgl. auch Geiger, seismische Registrierungen in Göttingen 1907, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, math.-physik. Kl. 1909.

die Schwingungsdauer an beiden Pendeln beobachtet. Die Liste schien nicht interessant genug, um sie in extenso zu geben, so seien nur folgende Angaben aus ihr gemacht.

Die maximale Aenderung der Schwingungsdauer im Monat betrug:

	EW	*NS*	*Z*	
Δ max	2.0	4.0	4.0	Sekunden,

die größte Veränderlichkeit in 24 Stunden war:

	EW	*NS*	*Z*	
Δ max	1.2	2.2	2.8	Sekunden.

Da alle diese Veränderungen nicht durch Neu-Aufbau oder gewaltsame Eingriffe zustande kamen, sondern nur durch das Auflegen kleiner Gewichte, das durch Temperaturschwankuug und geringe Verrückung infolge Nahbeben notwendig gemacht wird, und eine regelmäßige, fast tägliche Arbeit am Observatorium bildet, so ist wohl der Schluß erlaubt, daß die für die Auswertung eines Bebens anzuwendende Konstantentabelle eigentlich niemals genau bekannt ist. Man wird sich anscheinend der Wirklichkeit am meisten nähern, wenn man die Konstantenbestimmungen stark ausgleicht und so mit mittleren Werten rechnet, wobei die in den Konstantenbestimmungen beobachteten Unterschiede ein Urteil über den wahrscheinlichen Fehler des Resultates ermöglichen.

Am Observatorium wurden 1909 und 1910 jeden Sonnabend T, a und $\frac{a''-r}{a'+r}$ beobachtet, aber im Falle eines Bebens nur dann verwendet, und unter starkem Ausgleich, wenn die Abweichungen von dem angenommenen mittleren Werte groß waren.

Man könnte die Frage aufwerfen, wie weit die Veränderlichkeit der Konstanten sich auch bei anderen Stationen bemerkbar macht. Wahrscheinlich wird dies auf großen Observatorien, wie in Göttingen z. B., wo der Seismograph tief in die Erde eingegraben ist, wegen geringerer Temperaturschwankungen nur wenig der Fall sein; auch werden Stationen, die nicht in der Nähe größerer Bebenherde gelegen sind, bevorzugt sein. An kleineren Observatorien hingegen dürfen die in Samoa beobachteten Aenderungen ebenso häufig, und teilweise ebenso stark auftreten. Jedenfalls wird es von Wichtigkeit sein, bei ihnen die Frage der Konstanten-Genauigkeit zu prüfen.

Vielleicht hat es noch Interesse, die Aenderungen zu kennen, die in der Zahlenreihe der Konstanten eintreten, sobald sich T, a

oder $\frac{a'' - r}{a' + r}$ um eine Einheit ändern. Die folgende kleine Tabelle zeigt das Ergebnis.

T	11.2		12.2		11.2		11.2
a	19		19		21		19
$\frac{a'' - r}{a' + r}$	5		5		5		7

Sek.	Konst.	Δ	Konst.	Δ	Konst.	Δ	
1	5.9	+ 1.2	7.1	— 0.6	5.3	0	5.9
5	5.4	+ 1.2	6.6	— 0.5	4.9	+ 0.2	5.6
10	5.0	+ 0.9	5.9	— 0.5	4.5	+ 0.7	5.7
30	39	0	39	— 4	35	+ 1	40
70	227	+ 1	228	— 23	204	+ 1	228

Es erhellt hieraus, daß man $\frac{a'' - r}{a' + r}$ als konstant betrachten darf.

Nachstehend folgt nun, ohne Kommentar, die Liste der nahen Beben, sowie derjenigen, die an anderen Stationen nicht aufgezeichnet wurden, für 1909 und 1910, worauf sich eine Besprechung und Liste der vergleichbaren Erdbeben anschließt.

Die Entfernungen der Bebenherde wurden nach der früher genannten Laufzeitkurve bestimmt.

Datum und Zeit: Greenwich. 0[h] = Mitternacht.

atum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
909			h m s					
n. 3.	Ir	L	22 7—18					
		M	9—11	12.6	18	25	—	
4.	Ir	P	17 1.3	9	3	3	—	Langsames Anschwellen.
		S,M	5.6—6.5	8	45	45	—	(3200 km).
		f	33.0					
11.	Iv	L	13 49—54	5	3	3	—	
20.	Iv	P	21 54 40	{ 0.2	4	4	—	
				{ 6	3	3	—	(350 km).
		S,M	55 20	6	15	15	—	
		f	57.0					
21.	Iv	L	2 10—22	15	3	4	—	
[1]) 24.	Iv	P₁	5 25 16	4	3	4	—	
		iS,M	25 40	ca. 0.1	35	35	—	(250 km).
		f	27.0					
30.	Iv	P	7 56 46	{ 5	2	4	—	
				{ 0.1	1	1	—	
		S,M	57 1	0.1	20	20	—	(200 km)
		f	58.0					
or. 10.	Iv	P	1 38 38	{ 0.1	1	1	—	
				{ 8	4	4	—	(200 km).
		S,M	38 58	0.1	30	40	—	
		f	1 41					
22.	IIIv							Bei den folgenden Beben sind die absoluten Zeiten unsicher.
		P	10 23.8 48	0.1				Die Feder der NS-Komponente wird herabgestoßen und schreibt mit starker Reibung weiter. EW Komponente geht zwischen den Anschlägen hin und her.
			26.5	5	240	—	—	
			27.5	12	1500(?)	—	—	Zweites Beben?; wieder an den Anschlag; kurzperiodische Wellen.
		M?	28.3					
		c	43.0	8	35			
		f	52.0					Herd vermutlich im S, Beben wurde nicht gefühlt.

1) Von den großen Mittelmeerbeben im Januar, auch dem verheerenden in Luristan, Persien, am
ist nichts aufgezeichnet.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
br. 26.	Ir	L	3 9 bis 30					
		M_1	3 10.0	14.8	20	30	—	
		M_2	13.0	9	20	20	—	
		M_3	13.5	7	10	20	—	
		M_4	16.0	9	15	10	—	
ärz 6.	Iv	L	6 45.5 bis 50.0					
		M	47.3	6.7	5	6	—	
„ 7.	Iv	P	11 13.7	0.1				gering
		iM	13.9	ca.0.5	30	30	—	(150 km).
		f	15					
„ 8.	Iv	P	10 1.9	1	4	4	—	
				11	4	5	—	
		M	3.2	10	15	15	—	500 km
		f	16.0					
	IIv	P	10 29.9	8	3	4	—	P-S = 1400 km
		S	32.2					
		M	32.9	20	180	40	—	
		f	56.0					
„ 10.	Iv	L	23 29.0 bis 39.0					
		M	30.9	7.8	10	10	—	
„ 11.	Iv	P	19 13.8	1				
		eL	14.2					P-M = 500 km
		M	15.0	11	20	20	—	
		f	18					
„ 17.	Iv	P	1 49.0	0.1	1	1	—	
				10	3	3	—	
		iM	49.4	ca.0.5	100	50	—	(250 km).
		f	1 57					
„ 19.	Id	P,M	ca.5 47	0.1	10	10	—	< 100 km
„ 29.	Id	P,M	16 36.8	0.1	8	8	—	< 100 km
		f	39.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
pril 3.	Id	P,M	ca. 1	0.1			—	gering. (< 100 km).
" 3.	Id	M	12 38.9	1.0	20	30	—	(< 100 km).
		f	45.0					
" 6.	Iv	P	14 40.5	0.1				gering.
		e	42.0	8.0	10	10	—	
		M	44.2	6.0	15	15	—	P-M = 1400 km
		f	52.0					
" 6.	Iv	L	{23 29 bis 23 33					
		M	23 30.5	10	7	14	—	
" 10.	Id	M	2 45 48	0.1	4	4	2	(< 100 km).
"[1]) 10.	IIIv	P	5 27 52					s. Tabelle der verglichenen Beben. (ca 400 km); Teil II.
" 11.	Iv	Pi	13 49 29	0.1	3	—	—	
		S,Mi	52	{0.1	15	—	—	(150 km).
				8	12	—	—	
	Id	P,M	13 51 45	{0.1	12	—	—	
				8	10	—	—	(< 100 km).
		f	56.0					
" 12.	Id	Mi	4 0.0	4	—	10	—	(< 100 km).
		M	1.3	4	—	10	—	
		f	6.0					
"[3]) 16.	II—IIIv	P[2])	18 17 2	1	—	—	500	Horizontalpendel wird umgeworfen, Z schreibt mit Reibung weiter.
		f(?)	20.0					Beben war stark fühlbar, aber schwächer wie das vom 10. April; welches das stärkste bisher gefühlte nach den Angaben des Gouvernements war. (< 300 km).
" 20.	Id							häufige Vibrationen. (< 100 km).

1) In den folgenden 5 Tagen wird am Neu-Aufbau des Instruments gearbeitet.
2) Maximum für Z.
3) In den folgenden 6 Tagen wird am Neu-Aufbau des Instrumentes gearbeitet.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
ril[1]) 27.	Id	P,M	0 51.1	6	—	—	5	(< 100 km).
„ 27.	Ir	P	12 54 18					s. Tabelle der verglichenen Erdbeben.
„ 28.	Id	P,M	0 3.1	3	—	—	60	Die absoluten Zeiten sind unsicher. Beim Horizontalpendel fallen die Nadeln ab.
		P,M	4.0	1	—	—	45	
		P,M	8.5	3	—	—	30	
		f	14					
„ 30.	Iv	Pe	20 27.6	0.1				
		S,M	27.9	0.1	50	50	40	(150 km).
		f	32.0					
i 2.	IIv	P	7 2.0					S. Tabelle der verglichenen Erdbeben.
2.	Id	M	18 16.7	7	15	20	—	(< 100 km).
		f	55					
3.	Iv	L	21 57.0 bis 22 4.0					
		M	21 57.5	6	4	4	—	
5.	Iv	P	15 53 12	12	20	20	18	
				0.2	10	10	—	P-M = 150 km
		M	53 48	12	75	75	43	
	Iv	P	59 23	1.0	1	1	1	
		M	59 55	12	70	70	40	P-M = 150 km
		f	16 1					
8.	Iv	P	2 40 57					
		M	41 27	12	24	20	10	P-M = 150 km
		f	46.0					
9.	IIv	L	2 58 24	3.5	—	5	—	
				20	—	30	—	
		M	3 48 28	23	—	40		
		f	55.0					

1) Das große spanische Beben vom 23. April ist nicht aufgezeichnet.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 11.	IIv	P	13 3 17	2	—	—	—	(750 km).
				11	—	—	—	
		S	5 10	11				
				2	15	—	10	P-S = 1100 km
		M	5 26	11	160	160	—	P-M = 800 km
		c	32.9	11	15	15	—	
		f	37.0					
„ 13.	Iu	L	24 00					
		M	24 0.9	7	30	30		
		f	, 9.0					
„ 19.	Iv	Pi	7 12 27	0.1	10	4	—	(200 km).
				7.5	6	1	—	
		S,M	57 04	—	—	—		Federn werden abgeworfen. Uhr bei Z. hat gestanden.
„ 20.	Iv	Pi	2 56 43	0.1	1	1		(200 km).
				7.5	5	5		
		M	12 47	6	30?			Federn werden abgeworfen.
		f	14.5					
„ 26.	Ir	L	2 18.9					S. Tabelle der verglichenen Fernbeben.
„ 30.	IIr	P	21 0.9					S. Tabelle der verglichenen Fernbeben.
Juni 3.	IIr	P	18 24.4					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 6.	IIu	P	6 1.8					Eigenschwingung der Insel unregelmäßig.
			3.9					desgl.
		S,PS?	10.1 bis 10.7	10.0	3	3	—	
		eL	16.8					P-M = 6500 km
		u	19.8	11.4	12	14	—	
		f	7 1.0					
„ 6.	Iv	Pi	7 41.8	0.1	5	5	5	
				8	2	2	2	(350 km).
		iS,M	42.5	0.2	30	30	24	
				8	10	10	8	
		f	46.0					

...tum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_{EW} μ	A_{NS} μ	A_Z μ	Bemerkungen
...i 7.	Iv	Pi	h m s 16 37.6					P-eL = 800 km
		eL	39.3					
		M	39.5	9.5	6	5	—	
		f	56.0					
8.	IIr	P	6 10 7					S. Tabelle der verglichenen Beben.
10.	I	i	20 2 bis 21 2					Eigenschwingung der Insel unregelmäßig.
	d		bis 1h a des 11. Juni					Vibration (Ortsbeben, < 100 km).
17.	Iv	P	0 6 22	0.2	1	1	1	
		S,M	6 47	0.2 3.1	30 6	30 6	25 8	(200 km).
		f	9.0					
18.	Iv	P	5 43 45	0.2 7.9	5 1	5 1	10 —	
		S,M	44 05	0.2 8	30 24	30 24	20 24	(200 km).
		f	48.0					Bis 12h Pulsationen.
18.	Iv	Pi	22 50 42	0.1 9	1 2	1 2	— —	Sehr starke Eigenschwingung der Insel.
		S,M	51 2	0.1 9	10 5	10 5	— —	(200 km).
		f	53.2					
24.	Id	eL,M	6 16.7	0.1 9	— —	5 5	— —	(< 100 km).
		f	18.7					
24.	Ir	L	23 32—33	8 3	2 1	2 1		
27.	IIu	Pi	7 19 38					S. Liste der verglichenen Fernbeben.
3.	Id	P,M	23 59 14	0.1 3	14 6	14 7		Z-Pendel zeigt nichts (< 100 km)
		L	59 44	0.1 3 8	1 2 5	1 2 5		
		f	24 0.3					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Juli 4.	Id	P,S,M	4 48 16	0.1	3	3	—	
				3	3	3	—	(< 100 km).
				8	2	2	—	
		f	49.3					
„ 6.	I	L	3 6 bis 3 30					
		M	3 15	2	2	2	—	
				4	1	1	—	
„ 7.	Ir	L	21 56					S. Tabelle der verglichen Fernbeben.
„ 10.	IIv	P	4 47 28	0.2	—	1	—	
				7	1	2	—	(250 km).
		S,M	4 48 8	0.2	35	40	50	
				10.6	25	30	30	
		f	4 53½					
„ 10.	Ir	L	13 35 bis 13 40					unregelmäßig.
		L	13 45 bis 13 54					
		M	47.0	6	6	12	—	
		L	13 58 bis 14 5					
		M	59.2	6	6	18	—	
„ 10.	Iv	P	19 44 15	0.2	1	10	—	
			54	0.2	7	14	—	(250 km).
		f	46.3					
„ 17.	Id		19h—25h	0.2	1—2	1—2		Häufig über die Eigenschwi gung der Insel superponiert.
„ 18.	Iv	P	6 48 16	0.1	1	1	—	
		S,M	48 36	0.1	3	3	—	(150 km).
				3	6	7	4	
		f	51.3					
„ 20.	I v	P	19 0 47	0.1	7	7	—	
				7	3	10	—	(250 km).
		S,M	1 22	0.1	40	40	—	
		M,L	1 47	10	15	15	—	
		f	3.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
li 23.	Id	P,S,M	13 51.1	0.1	20	20	15	< 100 km
		f	52.0					
24.	I	L	4 39 bis 42					
		M		6	8	10	—	
24.	Iv	L	8 55 bis 58					
		M	55$\frac{3}{4}$	8	0	6	—	
24.	Iv	P	17 24.9	{ 0.1 11	1 0	1 5	— —	(150 km).
		S,M	25.2	{ 0.1 11	14 5	14 6	— —	
		f	28.0					
25.	Iv	Pi	12 31.8	{ 0.2 8	1 6	1 7	— 2	(400 km).
		iL	32.0	8	15	15	17	
		Mz	32.1	8	—	—	51	
		M(N,E)	32.7	8	70	80	34	
		f	40.0					
30.	IIIr	P	11 16 35					S. Tabelle der verglichenen Beben.
g. 7.	IIv	P	16 49.0					S. Tabelle der verglichenen Beben.
8.	Iv	L	5 55 bis 57					
		M	5 56.5	7	2	4		
10.	Iv	P	6 22.5					(400 km).
		S,M	23.5	11	25	26		
		f	6 38					
10.	IIr	P	6$\frac{3}{4}$					S. Tabelle der verglichenen Beben.
13.	I	L	{ 19 22 33 12					Unregelmäßige Bewegungen bei NS, Beben?

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 14.	Iv	P	13 13.8	0.1	1	1		(300 km).
		S, M	14.5	0.1	2	2		
		f	17.0					
„ 16.	Iv	L	7 44 bis 58					
		M		15	7	7		
„ 18.	IIr	P	0³/₄					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 20.	Id	P, S, M	14 30.2	{ 6	5	5		(< 100 km).
				{ 0.1	1	1		
		f	31.2					
„ 24.	Iv	P	5 49.7					
		S, eL, M	50.2	9	20	21		Nur lange Wellen (250 km).
		f	55					
„ 28.	Iv	P	10 47.9	10.5	—	3		
			48.9	10.5	—	15		
		S?	49.2	9	15	60		P-S = 800 km.
		M	50.4	9	35	80		
		f	11 9.0					P-M = 900 km.
Sept. 6.	Ir	L	14³/₄					S. Liste der verglichenen Beben.
„ 8.	Ir	P?	17 3.0					S. Liste der verglichenen Beben.
„ 15.	Iv	P	10 49.7	ca. 1.0	5	5	4	
		iS, M	51.3	3	30	20	20	(300 km),
		f	59.0					
„ 15.	I	eL	14 56.2					
		M	57.3	{ 3	—	—	0	
				{ 7	0	14	0	
		f	15 5					
„ 16.	Id	P, S, M	9 45.3	{ 0.1	7	7		(< 100 km).
				{ 3	3	3		
		f	46.8					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sept. 16.	Iv	P	15 48.2	0.1	3	3		(300 km).
		S, M	48.8	0.1 7	60 40			Fällt um.
		f	15 ca. 54					
„ 18.	Iv	P	10 30.4					Periode 0.1 sek. nicht vorhanden.
		S, M	30.7	9	10	24		250 km
		f	34					
„ 25.	Id	P,S,M	16 39 52	0.2 3	7 5	8 6		(< 100 km).
		f	40.4					
Okt. 2.	IIr	P	13 14.0	ca. 1.0 bis 3.0				(1500 km).
		PR	15.4	6.0	4	10		
		PR$_2$	16.3	6	14	14		
		S	17.3	6	8	20		P-S = 2000 km
		M	17.5	7	20	20	20	
		M$_2$	18.4	6	24	30	17	P-M = 1300 km
		fz	23.0					
		f(E,N)	28.0					
„ 6.	IIv	P	15 29.7	7 0.1	10 20	12 30	60 —	(200 km).
		S,M	30.0				600	Federn ab.
			33.3	—	—	600	30	
		f(Z)	36.0					
		f(E,N)	52					
„ 7.	I	L	14 45.5 bis 53.4					
		M	48.4	6	8	50	3	
„ 12	Id	P,S,M	15 20.4	0.1 4	3 7	3 7	1 3	(< 100 km).
		f	21.0					
„ 13	I(r)	L	12¾					S. Liste der verglichenen Beben.
„ 13	I(r)	L	13 41.7 bis 46.1					
		M	42.8	6 9	3 1	7 1		

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 23.	Iv	P	16 49.7	2—3	1	1	1	
		S,eL	50.2	{ 0.1	3	3	—	
				6	6	7	2	P-M = 200 km
		M	50.4	5	12	12	8	
		Cu	53.5	5	12	12	3	
		f(Z)	56.0					
		f(E,N)	17 2					
„ 27.	Ir	L	{1 39 bis 54					
		M	{1 43.2	8	12			
			46.2			12		
„ 27.	Iv	P	20 43.3	{ 0.1				Merklich bei allen Komponenten.
				5	1	1	—	
		S,M	43.6	{ 0.1	3	8	1	
				7	6	4	3	
		f	20 46					
Nov. 9.	Iv	Pi	13 2.2	{ 3.6*	1	3	4	* Eigenschwingung der Insel?
				0.1	1	1	—	
		S,M	2.5	{ 3.6	2	3	—	(200 km).
			5	0.1	36	24	30	
		f						
„ 12.	Iv	P	13 22.2	0.1	1	1	4	Z am Anschlag.
		S,M	22.7	{ 0.1	3	1	90	(300 km).
				5	2	2	—	
		f	25					
„ 12.	Iv	P	20 44.5	0.1	1	1	0	
		S,M	45.0	{ 0.1	7	7	20	(300 km).
				5	30	35	?	
		f						

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 13.	IIv	Pe	18 47.5					Langsames Anschwellen.
				8	—	—	3	
			48.0	2	< 1	< 1	3	
				5	1	1	—	
				8	—	—	20	
			48.6	2	1	3	3	
				5	15	15	0	
			49.1	7	60	50	50	P-S = 2000 km.
			49.9	7	75	75	60	
		S	50.8	6	60	65	15	P-M = 1500 km.
				6	25	25	120	
		Mz_1 sekundär	51.5	9	15	15	—	
				5	—	—	200	
		M Horiz	52.1	8	125	150	100	
		Mz	52.5	6	10	10	300	
				9	35	35	—	Zunächst rasches, dann gleichmäßiges langsames Abklingen der Bewegung.
		f	19 32					
„ 14.	Iv	Pe	12 54.8	—	—	—	—	
		M	13 0	7.5	5	5	—	P-M = 1900 km.
				1.0	1	1	—	
		f	13 4					
„ 14.	Id	P, M	17 4.3	7	15	15	45	(< 100 km).
				0.1	70	70	100	
		f	17 18					
„ 17.	Iv	Pe	8 43.1	—	—	—		
		M	45.6	3	3	3	—	(1000 km).
				1	a	1	—	
		f	49					
„ 20.	Iv	Pe	14 41.6	0.1	1	1		
		M	46.1	6	2	2	—	P-M = 1650 km.
				0.1	1	1	—	
		f	52					
„ 27.	Iv	Pe	22 9.5	—	—	—	—	
		S	10·7	14	20	50	0	
				6	10	10	0	P-S = 700 km.
		M	11.5	10	150	120	5	
			12.2	12	14	35	15	P-M = 700—1000 km.
		f	27.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 28.	IIr	Pe	0 22.5					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 28.	Iv	P?	8 21.0					Merklich. P.-S = 900 km.
		S?	22.5	5.0	7	2	—	
		M	23.5	10	20	40	14	P-M = 900 km. Langsames Abklingen unter viel Schwebungen.
		f	9 21					
„ 28.	Iv	P	12 53.5	{ 0.1 5	1 3	1 2	3 5	(200 km).
		S, M	53.9	{ 8 0.1	80 —	? —	5 1	
		f	58					
„ 30. bis Dez. 1.		M		7.0	20	20	15	Außergewöhnlich starke mikroseismische Bewegungen.
Nov. 30.	Iv	Pi	21 16.0	{ 0.5 6	3 15	3 15	3 15	(350 km).
		S, M	16.6	0.5	90	90	—	
		f	21					
Dez. 3.	I	L	3 20					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 5.	I	P	10 9.8	{ 0.1 4	6 1	— 1		(200 km).
		S, M	10.0					
		f	14					
„ 7.	Id	P, M	15 50.8	0.1		300	900	Am Anschlag. (< 100 km).
		f	52					
„ 9.	Ir							Absolute Zeiten nicht bekannt, s. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 9.	Id	P, M	16 59.0	0.1	30	30	—	(< 100 km).
		f	17 0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_{EW}	A_{NS}	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Dez. 9.	IIr	P	21 11.5					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 9.	Ir	Pe	23½					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 11.	IIv	Pi	23 24.5	{ 0.1 5	1 1	— —	— 3	(200 km).
		S, M	24.8	{ 0.1 6	20 35	60? 100?	15 15	
		f	26					
„ 12.	Iv	L	{10 21 bis 10 33					
		M	10 22	8	8	10	—	
„ 12.	I	Pi	11 40.5	{ 3 1	— 6	10 —	— —	
		Mi	41.7	{ 5 6	10 5	25 —	— —	(800 km).
		f	47					
„ 21.	Iv	Pe	16 42.4					
		Me	42.6	10	35	10	—	(200 km).
		f	45					
„ 22.	Id	P	0 16.6					Nadeln fallen ab.
			21.0					Nadeln sind wieder aufgelegt, Beben ist aber zu Ende.
„ 22.	Iv	Pe	4 47.5	—	—	—		(300 km).
		M_1	58.2	10	20	45		Langsames Anschwellen zum Max. in ruhigen großen Wellen.
		M_2	58.8	10	30	30		
		f	5 1.0					
„ 22.	IIr	Pi	12 53.0					S. Tabelle der verglichenen Beben.
„ 26.	Id	P	18 55.6	{ 0.1 8.5	6 —	3 5		Typus c.
		M	55.8	{ 1.0 8	— —	1 10		
		f	19 1					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
1909			h m s					
Dez. 31	Iv	P	7 39 32	ca. 1 13	1 2	1 4	5 —	(500 km)
		iM	40 21	ca. 1 13	5 20	5 30	50 —	
		f	45 30					
1910								
Jan. 1	IIr	L	11 25.0 bis 12 16.0					
		M₁	11 26.0	12	7	10	—	
		M₂	45.3	25	40	30	—	
		M₃	56.3	16	20	30	—	
„ 2	Iv	Pi	17 35 37	1.0	1	1	—	merklich, aber nicht meßbar.
		iM	36 12	1.0	50	50	5	(350 km)
		f	38.0					
„ 3	Ir	Pi	9 46 00	1.0	1	—		Z hat Reibung (2300—2600 km)
		eL	10 1 20					
		M	2 20	16	10	—		
		f	13.0					
„ 3	Iv	Pe	16 35 47					langsames Anschwellen z. Max.
		M	36 47	9.0	30	16		Z hat Reibung. Form b Dez.-Bericht (400 km).
		f	45.0					
„ 3	Iv	Pe	16 48 4					
		M	49 24	9.0	100	40		Z hat Reibung. 450 km.
		f	17 2.0					
	Iv	L	17 2.0 bis 37.0					mehrere Maxima und Minima.
		M	17 6.0	9.0	30	20		
„ 8	IIv	P	13 11 13	1.0 10	1 60	1 50	5 —	P—M = 150 km.
		M	11 33	1	>400	>300	100	Federn fallen ab.
		f(z)	16.0					
„ 10	Id	i	6 40 31	1.0 7.5	1 5	1 6	— —	Von der Form c.
		M	41 51	10	12	15	—	
		f	46.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
Jan. 11	Iv	Pi	19 50 1	1.0	—	1	—	Typus a (150 km).
				12	3	12	—	
		M	50 26	12	120	120	—	
		Pi	20 3 31	1.0	—	1	—	unbedeutendes 2. Beben.
		f	19.0					
„ 13	I?	iP, M?	2 16 43					H-Pendel fällt um. Z hat starke Reibung, stärkste Bewegung am Anfang.
		f	25.0					
„ 13	Iv	Pi	2 56 4	1.0	1	1	—	(150 km).
		M	56 24	1.0	30	30	—	
		f	58.0					
„ 14	Ir	L	6 52.0 bis 7 10.0					Z hat zur Zeit des Bebens Reibung.
		M_1	6 53.0	9	20	20	—	
		M_2	7 58.0	9	20	20	—	
„ 15	IIv	Pi	8 36.0					Federn fallen ab. Z ist festgeklemmt.
„ 19	IIv	Pi	14 51 30	1.0	—	1	—	(700 km).
			51 49	1.0	1	—	—	
			52 39	1.0	—	—	1	
		Mz	53 9	6.0	—	—	5	
				9	50	40	—	
		M_H	54 9	9	100	80	—	
19	IIv	Pi	57 49	1.0	—	5	15	(600 km).
		M	59 9	9	130	120	15	
		f	15 20.0					
28	Id	Pi, M	2 54 37	0.1	5	5	—	
				6.0	15	15	3	Form a.
		f	3 0.0					
28	Id	P, M	19 46 57	0.1	2	2	—	
				6.6	7	7	—	Z hat Reibung.
		f	19 50.0					
29	IIv	Pi	4 54 7	0.1	120	120	250	(200 km) b. Horizontalpendel fallen die Federn ab.
		M_2	54 37	0.1	—	—	1000	
		(M_H)	5 0 27	1.0	80	80	100	Federn wieder aufgelegt. Beben stark gefühlt.
		f	5 43.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Jan. 29	Iv	Pe	5 47 12	1.0	5	5		Z hat Reibung, (250 km), allmähliches Anschwellen. Typus b.
		M	47 52	10	30	60		
		f	6 2.0					
„ 30	Ir	L	4 3.0 bis 33.0					
		M	4 16.0	10	20	20	—	
„ 30	Id	i	21 45.0	0.1	15	15	10	alle von der Form a, jedes ca. 30 sek dauernd.
		i	4 43.0					
„ 31		i	13 3.0					
Febr. 4	IIr	Pi	14 3 40	2.0	3	8	—	(2100 km).
				14.0	35	14	—	
		S	7 10	10.6	20	15	—	
		eL	8 40	—	—	—	—	
		M_1	9 20	21.0	400	80	—	
		M_2	12 40	14.0	70	50	—	
	IIr	Pi	15 44 10	2.0	5	5	—	(2100 km).
		S	47 20	9.0	20	5	—	
		eL	49 10	9.5	30	20	—	
		M_E	50 00	15.8	80	20	—	
		M_N		12.6	50	30	—	
		f	16 33.0					
	IIr	Pi	17 40 30	2.0	3	3	—	P−S = 1800
				6.3	10	10	—	P−eL = 2300
		S	43 50	9.5	15	10	—	P−M = 2200
		eL	45 30	—	—	—		
		M	46 30	12.8	50	50	—	
		f	18 23.0					
	IIr	Pi	18 36 30	2.0	1	1	—	(2200 km).
				6.0	10	5	—	
		S	39 30	9.5	7	3	—	
		eL	41 30	—	—	—		
		M	42 30	13.0	36	15	—	
		f	19 13.0					
„ 10	Iv	e	9 28.9					(450 km).
		M	30.0	10.0	2	2	—	
		f	31.5					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Febr. 10	I	e	9 32.5					(400 km).
		M	33.5	5.0	5	10	—	
		f	38.0					
„ 13	Iv	iP	10 56 30					bei EW langsames Anschwellen (450 km).
		M_E	57 40	10.5	100	30	40	
		$M_{N,Z}$	11 3 40	10.5	50	40	50	
		f	11 24.0					
„ 14	I Ortsbeben	iP	1 1 14	{ 0.1	1	1	1	von der Form c.
				{ 6.7	2	2	5	
		M (L)	2 54	6.7	10	10	20	
		f	6.0					
	IIv	e P	4 11 4					langsames Anschwellen (500 km)
		M	12 34	{ 0.1	5	5	1	
				{ 8.8	10	60	20	
		M_2	14 4	8.8	50	50	150	
		f	28.0					
„ 20	Iv	iP	7 10 16	0.1	1	1	—	(200 km).
		S, M	36	0.1	5	5	—	
		f	13.0					
	Iv	L	{ 10 51.0 bis 11 11.0					
		M		7.0	2	2		
„ 22	Ir	L	{ 17 49.0 bis 58.0					
		M_1	50.0	18.0	20	20	—	
		M_2	52.0	7.5	15	15	—	
„ 27	Iv	L	{ 19 44.0 bis 20 37.0					
		M	19 48.0	6.0	5	5		
„ 28	Id	iP	} 15 50.0	{ 0.1	5	5	100	(< 100 km).
		M		{ 6.0	15	15	60	
		f	15 55.0					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 1	IIv	Pi	11 6.0	10.0	—	—		(500 km).
				1.0	—	—		
		e M	7.0	1.0	—	400	500	Form b, die 3 Beben gehen in einander über.
	IIv	Pi	15.7	1.0	—	200	250	(500 km). 3 Minuten nach Beginn verschwinden die kurzen Perioden.
				10.0	—			
		e M	16.5					
	IIv	Pi	23.0					
		e M	23.7	10.0	—	200	250	(250 km).
				1.0	—			
		f	43.0					
„ 3			20 54 50	ca. 2.0	120	120		3 oder 4 lange Schwingungen, die bei Z fehlen, anscheinend durch mechanische Einflüsse (Ratte oder Eidechse) hervorgerufen. Pendel gerät in Unordnung.
	Iv—	Pi	23 35 15	0.1	—	—	—	(250 km).
	IIv	S, M	45	0.1	—	180	—	
	Iv	Pi	36 55	0.1	—	—	—	Die beiden Beben gehen in einander über. (250 km).
		S, M	37 25	0.1	—	60	—	
		f	38.0					
„ 4	Iv	Pi	4 52 55	0.1	—	1	—	(200 km).
		S, M	53 15	0.1	—	6	—	
		f	55.0	5.3	—	25	—	
	Iv	Pi	5 48 45	0.1	—	1	—	(200 km).
		S, M	49 5	0.1	—	1	—	
		f	50.5	5.3	—	30	—	
	Iv	Pi	10 39 25		—	1	—	(200 km).
		M	39 45	0.1	—	1	—	
		f	42.0	5.0	—	30	—	
	I	P	13 57 35	1.0	—	1	—	Ratte? P-M = 100 km.
		(e) M	57 45	ca. 1.0	—	3	—	
		f	59.0					
	Iv	Pi	16 19 35	0.1	—	merklich	—	(200 km).
				ca. 2.0	—	1	—	
		i M	55	5.0	—	25	—	
				0.1	—	1	—	
		f	22.0					
	Iv	Pi	17 37 45	1.0	—	—	—	(200 km).
		i M	38 5	0.1	—	1	—	
		f	40.0	4.0	—	15	—	

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
März 4	Id	Pi, M	18 3 5	0.1	—	2		Ratte?
		f	4.0					
" 8	Iv	iP	24 42 25	8.3	1	1		(700 km).
				ca. 1.0	1	1	5	
			43 5	0.1	6	6		merklich. P—M = 400.
		eM	43 15					
		M_{EW}	43 25	8.3	40	20	10	
		M_{NS}	44 15	8.3	40	35	15	
		M_z	46 15	8.3	10	20	25	
		f	56.0					
" 13	Iv od. d	Pi	5 58 3	0.5	—	24	0	EW Komponente hat Reibung. Die kurzperiodischen Wellen treten nur bei NS auf und verklingen nach 1 Minute.
		M_{EW}		10.6	40	10	15	
		$M_{SN,z}$	6 0 3	10.6	10	15	25	
		f	6 11.0					
" 17	Iv	Pi	9 38 0	1.0	1	1	—	
		iM	39 15	1.0	4	4	—	(250 km).
				9.5	10	3	—	
		f	47.0					
" 18	Iv	L	5 2 bis 5 9					
		M	5 4.0	6.0	7	7	—	
	Ir	L	5 29 bis 5 44					
		M	5 30.0	16.0	5	5	—	
				6.0	15	15	—	
" 25	IIr	L	16 7 bis 16 20					
		M	16 10 bis 16 13	17.0	10	10	—	
" 27	Iv	Pi	11 3 15	0.1	1	1	—	(100 km).
		iM	3 30	0.1	20	20	—	
		f	6.0	7.0	10	10	—	

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
März 30	II—	P	17 0 25	1.0	1	1	—	
	IIIr	Pi	0 35	3.0	10	10	—	
		PR	0 55	3.0	3	3	—	P—S 1900
				12.0	55	55	—	P—M 2300
		S	4 05	12.0	70	140	—	
		SR	4 55	12.0	100	(200)	—	NS haut an den Anschlag.
		M	6 55	12.0	250	(400)	—	
		c	8 55	12.0	60	100	—	
		c	20 55	12.0	30	50	—	
		c	44 55	12.0	7	20	—	
			18 5.0					Wiederkehr, oder Eintreffen der
			bis 15.0					Wellen auf dem längeren Weg.
		eL	18 5.0	15.0	10	12	—	
		M	7.3	10.0	20	50	—	
		f	18 55.0					
April 8	IIv	Pi	16 35 3	0.1	18	18	—	(wahrscheinlich 300—500 km).
				12.0	30	30	—	
			35 53	0.1	12	12	—	beide Nadeln fallen ab.
				15.0	250	250	—	
								Die Discussion der Kurven ergibt, daß der Stoß wahrscheinlich aus Süden kam.
„ 10	Iv	P	21 9 13					
		eM	11 13	0.1	1	1	—	
				3.0	2	2	—	P—M = 1000.
		M	11 43	7.0	30	30	—	
		f	19.0					
„ 12	IIr	P?	0 33 39		Nadel ab-gefallen			Eigenschwingung der Insel unregelmäßig.
		S?	43 00	6.0		7	—	starker Einsatz.
		M	43 50	9.0		50	—	P—S? = 8000.
				24.0		60	—	P—M = 3500.
		f	1 27.0					
„ 12	Ir	P	16 39 21					
		M	41 21	4.0	—	5	—	P—M = 800.
		f	45.0					
„ 12	Ir	Pi	17 20 19	0.1		1	—	(100 km).
		iM	20 31	0.1		18	—	
		f	24 24					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
April 20	IIv	Pi	20 35 45	0.1	1	1	0.5	(500 km).
				9.0	10	10	2	
		S, iM	37 00	1.0	5	5	30	
				10.0	75	50	30	
		f	58.0					
„ 22	Ir	e	0 0 39					Die kurzperiodischen Wellen fehlen bei den folgenden beiden Beben ganz.
		M_1	1 19	9.0	15	12	—	
		M_2	4 50	6.0	10	12	—	
		f	7.0					(250 km?)
	Ir	e	0 24 00					(800 km).
		M	25 55	12.0	40	40	—	
		f	36.00					
	Iv	P	4 26 00	4.5	6	6	—	gefühlt!
				0.1	1	1	—	
		iM	26 10	0.1	18	18	—	
				4.5	7	7	—	
		f	28.0					
„ 27	I	L	14 1.0 bis 25.0					
		eL	14 1.3	0.5	eben merklich			
				9.0	3	6	—	
		M	2.1	9.0	20	6	—	
Mai 1	IIv	Pi	1 45 4	1.0	—	1	5	(800 km).
				10.4	18	6	—	bei NS ist die Dämpfung ungenügend.
		M (S?)	46 44	10.4	50	70	15	
		M_2	47 34	6.8	100?	70	25	
		f	2 13.0					
„ 1	Iv	L	4 55.0 bis 5 7.0		Feder ist abgefallen			
		M	4 57.5	6.0		15	—	
„ 1	Iv	P	9 12 00	1.0		merklich		
		eL	14 20	9.0				P — eL = 700
		M	14 50	9.0		6	—	P — M = 700.
		f	9 20.0					

Datum		Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
				h m s					
Mai	1	IIr	P	18 35 6	4.0	1	20	—	(1300 km).
			S?	37 36					Die bisher regelmäßigen Schwingungen von 6.0 sek Periode unc 15 μ Amplitude hören sprunghaft auf. P — S? = 1500 km P — M_1 = 1500
			M_1	39.1	12.0		36	—	
			M_2	41.6	12.0		50	—	Schwebungen.
			f	19 35.0					
,,	2	Iv	P	10 40 55	0.1	1	1		merklich (250 km).
					9.0	10	10	—	
			S, M	41 10	0.1	3	6	2	
					9.0	50	30	—	
			f	57.0					
,,	5	Iv	P	0 38 40	0.1	1	1		merklich (1000 km). Beide Hc rizontal-Komponenten haben Rei bung.
			M	40 40	6.0	50	15	40	
			P	ca. 41 30					(1000 km).
			M	43 30	6.0	40	20	30	
			f	54.0					
,,	8	Iv	L	18 19.0 bis 39.0					
			M	23.0	12.0	25	15	—	
,,	9	Iv	P	19 39 37	12.0	10	10	—	
					1.0	2	2	—	P — M = 250
			M	40 12	12.0	50	50	—	
					2.0	10	10	—	
			f	59.0					
,,	9	Id	P, M	20 20.0	12.0	10	10		nicht gefühlt (< 100 km).
					0.1	3	3		
			f	24.0					
,,	10	Ir	P	0 9 5					nur bei NS (1000 km).
			M	11 5	12.0	10	—	—	
			f	19.0					
,,	13	IIu	L	8 18.0 b. 9 44.0		Dämpfung ungenügend			
			M	8 29.5	10	25?	6	—	
					28	?	30	—	

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Mai 17	IIv	P	20 5 30	1.0	merklich			NS ist ungenügend gedämpft
		eL	6 35	1	1	1	—	
				6	20	5	—	P — eL = 500
		S	7 15	12	100	20	—	P — S = 1000
		M	8 5	9	60	50	—	P — M = 900
		f	21 24.0					sehr langsames Abklingen (Wiederholungen?).
" 19	Ir	L	14 27.0 bis 35.0					nur bei NS aufgezeichnet, und auch dort vermutlich nur wegen ungenügender Dämpfung.
		M	28.5	9.0	10	—		
, 21	Iv	Pi	6 13 00	0.1	3	3	—	(250 km).
		iS, M	13 35	0.1	20	20	—	
		f	16.0					
" 21	Iv	L	9 53.0 bis 10 5.0					
		M	58.1	7.5	15	15	—	
" 21*)	Ir	P	22 44.1	2	merklich			
		S	47.3	6	5	—		P — S = 2300
		eL	47.8	—	—	—		P — eL = 1800
		M_1	49	10	10	5		P — M_1 = 1800
		M_2	52	12	15	10		
		f	23 24					
" 22	IIu	e(P?)	6 34.8	2	merklich			(7500 km).
		e(PR')	37.8	klein				
		e(S)	43.7	5	5	5		
		eL	51.3	—	—	—		
		M	58 bis 7 3	22	60	50		
		c	23	22	30	10		
		c	42	10	7	3		
		f	8 13					
" 29	Iv	P	9 16.3	0.1	merklich			
		Mi	16.7	0.1	15	15		
		f	20					

*) NB. Die Eigenschwingung der Insel infolge des Anpralls der Brandung wird von beiden Komponenten gleich aufgezeichnet, obgleich die Dämpfung bei NS ungenügend ist.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
Mai 30	Iv	P	18 3.1	0.1			
		Mi	3.5	0.1	25	25	
		f	18 6				
„ 31	IIu	e	5 7.1	2	merklich		(8—9000 km).
		e(P?)	7.7	5	5	—	
		e(PR?)	10.6	6	5	—	
		e	15.1	9	5	—	
		i(S?)	16.7	12	6	5	
		i(PS)	19.5	3	7	7	
		(L)	20—21	9	5	5	
		(L)	22—23	14	10	10	
		eL	31	—	—	—	
		M	36—42	18	50	50	
		f	6 25				
Juni 1	IIr	P	6 1.0	6	50	50	Der Bebenherd scheint im Norden liegend.
		i(PR1)	1.3	6	50	50	
		i	2.3	7	10	30	
		i	2.9	7	10	30	
		i	3.9	7	30	10	P — S = 2500
		i(S?)	5.0	9	80	20	P — M = 3400
		i(PS?)	6.6	12	150	100	
		M	11 bis 16	18	200	200	
		i(P?)	6 52.7	6	30	30	zweites Beben?
		i(S?)	53.9	8	30	30	
		eL	56.2	—	—	—	
		M	7 3	15	60	60	
		f	8 35				P — S? = 600 P — M = 3400
„ 5	Ir	L	4 54 bis 59				EW - Komponente ungenügend gedämpft.
		M	55.8	14	30	10	
„ 6	Iv	P	17 22.0	0.1	5	5	
		Mi	22.5	0.1	15	15	
		f	24				
„ 9	Ir	P	22 5.8	1	1/2	1/2	
		e	7.2	6	20	20	P — S = 1900 P — M = 1800
		i	8.2	6	15	15	
		i(S?)	9.1	6	20	20	
		i(PS?)	9.4	6	22	22	
		eL	9.6	—	—	—	
		M	10.4	9	40	40	
		f	22 32				

Datum		Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	μ	
uni	12	Id	iM	21 27.2	0.1	10	10		
			f	27.6					
„	13	II	Pe	12 54.4	0.1	1/2	1/2		
					10	merklich			
			e	54.6	0.1	1/2	1/2		
					10	40	40		
			e	55.6	10	100	100		
			M	57.6	10	200	200		zunächst rasches, dann sehr langsames Abklingen.
			f	14 2					
„	13	Id	iP, M	23 27.7	0.1	5	5		
			f	34.6	20	5	—		
„	15	Iv	P	4 3.6	0.1	merklich			
			iM	3.9	0.1	10	10		
			f	4 6.0					
„	15	IIv	P	6 34.9	0.1 bis 10	220	200		Stoß aus Süden. Federn zwischen den Anschlägen hin und her.
			—(m)	44.0	15	300	300		
			—	54.0	15	80	80		
			f	8 51					
„	16	Iv	Pi	20 23.0	0.1	merklich		0.1	
			Mi	23.3	0.1	20	20	25	
			f	20 25					
„	17	Iv	Pe	0 10.3					
			eM	11.1	9	40	40		
			f	26.2					
„	18	Iv	P	18 25.5	0.1	5	5	25	
					10.6	10	10	—	
			i	25.9	0.1	7	7	—	
			M	26.7	9	80	50	50	P — M = 500.
			f	18 41					
„	19	Iv	Pe	23 58.9	2	—	—	—	
			eM	24 0.2	8	10	10	—	
			f	24 2½					
„	20	Iv	Pe	14 8.5	2	—	—	—	
			eM	9.7	7	5	5	—	
			f	12					

Datum		Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	
Juni	20	Iv	e	14 56.7	—	—	—	
			M	57.2	8	5	5	
			f	15 0				
„	21	Iv	Pi	3 19.6	0.1	merklich		
			iM	20.1	0.1	7	7	
			f	22				
„	21	Ir	e	12 41				
			M	42	8	10	10	
			f	51				
„	22	Ir	P	13 18.2	2—3	5	5	Zeit um 1 oder 2 volle Minute
			M	23 1/2	9	10	10	unsicher. P — M = 1900 km.
			f	30				
„	23	Ir	P?	10 4.1	2	merklich		
			eL	11.5				P? — eL = 3200
			M	14—18m	15	10	10	P? — M = 3400—4400
			f	11 23				
„	23	IIv	Pe	18 53.6	{ 0.1	5	5	
					15 }			
				54.4	{ 0.1	10	10	{ Federn ab.
					15 }	50	50	
				19 13	6	7	7	Federn wieder auf.
			f	21 3/4				
„	23	Iv	P	23 21.2	0.1	merklich		P — M = 100
			M	21.5	0.1	5	5	
			f	22 1/2				
„	27	Iv?	P	?				
			iM	4 52.9	0.1?		20	
			[f]	53.6				
„	29	IIr	Pi	5 49.3	4	5	5	
			i	49.6	4	10	10	[2500]
			PR	50.4	6	15	15	
			e	52.8	9	45	40	
			eS	53.8	15	80	90	
			eL	54.4	—	—	—	
			M	56—59m	15	200	200	
			M_2	6 7.5	15	200	200	zweites Beben?
			f	8 30				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
uni 29	Ir	Pi	10 21.5	2	3	3	wohl vom selben Herd wie das vorige.
		i	22.3	2	7	6	[2500]
		e	24.9	8	10	10	
		S	25.8	14	20	20	
		PS?	27.5	10	35	30	
		M_1	31.8	10	80	70	
		Minimum	38½	15	50	50	
		M_2	40.8	10	100	100	
		f	11 40				
„ 30	Ir	e	3 13.4	9	5	—	
		L	16	12	3	—	
		M	20	9	5	3	
		f	40				
„ 30	Ir	eL	3 59	9	5	—	
		Me	4 4	12	10	—	
		f	4 50				
Juli 1	Iv	P	11 16.5	0.1	merklich		
		iM	17.1	0.1	6	6	
		f	18½				
„ 1	Ir	e	18 24.8				
		M	28.3	10	7	7	
		ML	36.3	25—30	10	—	
		f	51				
„ 1	Id	P, M	22 21.8	0.1	5	5	
		f	22½				
„ 1	Id	M	22 21 54	0.1	5	5	
		f	22½				
„ 3	Iu	i	6 7 55	3½	< 1	—	
		e	8 55	{ ca. 3	—	1	
				5	—	5	
		e	12 15	6	—	5	
		e (L)	12 25	6—9	10	5	
		i	13 45	3	1	1	
		i } (S?)	14 55	7	15	5	
		i	16 25	9	20	5	
		i	17 35	7	15	10	
		i	21 15	7	10	12	
		M	27—31	{ 10-12	10	25	
				20	20	20	
		f	7 20				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
Juli 3	Ir	P	10 33 34	2	merklich		P — M = 1500
		M	37½	6	5	5	
		f	41.0				
„ 3	Id	P, M	16 5 44	0.1	5	5	
		f	6.0				
„ 3	Iv	P	20 57 44	0.1 5	merklich		
		iM	58 09		10	10	
		f	59.0	0.1			
„ 3	Iv	Pi	21 28 24	0.1	merklich		
		iM	44	0.1	10	10	
		f	29 30				
„ 4	Iv	Pi	18 58 57	0.1	merklich		
		iM	59 07	0.1	10	10	
		f	61.0				
„ 5	I	i(P?)	10 38 34	3	—	merkl.	
		i	41 50	6	5	2	
		i	44 09	6	25	2	
		—	44 20	6	10	2	
		M_1	46 10	15	30	15	$P - M_1 = 2800$ km
		i	47 10	7	20	10	
		L(M)	48 bis 58	20	30	15	
		f	11 40				
„ 10—11							Die Uhr bleibt stehen. Pendel meist am Anschlag.
„ 11							Anfang des Bebens fällt in den Bogenwechsel.
	II(r?)	C	20 36 30	15	30	20	
		M_2i	49½	9	7	20	(neues Beben?)
		f	21 46				
„ 12	Id	M	4 55 49	0.1	2	3	
		f	57½				
„ 12	Iv	Pi	7 33 55	0.1	2	3	
		iM	34 15	10 0.1	20 7	20 5	
		f	40½				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
Juli 12	Iu	L	21 10 bis 22 30				
		M	21½	15—20		5	
„ 14	Id	M	16 54 10	6 0.1	12 Reibung	8 4	
		f	55½				
„ 15	Id	iM	5 21 10	6 1	10 1	10 1	f liegt im 2. Beben.
	Id	M	22 50	6 1	10 1	10 1	
		f	31.0				
„ 15	Ir	i	12 6 40	4	2	2	
		eL	9 50	—	—	—	
		M	11—15m	15	20	15	
		f	13.00				
„ 15	Ir	L	21 43 bis 48				
		M	46.0	15	8	—	
„ 16	Iv	M	15 10 45	7	—	4	Beide Komponenten am Anschlag.
		f	12.0				
„ 17	Id	M	17 6 43	0.1	6	6	
		f	7.0				
„ 18	Id	M	14 23 38	0.1	3	2	
		f	24.0				
„ 18	Id	P	18 2 14	0.1	1	1	> 100 km
		M	19	0.1	6	6	
		f	3.0				
„ 19—20							Beide Komponenten am Anschlag. 10½—11½ des 20. Juli scheint ein Beben eingetreten zu sein, das aber nicht ausgewertet werden kann.
„ 21	Ir	L	7 36 bis 55				
		M	43	15—20	7	—	

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
			h m s				
Juli 22	Id	M	22 15 40	{ 0.1 / 9.0	1 / 2	1 / 2	
		f	17.0				
„ 23	Iv	P	—				
		M	13 17 20	{ 0.1 / 12	5	5	
		f	21.0				
„ 24	Ir	P	15 22 50	2	merklich		P — M = 2300—2900 km
		i	24 50	6	3	5	
		eS	26 30	9	25	10	
		e	27 10	8	15	15	
		M	29—31½m	15	50	30	
		f	17 0				
„ 28	Iv	P?	ca. 14 9 47	0.1	merklich		P — M = 100
		M	10 2	0.1	10	10	
		f	12.0				
„ 29	II	i	10 35 00	8	5	5	
		i	36 23	5	3	3	
		e	37 43	9	5	1	
		e	41 3	9	5	3	
		i (S?)	42 13	8	5	5	
		i	43 48	8	7	5	
		eL	46 43	14	—	—	
		M	50—54m	15	30	10	
		M	52.0	18	40	15	
		f	11 40				
„ 30	Id	P, eL	22 33 57	0.1	5	5	
		M (L)	34.7	{ 6 / 1	10 / merklich	10	
		f	41.0				
August 2	Iv	eP	8 31 20	{ 1 / 9	2 / 10	2 / 15	P — M = 1150
		i	32 00	{ ½ / 9	2 / 75	2 / 35	
		M	34 25	10	65	150	
		f	9 40				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	z
August 5	Iv	Pe	2 1 25	2	2	2	
		i (M_E)	2 10	9	10	5	
		M	4 40	12	10	10	
		f	2 23				
„ 7	Iv	L	{20 41½ bis 53½				
		M	43.0	12	20	15	
„ 8	Iv	i	17 24 26	5	2	1	
		M	29½	16	40	40	
		f	50				
„ 10	Iv	Pi	0 28.0	0.1	3	2	
		Mi	28.3	0.1	15	15	
		f	30.0				
„ 14	Iv	P	1 38 15	½	merklich		
		i	39 45	8	10	10	P — M = 1500
		M	42 15	12	20	20	
		f	50				
„ 14	Iv	L	8 30—38				
		M	32.8	8	10	10	
„ 17	Iv	P	9 36 50	0.5	merklich		P — eL = 1500
		i	37 50	4	5	3	P — M = 1400
		eL	39 50	—	—	—	
		M	40 30	7	5	10	
		f	47.0				
„ 17	Iv	P	20 36 35	0.1	merklich		P — M = 100
		M	36 55	0.1	10	10	
		f	40.0				
„ 17	Iv	P	23 13 17	0.1	merklich		
		M	13 32	0.1	10	10	
		f	15.0				
„ 20	Iv	P	8 49 40	0.1	merklich		
		iM	50 20	0.1	10	10	
		f	52.0				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Aug. 21	Iv	eP	5 40 25	{ 10 0.1	20	20	20	Die Wellen von 0.1 sek Periode sind 5^{42} verschwunden. Wellen von 1 sek Periode sind von 5^{42-46} erkennbar.
		M	40 45	{ 0.1 10	5 100	5 100	500	
			47 25	10	60	80	10	
		f	7 10					
„ 22	Iv?	i	9 30 40	2	4	4		(Ein Beben?)
		i	31 50	2	5	5		
		M	32 10	3	6	6		langsames Abklingen folgt.
		i	36 45	2	2	2		
		iM	38 15	4	16	14		
		f	52					
„ 28	Iv	P	18 54 15	0.1	0.5	0.5		
		iM	54 35	0.1	20	20		
		f	57.0					
								Bei 15^h des 29. August folgen 3 weitere Beben, deren Zeiten nicht angegeben werden können. Maximalbewegung.
			Beben I	0.1	10	10		
			II	0.1	12	15		
			III	0.1	8	8		
Sept. 6	Iv	P	2 45 5	{ 0.1 3	fehlt	merkl.		P — M = 300
		M	40	0.1	—	35		
		f	50					
„ 7	Ir	Pe	0 16 20	merklich				
		i	17 25	9	10	10		P — eL = 2400 P — M = 2300
		i	19 20	9	10	10		
		eL	21½	—	—	—		
		M	23.0	11½	15	20		
		f	40.0					
„ 7	IIr	P	6 18 25	2	3	2		P — S = 4500
		PR	20 10	8	7	5		
		S	24 45	8	15	10		
		eL	27.0	—	—	—		
		M	29½–31½	20	30	40		
		f	7 30					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	z
Sept. 8	Ir	L	{ 5 57.0 bis 6 7.0				
		M	5 52	9	10	10	
„ 8	Ir	P	11 44 45	0.5	1	1	
		M_1	46 5	6	10	10	$P - M_1 = 600$
		M_2	48 15	8	15	20	
		f	12 0				
„ 9	IIu	Pi	1 23 33	3	5	5	
		PR	27 10	6	2	2	
		PR	29 10	8	5	5	
		Si	33 05	8	40	35	
		PS	34 25	11	30	20	
		PSR	39 15	10	8	5	
		eL	41.0	—	—	—	
		M	44—48	26	50	60	
		f	3 00				
„ 9	IIv	Pi	9 8 55	{ 1	2	2	
		i	10 47	{ 8	7	5	
				—	—	—	
		$M_{(EW)}$	12.0	10	300	160	
		$M_{(NS)}$	17.0	9	200	200	
		f	11 19				
„ 10	Ir	P	12 33 15	1	3	2	
		i	34 55	8	5	3	
		eL	38 05	—	—	—	$P - eL = 2400$
		M	42½	16	15	15	$P - M = 3100$
		f	13½				
„ 11	Iv	Pi } e }	18 2 50	{ 0.1 11	merklich anschwellend		
		M	3 30	{ 3 11	5 50	5 50	
		f	29½				
11	Iv		ca. 23½h relat. Zeiten				wegen mangelhafter Zeitmarken kann keine absolute Zeit mitgeteilt werden. $P - M = 400$ km
		P	0 00	{ 0.1 10	merklich		
		M	0 50	10	5 60	5 60	
		f	30				

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
Sept. 13	Iv	e	9 54 30	{ 1 14*	— 3	3 1	* vermutlich Eigenschwingung des Pendels wegen ungenügender Dämpfung.
		Mi	56 30	8	15	10	
		f	10 9				
„ 13	Iv	Pe	10 21.0	{ 0.1 8	gering		
		M	21.5	7	15	15	
		f	29				
„ 21							ca. 10h unbedeutendes Nahbeben. Absolute Zeiten sind wegen mangelhafter Zeitmarken nicht angebbar.
		M		0.1	5	5	
„ 23	Ir	e	3 8 53	12	2	—	Der linke Arm ist anscheinend ungenügend gedämpft.
		i	10 23	12	5	—	
		i	14 25	12	5	—	
		M	22—24	12	10	7	
		f	55				
„ 24	IIr	P	0 5 15	3		3	An der linken Komponente können die Zeiten nicht ermittelt werden, wegen Durcheinanderlaufens der Kurven. Die Kurve EW zeigt parallelen Gang bei ungenügender Dämpfung. P — eL = 2700 P — M = 3350
		i	6 45	3		4	
		i	8 55	9		5	
		i	10 05	9		6	
		eL	11 —	—		—	
		M	15.0	12		35	
		f	1 30				
							Vom 13.—21. keine Registrierung. Vom 10.—26. Registrierung lückenhaft.
„ 29	Iv	Pi	10 36 10	0.1	4	3	
		e	10	9	—	—	
		Me	36 50	{ 9 0.1	4 30	2 15	
		f	50.0				
Okt. 1							4 unbedeutende Ortsbeben. M = 3 μ, ein Nahbeben um ca. 0h, M = 5 μ, P — M = 26sek Genaue Zeiten können wegen mangelhafter Uhrkontakte nicht mitgeteilt werden.
„ 3	Iv	L	{ 10 59 bis 11 4				
		M	11 2.1	8	5	5	

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Okt. 4	Id	M	6 51.3—53.3	0.1	2	2		
„ 4	Iu	e	23 18.4	9	2	2		Zeiten unsicher wegen mangelhafter Uhrkontakte.
		L	26.1	—	—	—		
		M_1 (S?)	28.0	17	15	10		
		M_2	32.0	18	15	15		
		eL	45.5					
		L	49—58					
		M	55	18	20—25	5		
„ 5	I	eL	5 33.0					
		M_E	35.1	18	10	5		
		M_N	45.7	15	5	8		
		f	6 0					
„ 7	IIr	eP	6 54.2	—	—	—		EW Komponente ist zu schwach gedämpft.
		e	55.0	9 2	4 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$	mrkl.	
		S?	56.0	14	30	15	fehlt	
		iM	57.3	12	200	200	200	
		M_2	7 4.5	10	—	—	250	
		fz	8.0					
		$f_{(E,N)}$	$8\frac{1}{2}$					
„ 7	Ir	P	11 55.0	1	3	3	10	P — S = 2500
		S	59.0	12	15	10	fehlt	
		i(P, S)	12 1.5	10	25	15	—	
		eL	3—	—	—	—		
		M_I	5.5	10	60	50	20	
		M_{II}	15.5	10	5	25	30	
		f	13 30					
„ 8	Iv	P	18 14.7	0.1	merklich			
		iM	15.2	0.1	10	7	10	
		f	$19\frac{1}{2}$					
„ 9	Id	M	2 $12\frac{1}{2}$—$13\frac{1}{2}$	0.1	10	10		
„ 9	Iv	L	2 $57\frac{1}{2}$—3 $9\frac{1}{2}$					
		M	2 $59\frac{1}{2}$—3 $04\frac{1}{2}$	4	6	6		

Datum		Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	μ	
Okt.	10	Iv	P	5 59.5	0.1	merklich		3	P — M < 100
			M	6 0.0	1	gering			
					5	4	4	5	
			f	6.7					
„	10	Iv	L	8 11.7—22.7					
			M	14.1	5	4	4		
„	10	Id	(i) M	22 46.8—48.3	0.1	6	5		
„	11	Id	iM	11 31.4—32.9	0.1	4	4		
„	12	Iv	e	7 59.6					
			eM	8 5.6	9	15	5		
			f	29					
„	12	Ir	S?	11 2.1	6	2	2		
			eM	7.6	10	7	5		
			f	29					
„	13	Iv	Pi	1 25.1	0.1	merklich			
			iM	25.3	0.1	5	5		
			f	26.3					
„	13	I		14 55 bis 15 10					Eigenschwingung der Insel etwas verstärkt.
„	14	Ir	P	17 36 10	1	1/2	1/2		P — S = 1000
			S	37 50	12	20	10		P — M = 800
			M	38 10 bis 39 40	15	25	15		
			f	18 9					
„	15	Id	M	0 8.3—9.0	0.1	6	5		
		Iv	Pi	0 16.3	0.1	1/2	1/2	1	
			iM	16.7	0.1	5	5	10	
			f	19					
„	16	Id	M	1 16.5—17.5	0.1	5	5		

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
ct. 17	Iv	P	2 42.9	1	1/2	1/2		P — S = 500
		S	43.8	9	25?	7		P — M = 500
		M	44.2—44.7	15	40	35		
		f	3 19					
„ 18	Ir	P	2 39.0	2 / 12	1 / 1	1 / 2		P — S = 2200
		PR	39.8	12	3	4		
		S	42.7	12	20	15		
		M	44.3—46.3	15	45	45		
		f	3 49					
„ 24	Iv	P?	1 36.3	—	—	—	Unruhe	Bei EW ist die Dämpfung ungenügend.
		Pe	36.9	1—2	anschwellend			
		S?	37.8	12	15	4		P — S 900
		M	38.7	12	12	10		P — M 800
		f	59					
„ 24	Iv	L	14 37.8—58.8					
		M	41.1	11	6	6		
, 23	Ir	P	20 14.6	2	1	1		P — S = 3000?
		PR	15.4	11	10	3		P — M = 2300
		S?	17.9	12	6	5		
		M	21	14	10	15	20	
		f	31					
„ 27	Id	i	1 43½—45½					Vibrationen.
		M	44.0—45.0	0.1	5	5		
„ 30	IIv	P	7 36 39	2	—	1	merklich	P — S 1100
		S	38 24	9	—	20	—	P — M 1150
		PS	38 44	12	—	40	—	
		M	39 24	15	—	85	100	
		f	8 59					
„ 31	Iv	Pe	1 35.1					
		M	36.6	8	5	5		
		f	41					

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Novbr. 1.	Iv	P	20 43 12	2	merklich			P—S = 600.
		S	44 17	7	25	25		
		iM₁	44 35	7	40	100	60	
		M₂	45 35	8	100	75	80	
		f	20 22	—				
„ 2.	Ir	e (P?)	13 33.1	5	—	⅓		P—eL 3300.
		e	36.4	6	2	2		P—M 3400.
		eL	40.6	—	—	—		
		M	43½—46½	15	15	12		
		f	14 34					
„ 4.	Id	M	1 2 40	0.1	5	2		
		f	3.3					
	Id	M	1 54 10	0.1	2	—		
		f	30					
	Id	M	3 45 20	0.1	5	2		
		f	45					
	Id	M	4 55 20	0.1	4	4		
		f	50					
„ 6.	Ir	L	21 3—33					
		M	13	15	8	5		
	Iv	P	22 14 25	1—2	merkl.			P—M = 600.
		M	16.0	15	17	12		
		f	29.0					
„ 9.	IIv	P	6 6 40	1	15	15	100	P—M = 1900.
		iS?	8 50	9	200	150	80	
		M	11½	14	250	200	250	
		f	18					
„ 10.	Ir?	L	1 3.0—18.0					
		M	8.0	15	6	5		
	IIr	P	12 24 30	2	5	5		
				9	10	10		P—S = 2500.
		PR₁	25 30	2	2	1		
				9	20	15		P—M = 2300.
		PR₂	26 30	9	2	20		
		S	28 40	8—9	50	65		

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
		PS	12 29 05	8—9	50	100		
		M	31 00	15	200	140		
		f	13 18					
„ 14.	Id	P	13 19 45	0.1	merkl.			
		iM	19 55	0.1	10	5		
		f	21.0					
„ 15.	IIu	e	14 39 35		—			Unruhe.
		i	48 45	10	3	5		
		i	50 50	10	5	10		
		e	54 45	12	5	5		
		eL	15 05 —	—	—	—		
		M_1	11	40	50	30		40—60 (!)
		M_2	17—19	21	60	20		
		f	16 0.0					
„ 16.	Iv	P	19 46 12	{ 0.5	2	1	mrkl.	Form b, s. Bericht 1909.
				{ 12	5	5		
		eM	46 52	{ 2	1	—	mrkl.	
				{ 12	75	80	100	
		f	20 28					
	Ir	L	12 34 43					
		M	37	13	5	3		
„ 25.	Iv	P	14 39 10	Unregelmäßige		Wellen		
		M	40 50	5	10	10		P—M = 600.
		f	47.0					
	Id	P,M	15 07 40	0.1	4	8		
		f	08 40					
	Ir	Pi	19 10 18	1—2	3	4		
		iS?	14 10	8	12	12		
		M	16	14	20	15		
		f	38					
„ 26.	II—III r	Pe	4 45 58	4		10		Erste schwache Bewegung 4^h 45^m 55^s beginnend, aus Süd, dann große Bewegung aus Nord. Kurven durcheinander gelaufen.
		i	46 16	15		90		
		—	36	{ 2		75		
				{ 18				
		PR	47 05	9		65		
		i	49 10	6		45		
		S	49 55					
		M	52	12		250		
		f		16		350		Geht in das folgende Beben, vom gleichen Herd, über.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Nov. 26.	Ir	P	5 17 55	3		6		
		(L)	18 35	7		8		P—S = 2500.
		PR	19 05	6		30		P—M = 2500.
		i	20 35	8		10		
		S	22 05	10		25		
		PS	22 55	10		30		
		M	24 55	16		120		
		f	7 0.0					
	Iv	P	22 21 35	0.2	merkl.			P—M = 300 km
		M	22 15	0.4	10	10		
		f	25.0					
Dez. 1.	IIu	(P) i	15 53.0	3—4	1	1		
		i	16 1.3	6	5	5		
		i	16 9.0	20	10	10		
		M	13–16	32	ca. 30	ca. 30		
		f	30					
„ 3.	IIr	Pi	8 4.2	3	3	7		
		e	10.9	{ 1	gering			Pi? zwei Beben?
				{ 6	8	7		
		eL	14	—	—	—		
		M_1?	18–19	18	8	10		
		M_2	24–26	ca. 15	50	25		
		f	9 0					
„ 4.	Ir	Pe	11 18.1	15	8	8		Dämpfung ungenügend.
		i	21.6	6	5	5		
		i	22.8	6	5	5		
		i	24.9	12	15	6		
		i	27.0	9	40	7		
		(i)	29.5	10	10	15		
		M	31	19	60	30		
		f	12 40					
„ 10.	II—IIIr	P	9 32.1	4	50	50	250	
		PR	34.2	3	25	25	90	P—M = 2500.
		S,eL	36.7	14	200	200	(60)	
		PS	37.6	12	400	400	80	
		M	39	18	500	500	300	
		f	11 ½					

…atum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
…Dez. …—11.		M		15	15	—		mehrere unbedeutende Ortsbeben (4. M = 10 μ). Abends fernes Beben, dessen absolute Zeiten nicht ermittelt werden können.
…z. 11.	I—IIv	Pe	9 21.0					bei NS und EW steht die Uhr.
			22.0	6	—	—	10	
			23.0	6	—	—	15	
		i	23.7	ca. 6	—	—	30	
		i	24.3		—	—	40	
		M	29½	8—10?	120	120	100	
		f	40					
	Iv	P	23 43.4	1—2	—	½		P—S 1400.
		i	44.8	1	6	6		
		S	45.8	11	12	40		
		M_1	46½	12	120	120		
		M_2	52½	10	75	120		
		f	25 0					
13.								gegen 2_h 2 unbedeutende Nahbeben. P—M = 20 Sek.; M = 6μ
	IIu	e	11 57.3	1	merkl.			
				3	1	1		
		i	59.1	2	3	3		
		i	12 1.0	3—4	5	5		
		e	13.8	10	4	3		
		e	16.7	9	3	½		
		i	20.3	18	8	8		
		e	30.8	20	5	5		
		e	40½	30—40	15	15		eL?
		M	50	38	50	30		
			53	25	70	30		
			55	25	90	60		
			57	17	70	20		
		f	14 0					
14.	Iv	Pi	16 5 25	0.2	< ½	< ½		
		M	5 43	0.1	10	10		
		M_2	7 21	0.1	6	6		
		f	8½					
14.	IIv	P	20 48.1	6	100	50		
				2	10	10		P—S = 800.

Datum	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
		PR	48.4	2 9	50 15	45 10		P—M = 600
		S	49.5	2 10	5 50	5 50		
		M	49.8	2 10	1 100	1 150		
		f	?					Uhr bleibt stehen.
„ 18.	IIu	i	2 55.7	3—4	1	1		In den 12 Stunden v… Ortsbeben, unbedeutend.
		PR	58.1	3—4	2	3		
		S?	3 4.7	12	10	8		
		i (PS?)	9.2	9	5	5		
		e L	12.2	—	—	—		
		M	16–19	20	30	20		Gegen Schluß superp… unbedeutende Ortsbeben.
		f	50					
„ 19.		M			5	5		Im Laufe des Tages… Ortsbeben, meist 2μ.
„ 24.		M		0.1	5	5		Zwischen 0h und 6h… beben, das größte neben…
„ 26.	Iu	L	6 0.0 — 30					Im Laufe des Tages… beben, M = 5 μ.
		M	6 10	ca. 20	5	5		
„ 29.	Ir	i	7 8.0	3	merkl.			
		L	13½–23½					
		M	7 16½	12	6	6		
	I	e(P?)	23 56.9		merkl.			
		(PR?)e	58.4	6	5	5	—	
		e	24 3.3	6	5	5	—	
		e	24 57.0	3	merkl.			Zweites Beben?
		i(S?)	25 6.5	9	6	—		
		M	25 18½bis 23½	18	10	10		
		f	35					

Die Weltbeben der Jahre 1909 und 1910 und die aus ihnen konstruierten Laufzeitkurven.

(Tafel im Anhang.)

1. Vorbemerkung.

Die folgende Arbeit der Konstruktion neuer Laufzeitkurven war eigentlich bereits abgeschlossen im Jahre 1910; sie basierte damals auf den zahlreichen und schönen Weltbeben des Jahres 1909. Nach meiner Rückkehr aus Samoa im Jahre 1911 fand ich sie in Göttingen vor, und ergänzte sie nach dem Ergebnis des Jahres 1910.

Die Drucklegung aber erforderte so viel Zeit, daß man heute in manchen Teilen die Kurven bereits wieder als veraltet ansehen, und eine Ergänzung und Erweiterung auf Grund des inzwischen angesammelten Materials für wünschenswert halten könnte.

Indessen habe ich mich nunmehr auf die Hinzufügung der allernotwendigsten Bemerkungen beschränkt, die besonders im Hinblick auf die erfolgreichen Entdeckungen Zoeppritz's, Geigers und Gutenbergs[1]) notwendig waren, und kein neues Material hinzugezogen.

2. Die Konstruktion der Laufzeitkurven.

Für das Jahr 1909 und 1910 wurden alle diejenigen Beben eingehend untersucht, die Samoa gemeinsam mit anderen Stationen hatte. Aus dieser großen Zahl wiederum wurden die Beben ausgesucht, welche in den größten Entfernungen noch aufgezeichnet und an wenigstens 3 Stationen überhaupt in den Registrierungen vorhanden waren. Bei dieser Sichtung blieben schließlich noch 30 Beben als verwendbar übrig.

Für diese 30 Beben wurden nun mit Hülfe der nächstgelegenen 3 Stationen Bebenherd und Bebenzeit bestimmt und hieraus die Laufzeiten der einzelnen Phasen berechnet.

Bei der Herstellung der Laufzeitkurven von Wiechert und Zoeppritz war es notwendig, ab ovo anzufangen, und die Bebenzeit oder wenigstens den Bebenherd durch unmittelbare Beobachtung zu bestimmen. Es blieb daher damals auch nichts übrig, als sich auf eine sehr kleine Zahl von Beben (3) zu beschränken, von denen der Herd durch Katastrophen genau bekannt war. Die damals gefundenen

1) Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1912. V, Erdbebenwellen.

Laufzeitkurven haben sich in den ersten Megametern [1]) als sehr genau erwiesen, eine Weiterarbeit kann also den Anfang dieser Laufzeitkurven als Ausgangspunkt wählen, und durch 3 dem Herde nahegelegene seismische Stationen den durch unmittelbare Beobachtungen meist nicht festlegbaren Bebenherd aus den bisherigen Laufzeitkurven bestimmen. Die damals notwendige Beschränkung, mit einer möglichst kleinen Zahl möglichst genau bekannter Beben zu arbeiten, ist heute, wo man den Bebenherd aus den Aufzeichnungen selbst genau bestimmen kann, offenbar nicht mehr angebracht.

Der Bebenort muß so liegen, daß die Laufzeiten für *P*, *S* und *M* ungefähr mit den in der Laufzeitkurve angegebenen Werten übereinstimmen. Wenn *P* u. s. w. an einem Orte später eintrifft als an einem andern, so muß auch der Bebenherd bei ersterem weiter ab liegen als bei letzterem. Der Bebenherd ist also durch eine Phase an 3 Stationen bereits bestimmt.

Sobald dies der Fall ist, wird die Bebenzeit durch eine Phase auf einer Station definiert. Bebenzeit und Herd sind also durch die verschiedenen Phasen dreier Stationen überbestimmt, und dieser Umstand läßt sich, auch wenn keine vierte Station vorhanden ist, für deren Entfernung nun die Laufzeiten der einzelnen Phasen bestimmt werden können, dazu ausnutzen, die Lage des Herdes und die Bebenzeit zu kontrollieren, und die Laufzeiten der Phasen bei den 3 Stationen an ihren unsicheren Stellen auszugleichen und zu verfeinern.

Wenn bei einer unverhältnismäßig großen Zahl von Beben eine Analyse nicht gelang, so kann das an mehreren Gründen liegen. Einmal können *P* und S, oder allgemeiner die Vorläufer verkannt sein, indem einer der Vorläufer verstümmelt wurde. Das scheint bei einer bestimmten Gruppe von Beben vorzukommen. Solange wenigstens eine oder zwei Stationen *P* haben, läßt sich der Irrtum leicht berichtigen, sind aber bei der Mehrzahl der Stationen oder bei allen die Phasen falsch bezeichnet infolge Verstümmelung des Bebens, so ist eine Analyse nicht mehr möglich. Dasselbe kann eintreten, wenn mehrere Zeiten unrichtig sind, wie das bei den Wochenberichten infolge der Länge der Zahlenreihen hin und wieder unvermeidlich ist. Besonders groß wird die Schwierigkeit, wenn, wie das öfter vorkommt, zwei Beben meist von demselben Herd rasch aufeinander folgen — wobei vermutlich das zweite von dem ersten ausgelöst wird —, da dann die Aufzeichnungen über einander greifen.

In einzelnen Fällen kann man sich des Verdachts nicht erwehren, als ob die aus Telegrammen oder Zeitungsnachrichten ge-

1) 1 Megameter = 1000 km.

schöpfte Kenntnis eines Bebenherdes von ähnlicher Zeit, wie die Registrierung sie gibt, von Nachteil gewesen sei. Fehlt in solchem Fall ein Vorläufer, so wurden nicht nur alle andern falsch angesprochen, sondern auch weniger markante Punkte anscheinend als Phasen betrachtet, indem man an Hand der Laufzeitkurven von dem (irrtümlich) bekannten Bebenherde ausgehend auswertete. Natürlich kann aber eine Auswertung, die zwangsweise in die früheren Laufzeitkurven hineingefügt ist, nichts neues für diese liefern.

Auch die 30 für die neuen Laufzeitkurven schließlich verwendeten Beben leiden darunter, daß die Bearbeiter der Registrierungen, statt mechanisch und ohne Interpretation aus der Kurve alle auffälligen Punkte wiederzugeben, bemüht waren, die beobachteten Punkte irgendwo in den Laufzeitkurven unterzubringen, was an den ungenauen, unbekannten oder unter falschen Annahmen extrapolierten Stellen der letzteren zu groben Entstellungen Anlaß geben kann.

Da sich diese Gefahr einer Selbsttäuschung mit besserer Kenntnis der wirklichen Laufzeitkurven immer mehr steigern wird, möchte ich vorschlagen, auf die Bezeichnung von P, S u. s. f., wo diese nicht sehr deutlich erkennbar sind, tunlichst zu verzichten, und nur mit i (impetus) oder e (emersio) auszuwerten, wobei besonders starke i und e, die dann wohl häufig den P und S entsprechen würden, unterstrichen werden könnten.

Auf dem Kurvenblatt (Anhang) sind auch diejenigen Punkte eingetragen, von denen angenommen wurde, daß sie nur zufällige Anschwellungen im Verlaufe des Bebens waren; sie sind eingeklammert in den Fällen, in denen ein Irrtum wahrscheinlich war.

Wiechert und Zoeppritz waren bei der Aufstellung ihrer Laufzeitkurven zu der Ansicht gekommen, daß es wünschenswert sei, die Originalkurven einzusehen. Man kann dieser Auffassung nur zustimmen, wenn man die damalige Aufgabe in Erwägung zieht.

In unserem Falle aber, wo es sich um eine Weiterarbeit auf Basis der nunmehr vorhandenen Grundlagen mit einem umfangreicheren, durch die früheren Ergebnisse kontrollierten Material handelt, wäre der gleiche Grundsatz zu verwerfen. Denn es wäre bei 30 Beben und insgesamt ca. 100 Registrierungen dem Leser nicht möglich, eine Kontrolle darüber auszuüben, ob und wie weit die dann verwendeten Ergebnisse persönliche Auffassung des Verarbeitenden sind: es schien mir daher wünschenswert, ausschließlich die in den Wochenberichten mitgeteilten, von den unabhängig arbeitenden Beobachtern unbefangen gesammelten Zahlen zu verwenden, um den neuen Laufzeitkurven eine möglichst weitgehende Objektivität zu sichern, was bei einer Kenntnis der Registrierungen

und eventuellen Aenderung der mitgeteilten Zahlen sicherlich nicht möglich gewesen wäre. Auch bei diesem Verfahren bleiben die früher genannten subjektiven Fehler der einzelnen Kurven-Auswertungen noch bestehen; sie sind aber verhältnismäßig leicht bei der Verarbeitung zu ermitteln und zu diskutieren, während eine Kenntnis der Kurven und Aenderung der Auswertung der Selbsttäuschung Tür und Tor geöffnet hätte.

In Bezug auf die erreichte und für den vorliegenden Zweck notwendige Genauigkeit wären noch einige Ueberlegungen anzustellen. Bei einer Aenderung um eine an der Erdoberfläche gemessene Entfernung von 1000 km ($= \varDelta E$) ändert sich die Zeit, die die erste Phase P braucht ($\varDelta t$ in Minuten) mit folgender Beziehung (aus der Laufzeitkurve) in 1000 km Entfernung vom Bebenherd

$$\frac{\varDelta t}{\varDelta E} = 2.4 \frac{\text{min}}{\text{Megameter}}$$

und bei 12000 km

$$\frac{\varDelta t}{\varDelta E} = 0.6 \frac{\text{min}}{\text{Megameter}}, \quad \text{mithin } \frac{\varDelta t_{1000}}{\varDelta t_{12000}} = 4.$$

Wir brauchen also für die Bestimmung der Entfernung vom Bebenherd bei 12000 km nur den 4. Teil der Genauigkeit, die wir im ersten Megameter brauchen.

In Bezug auf Zeitgenauigkeit kommt die Überlegung dazu, daß Ungleichmäßigkeiten der durchlaufenen Bahn sich auf große Entfernungen zu einer merklichen Zeitabweichung summieren können, letztere also nicht stets auf einem Zeitfehler zu beruhen braucht, sondern für die durchlaufene Strecke charakteristisch sein kann; es kann sich in unserm Falle eben nur um die Konstruktion von mittleren Laufzeitkurven handeln, von welchen grundsätzliche Abweichungen festzustellen eine spätere Arbeit bilden würde.

Wellen z. B., die auf kürzestem Wege von Pol zu Pol eilen, hätten einen um ca. 42 km = ca. $4^{\text{sek.}}$ kürzeren Weg, als eine für den Aequator gezeichnete Laufzeitkurve angeben würde. Auch würde wohl später zu erwägen sein, an welchen Flächen die Reflektionen stattfinden. Wenn das im Wesentlichen an der Oberfläche der Erdkruste der Fall ist, wären die lokalen Neigungen dieser zur Horizontalen zu berücksichtigen, speziell an den Senkungen der Kontinente zum Meeresboden.

So verdienstvoll und notwendig es auch ist, daß jeder Beobachter sich um eine möglichst genaue Zeit bemüht, so ist anderseits nicht zu verkennen, daß Fehler in den Zeitangaben einmal bei der Länge der Tabellen und der Umständlichkeit der Zeit-

berechnung unvermeidlich sind, dann aber auch leicht bei einer Bearbeitung aufgedeckt werden können. Minuten-Fehler lassen sich unmittelbar korrigieren, wegen Sekunden-Fehlern ist keine Aenderung nötig, da ohnehin die Phasenzeiten ganz offenbar von Fall zu Fall etwas verschieden verlaufen und die Punkte nur in der Nähe der gesuchten Kurve zu liegen brauchen.

Viel wichtiger scheint mir eine völlige Objektivität der Auswertung, oder der Verzicht darauf, bei jedem Beben die Entfernung zu bestimmen und dann an der Hand von Laufzeitkurven oder der Vorstellung einer solchen auf der Bebenkurve nach Phasen zu suchen.

Es ist notwendig, auf diesen Punkt mit Nachdruck hinzuweisen, weil eine Reihe kritischer neuerdings angestellter Betrachtungen der Zeitgenauigkeit bei einzelnen Beben, so verdienstvoll sie auch sonst sein mögen, geeignet scheinen, die Aufmerksamkeit der Beobachter von dem wesentlichsten Punkte abzulenken. Zeitfehler können lediglich zur Folge haben, daß der Bearbeiter gezwungen ist, auf ein Beben — eins unter so vielen — zu verzichten; eine subjektive Auswertung hingegen vermag den Bearbeiter grundsätzlich zu täuschen und das gesamte Resultat zu fälschen.

Am meisten wurden die Aufzeichnungen folgender Stationen verwendet: Göttingen, Tsingtau, Batavia, Sidney, Samoa, Ottawa. Zur Aushülfe Hamburg oder Jena, die Göttingen gleichwertig sind; Manila, das wegen ungleichen Instrumentes ungern genommen wurde, und Tiflis, das erst in neuerer Zeit nach dem Göttinger Schema auswertet.

Es ist bekannt, daß die verschiedenen Instrumente etwas in ihren Zeitangaben differieren; ich habe mich daher tunlichst auf die Stationen beschränkt, die mit Wiechertschen Instrumenten und nach den Göttinger Prinzipien für die Definition des Einsatzes etc. arbeiten.

Erst spät stellte es sich als dringend erwünscht heraus, auch die Angaben von Ottawa zu verwenden, die mir früher nicht bekannt waren. Soweit diese vorhanden waren, wurden sie daher noch eingefügt, die alte Herdbestimmung und der Text aber unverändert gelassen. Von Sidney 1910 war bedauerlicherweise noch kein Material vorhanden; die Beobachtungen dieser Station 1909 haben für die Herdbestimmungen im Stillen Ozean unschätzbare Dienste geleistet.

Auf der Laufzeittafel im Anhang habe ich als Abscisse gleiche Strecken der direkten Entfernung statt der an der Erdoberfläche gemessenen eingetragen, weil in großen Entfernungen die Zahl der

Beobachtungen abnimmt, und ein sich verkürzender Maßstab der Strecken an der Erdoberfläche dem Genauigkeitsbedürfnis in Entfernung besser Rechnung trägt.

Die Anwendung der direkten, kürzesten Entfernung als Abscisse hat aber noch eine andere Bedeutung: die Laufzeitkurven werden dann nämlich zu Geraden, sobald die Geschwindigkeit der Wellen konstant wird und die Bahnen gerade Linien sind[1]). Eine Tangente, die wir an irgend einer Stelle an die Laufzeitkurven legen, gibt also unmittelbar einen Maßstab für die Übereinstimmung der Kurve mit dem genannten Grenzfall. Sehen wir die Kurve sich vom Ausgangspunkte nach unten krümmen, so bedeutet dies nach der herrschenden Meinung, daß die an ferneren Punkten eintreffenden und daher auch tiefer in das Erdinnere hinabgetauchten Wellen größere scheinbare Geschwindigkeit infolge Beugung bekommen haben, als die an näher gelegenen Punkten beobachteten, und wir schließen hieraus auf eine Zunahme der Dichte nach dem Erdinnern; würde sich die Kurve vom Ausgangspunkt nach oben krümmen, so müßte dies eine Verlangsamung der Wellen bedeuten. Wir werden weiter unten indessen sehen, daß diese Schlüsse nur bedingte Gültigkeit haben.

P. Diejenigen Wellen, deren Laufzeitkurve mit *P* (primae undae) bezeichnet ist, werden in der Seismik als Longitudinal- oder Verdichtungs- und Verdünnungswellen angesehen.

Wir bemerken, daß ihre Kurve sich bis 4500 km[2]) immer mehr krümmt, und zwar nimmt die Geschwindigkeit der Wellen zu; wir schließen hieraus, daß die Dichtigkeit der durchmessenen Schichten immer mehr wächst, je tiefer die Wellen hinabtauchen. Die größte Tiefe, bis zu der wir diesen Vorgang bemerken, beträgt unter den von E. Wiechert gemachten recht wahrscheinlichen Annahmen über die Beugung der Erdbebenwellen 1500 km. Die bis zu dieser Tiefe hinabgetauchten Wellen tauchen wieder an die Erdoberfläche empor in 4500 km Entfernung vom Bebenherd. Alle in größerer Entfernung auftauchenden Wellen haben den inneren von Benndorf und Wiechert entdeckten Kern passiert, welcher konstante Dichte besitzt, und wir sehen in der Tat, wie die Laufzeitkurve von *P* oberhalb 4500 sehr nahe eine Gerade wird: auf der älteren Laufzeitkurve, die hier nur gestrichelt wiedergegeben ist, war sie dies noch vollständiger.

---

1) Das Quadrat der Wellengeschwindigkeit ist gleich dem Elastizitätskoeffizienten e dividiert durch die Dichte d; also für $e:d = \text{const.}$, und $d = \text{const.}$

2) Stets, sofern nicht etwas anderes ausdrücklich bemerkt ist, kürzeste Entfernung.

Wir bemerken nun, daß die neuen Beobachtungen zwischen 6000—7000 km der älteren Wiechert-Zoeppritzschen Kurve gut entsprechen, ebenso die zwischen 8000 und 9000. Zwischen 5000 und 6000, und ebenso zwischen 7000 und 8000 hingegen weichen die Beobachtnngen systematisch von der früheren Kurve ab. Ich habe daher eine neue dritte Kurve gezeichnet, die den Abweichungen gerecht wird. Eine wirkliche, auf die Beobachtungstatsachen gegründete Laufzeitkurve von *P* würde also bis 6000 km der neuen Kurve folgen, dann auf die alte zurückbiegen, bei 6800 km diese wieder zugunsten der neuen verlassen, bei 8000 wieder auf die alte Kurve abbiegen, und bei 8600 km diese wieder nach oben verlassen. Für die letzte Strecke habe ich nur die neue Kurve gezeichnet. Bei ca. 4500 und 6800 km, wo die alte Kurve konstanter Geschwindigkeit von *P* nach oben verlassen wird, fanden Geiger und Gutenberg einen plötzlichen Wechsel des Amplitudenverhältnisses der *P*-Wellen zu ihren ersten Reflectionen. Die gleiche Erscheinung dürfte bei 8600 km eintreten. Hier wird sie nur, wie die Kurven von Geiger und Gutenberg vortrefflich demonstrieren, unklar und verwirrt aufgezeichnet, weil zufällig gerade in dieser Entfernung die ersten Reflectionen von *P* den Kern konstanter Dichte gestreift haben.

Es entsteht nun die Frage, wie wir uns die abwechselnde Abnahme und Zunahme der Geschwindigkeit von *P* erklären sollen. Bezweifeln können wir die neue „Schlangen“-Kurve kaum, da die Wendepunkte von einer großen Zahl unabhängig von einander arbeitender Beobachter bestimmt sind, und zum Überfluß wenigstens im Wesentlichen durch die auf ganz anderem Wege gefundenen Ergebnisse von Geiger und Gutenberg bestätigt werden. Müssen wir nun wirklich aus dem Wechsel der Geschwindigkeiten von *P* auf einen Wechsel der Dichte im Erdinnern schließen? Der Gedanke, daß in so großer Entfernung vom Erdmittelpunkt, mehr als 3000 km von ihm entfernt, dichtere und daher schwerere Massen über weniger dichten, leichteren liegen sollen, erscheint so absurd, daß wir ihn kaum annehmen können.

Weniger bedenklich wäre vielleicht die Vorstellung, daß wir es bei der Abnahme der Geschwindigkeit von *P* mit Beugungserscheinungen zu tun haben, die sich an den Oberflächen verschiedener „Schalen“ des Erdinnern ausbilden. Aber wie sollten derartige Schalen zustande kommen, außer, wenn die jeweilig innere auch dichter wäre? Und die Beobachtungen auch mit ganz anderen Methoden zeigen, wie Wiechert dies bereits fand, zweifellos eine

merklich konstante Dichte bei konstantem Elastizitätskoeffizienten. Der Gedanke verschiedener unabhängiger Schalen gleicher Dichte und von wechselndem Elastizitätskoeffizienten endlich erscheint ebenso absurd wie der erstgenannte, und ebenso unannehmbar.

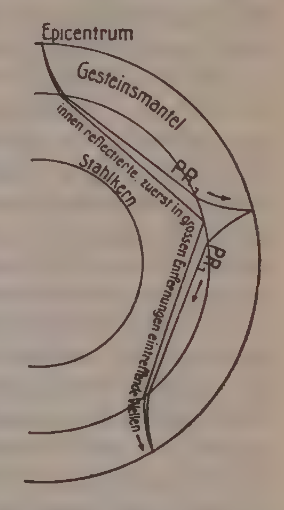
Wir müssen uns einstweilen mit einem negativen Ergebnis zufrieden geben, werden aber später sehen, daß die Transversalwellen ein gewisses Kriterium für eine Entscheidung geben.

Deutlich und klar, wenn auch zunächst nur als Erfahrungstatsache, ist der Abschluß der Kurve der Longitudinalwellen bei 10300 km. Obgleich aus größeren Entfernungen eine große Zahl von Beobachtungen vorhanden ist, läßt sich die Kurve der Longitudinalwellen über diese Entfernung hinaus nicht fortsetzen.

Die Erklärung für diese neue Unstetigkeit der *P*-Kurve ist nicht einfach. Wenn wir annehmen, daß hinter der Unstetigkeit *P* durch Reflektion und Beugung zunächst verschwindet, und daß der Haufe von ersten Wellen, der bei 12000 km beobachtet wird, als Fortsetzung von *P* zu deuten ist, haben wir die Schwierigkeit, daß die Verlangsamung von *P* sehr stark ist. Verbinden wir nämlich das letzte Ende von *P* mit dem Haufen bei 12000, so ist der Winkel zwischen dieser Linie und der Abscisse größer als der zwischen der *P*-Kurve und der Abscisse unmittelbar am Bebenherd, also für Longitudinalwellen in der allerobersten Erdkruste. Das würde, da ja die in diese Tiefen hinabtauchenden Wellen nur wenig gebeugt werden und eine Abnahme der scheinbaren Geschwindigkeit in diesen großen Entfernungen einer Zunahme der Dichte oder Abnahme der Koeffizienten der Linearelastizität entspricht, auf eine sehr große Dichte eines inneren Kerns, oder auf sehr geringe Elastizitätskoeffizienten desselben hindeuten. Am meisten plausibel ist es vielleicht, anzunehmen, daß zwischen der Laufzeitkurve der Longitudinalwellen, und dem Beobachtungshaufen bei 12000 kein Zusammenhang besteht, und daß die Erdoberfläche jenseits 10300 km gegen die Longitudinalwellen eines Bebens beschattet wird durch einen Erdkern, der undurchlässig ist gegen die Longitudinalwellen. Allerdings bleibt dann der Beobachtungshaufen bei 12000 zunächst unerklärt.

In jedem Fall scheint hiernach aus den gerade in dieser Entfernung zahlreichen Beobachtungen hervorzugehen, daß die Longitudinalwellen, welche bei 10300 km wieder an die Erdoberfläche emportauchen, einen inneren Kern der Erde gestreift haben, gleichviel, ob man es für wahrscheinlicher hält, daß die Wellen in der Tiefe zerstört, oder daß sie verlangsamt werden.

Eine naheliegende Möglichkeit muß noch erwähnt werden: es ist nämlich nicht ganz ausgeschlossen, daß die zwischen 4500 und 10300 km auftauchenden Wellen, statt tief in den inneren Stahlkern der Erde hinabzutauchen, an dessen Oberfläche verblieben sind, und daß überhaupt die ersten Wellen, denen es gelingt, den inneren Kern zu passieren, erst bei 12000 km Entfernung wieder an der Erdoberfläche erscheinen. Bei steilerem Einfallswinkel nimmt auch die Beugung der Wellen immer mehr ab; da die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte ist, könnte also bei großen Entfernungen die Abnahme der Wellengeschwindigkeit mit der notwendigen Zunahme oder Konstanz der Dichte wohl harmonieren.



PR. Die Reflectionen von P. Die Beobachtungen über die ersten und zweiten Reflectionen von P sind nur dürftig. Bei der ersten Reflektion PR_1 sollte man erwarten, daß sie in der doppelten an der Erdoberfläche gemessenen Entfernung wie P, also bei 9000 km = ca. 8400 km kürzester Entfernung, zuerst den Wiechertschen Stahlkern berührt. In der Tat beobachten wir einen Sprung der Kurve in der angegebenen Entfernung. Die folgende Strecke (gestrichelt) sollte nach der älteren Laufzeitkurve eine Gerade sein. Analog P weicht PR_1 hier nach oben bis ca. $2 \times 7000 = 14000$ km (die Erdoberfläche entlang gemessen) davon ab, um rund den doppelten Betrag wie P ($2 \times 7^{\text{sek.}}$). Bei der großen Wahrscheinlichkeit dieses Kurvenverlaufs hält es doppelt schwer, die zahlreichen Beobachtungen, die unterhalb der PR_1-Kurve liegen, als Reflexwellen zu deuten, und mit PR_1 in Zusammenhang zu bringen; jedenfalls lassen sich gegen einen derartigen Zusammenhang wenigstens ebenso gewichtige Bedenken erheben, wie gegen einen solchen zwischen der P-Kurve und dem Haufen von Beobachtungen bei 12000 km. Vielleicht werden wir bei den Beobachtungen bei 12000 noch am ehesten mit der Annahme auskommen, daß wir es hier mit P-Wellen zu tun haben, die irgend welche innere Reflection erfahren haben, etwa an der Innenfläche des Wiechertschen Stahlkerns (s. Figur).

S. Die mit S (secundae undae) bezeichneten Wellen werden

in der Seismik für Transversalwellen gehalten, für Transversalwellen allerdings ohne Vertikalkomponente. Sie entsprechen einem Hin- und Herbewegen einer Scholle über einer andern, die hierdurch in Schwingung versetzt wird.

Die Laufzeitkurve von *S* zeigt in den gleichen Entfernungen wie die von *P* Unstetigkeiten, so daß der Schluß erlaubt ist, daß die *S*-Wellen, die an einer Stelle der Erdoberfläche auftauchen, den gleichen Weg gelaufen sind, wie die *P*-Wellen, nur mit geringerer Geschwindigkeit. Ich habe bei *S* bis 9000 km die alte Kurve durchgezogen, und möchte nun kurz darauf aufmerksam machen, wo und in welcher Weise die neuen Beobachtungen von dieser früheren *S*-Kurve abweichen.

1) Der Knick bei 4500 km (Benndorf-Wiechert) coincidiert mit dem entsprechenden Knick der *P*-Kurve, und wird durch die neueren Beobachtungen nur bestätigt. Die folgende Strecke zeigt analog *P* eine merkliche Konstanz der Wellenbewegung.

2) Auf der ersten Strecke, bis 6000 km, sehen wir indessen die Beobachtungen systematisch nach unten von der Kurve abweichen; diese Abweichung tritt analog der bei *P* durch die neueren Beobachtungen gefundenen ein, aber in entgegengesetzter Richtung.

3) Zwischen 6000 und 7000 stehen den 7 Beobachtungen von *P* nur 4 von *S* gegenüber, die in sich nur schlecht übereinstimmen. Vielleicht ist dieser Umstand für die Unstetigkeit, die die in dieser Entfernung vom Bebenherd wieder auftauchenden Wellen aufweisen, ebenfalls karakteristisch; jedenfalls scheint hier aber, analog der *P*-Kurve, die ältere *S*-Kurve wieder richtig zu sein.

4) Die Beobachtungen zwischen 7000 und 8000 scheinen wieder etwas von der früheren Laufzeitkurve abzuweichen, und zwar nach unten, also wieder im entgegengesetztem Sinne wie bei *P*.

Alle Unstetigkeiten der passierten Schichten des Erdinnern finden sich also bei *S* ebenso ausgeprägt wie bei *P*, aber die gleiche Unstetigkeit, die bei den Longitudinalwellen eine Verzögerung hervorruft, verursacht, abgesehen von dem Sprung bei 4500 km, bei den *S*- oder transversalen Wellen eine Beschleunigung. Bei der sonstigen Parallelität von *P* und *S* ist diese Beobachtung doppelt merkwürdig; berechtigt sie uns vielleicht zu dem Schluß, daß das entgegengesetzte Ausbiegen der Kurven auf Beugungserscheinungen oder Änderungen des Verhältnisses Linear- : Form-Elastizität an den Schichtgrenzen des Erdinnern beruht? Durch Änderungen der Dichte in der Tiefe kann es jedenfalls nicht erklärt werden, denn jede Änderung der Dichte muß auf die Wellengeschwindigkeit

von P und S in gleichem Sinne einwirken, aber nicht in entgegengesetztem, vorausgesetzt wenigstens, daß die Koeffizienten der Form- und Linear-Elastizität, denen das Quadrat der Geschwindigkeit der S- und P-Wellen proportional ist, sich nicht verschieden ändern. — Wie sollen wir uns aber Schichtgrenzen vorstellen, wenn nicht zugleich Dichtigkeitsänderung eintritt?

5) Bei 9000 km endlich mußte die frühere Kurve ganz aufgegeben werden, denn hier biegen die Beobachtungen von S ganz ab; S wird schließlich auf weite Entfernungen hin praktisch gleichzeitig beobachtet, um oberhalb 11000 km überhaupt zu verschwinden. Letztere Erscheinung können wir uns vielleicht so denken, daß in den ganz großen Entfernungen die S-Wellen so steil auftauchen, daß keine horizontale Komponente mehr zustande kommen kann. Der Umstand, daß bei 11000 km S ganz analog P verschwindet, bildet aber wiederum einen weiteren Beleg für die Annahme, daß die diesen Entfernungen zustrebenden Wellen einen neuen, für sie nicht durchlässigen Kern der Erde angetroffen haben. Von 8600 km an bewegen sich die Kurven von P und S wieder in entgegengesetztem Sinne: P weicht nach oben, S nach unten aus.

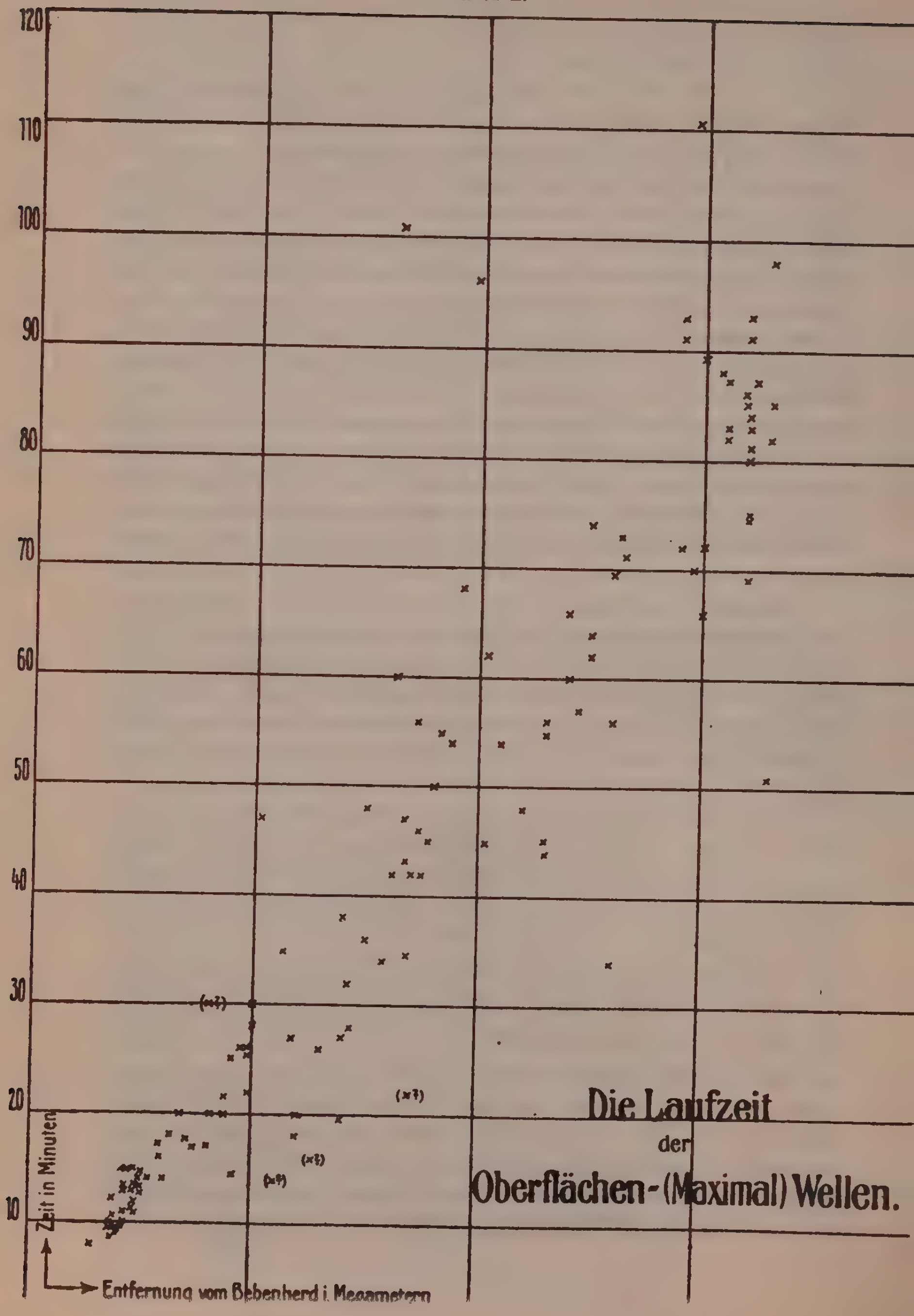
Es wurde schon bemerkt, daß auch die von Geiger und Gutenberg mitgeteilte Kurve des Amplitudenverhältnisses von P zu PR_1 (l. c. S. 198) bei ca. 8400 km kürzester Entfernung eine Unstetigkeit erkennen läßt. Allerdings muß hier bereits deswegen eine Unstetigkeit des Amplitudenverhältnisses eintreten, weil gerade in diesen Entfernungen die reflectierten Wellen den Wiechertschen Kern streifen.

PS. Über die Wechselwellen, die man aus theoretischen Gründen meint erwarten zu können, liegen nur wenige Beobachtungen vor, die weder zu einer Bestätigung noch Verfeinerung der Theorie ausreichen; ich habe daher die frühere PS-Kurve unverändert beibehalten.

eL. Die Laufzeit für das Auftauchen (e = emersio) der langen Wellen (L = longae undae) oder Oberflächenwellen ist bekannt und bietet weiter kein Interesse.

M. Die Maximalbewegung ist der Zeit nach naturgemäß nicht so scharf definiert, wie die übrigen Phasen; je weiter der Herd entfernt ist, umso stärker zieht sich auch die Maximalbewegung auseinander, so daß sie oft nur auf halbe Stunden angegeben werden kann. Um diesem Vorgang gerecht zu werden, und um eine Überfüllung der Laufzeittafel zu vermeiden, habe

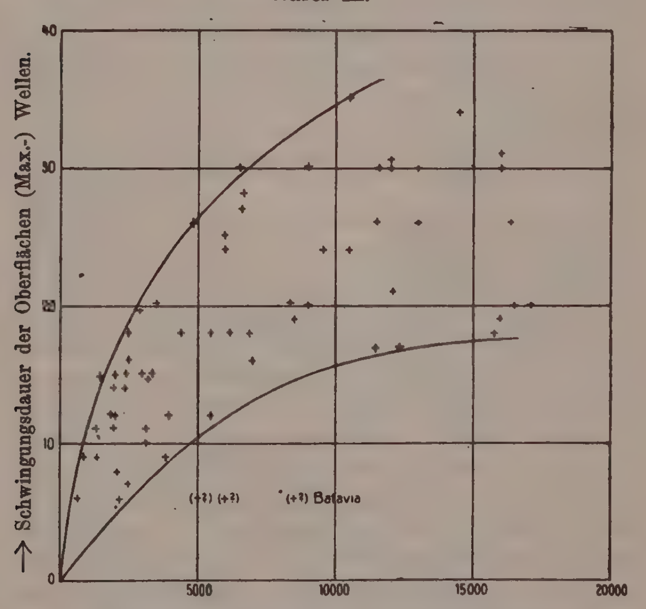
Tafel I.


120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Zeit in Minuten
Entfernung vom Bebenherd i. Megametern
Die Laufzeit
der
Oberflächen-(Maximal) Wellen.

ich die Laufzeit der Maximal- (Oberflächen) Wellen in einer besonderen kleinen Tafel (I) nebenstehend zusammengestellt.

Tafel II zeigt die Beziehungen, die zwischen den Schwingungsdauern der Maximalwellen und der Entfernung des Bebenherdes bestehen; je weiter der Bebenherd entfernt liegt, umso länger werden die Perioden der Maximalbewegung. Anscheinend streben die Wellen eine bestimmte Maximalgeschwindigkeit von 20—30 Sekunden an. Diese scheint bei ca. 10000 km erreicht zu sein. Vielleicht hängt die Erhöhung der Periode auch mit der Ausbreitung


Tafel II.

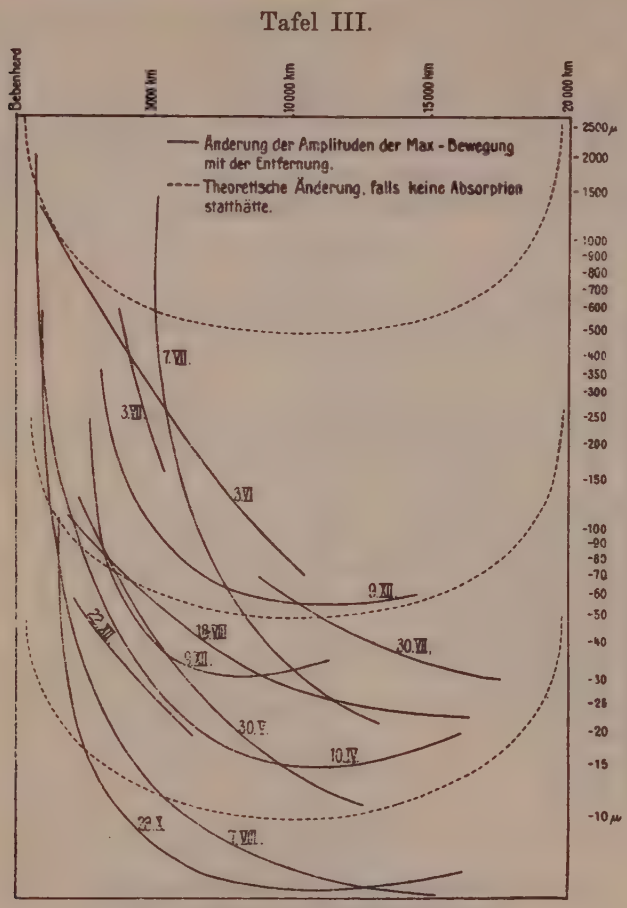


und Verflachung der Wellen zusammen, die bei 10000 km beendet ist. Für die Tafel II sind von den in der Laufzeitkurve vorhandenen Beben nur die des Jahres 1909 verwendet worden; diese Beschränkung empfahl sich aus Gründen der Übersichtlichkeit.

Sicherlich werden die langen Wellen verschieden ausfallen, je nach der Lage des Herdes, ihrer Bahn und vielleicht auch der Form des Bebens. Diese Unterschiede werden entstellt durch das launische Verhalten der Instrumente, die mit der Temperatur und unperiodisch durch Zufälligkeiten ihre Empfindlichkeit und ihre Eigenschwingung ändern; ja, in vielen Fällen wird die Ver-

schiedenheit der Schwingungsdauer nur auf Unterschieden im Zustande der Instrumente beruhen.

Tafel III.



Die Amplituden der Maximalbewegung.

Die Größe der Maximalbewegung an einem Ort wird einmal durch die ursprüngliche Bodenbewegung am Bebenherd oder irgend einen ihm näher gelegenen Ort bestimmt, ferner durch die Ausbreitung der Wellen auf der Erdoberfläche, und endlich durch die Absorption.

Während sich die Amplituden für die ersten beiden Bedingungen leicht vorausbestimmen bezw. vergleichen lassen, macht der dritte Faktor, die Absorption, Schwierigkeiten.

Angenheister (seism. Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905, Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wiss. z. Göttingen, math.-phys. Klasse 1906) hat für einen einzelnen Fall die Absorption bestimmt; er maß die Abnahme der Amplitude, die zwischen den auf dem kürzesten und dem längeren Wege eintreffenden Maximalwellen eintritt.

Tafel III enthält gestrichelt die theoretischen Kurven, mit welchen die Wellenhöhe (Ordinate) bei wachsender Entfernung vom Bebenherd (Abscisse) abnehmen würde wegen Ausbreitung, wenn keine Absorption und keine Änderung der Form der Welle stattfände. Die dicken Kurven geben die tatsächlichen Beobachtungen der in den Laufzeitkurven verarbeiteten Beben des Jahres 1909 wieder. Von einer Verwendung des ganzen Materials der 2 Jahre wurde wiederum aus Rücksicht auf die Uebersichtlichkeit abgesehen. Wir bemerken unter den Kurven solche mit rascher Abnahme der Amplitude, und mit recht langsamer, mit allen Übergängen dazwischen.

Die Kurven sind ausgeglichen unter der Annahme, daß nur innerhalb gewisser Grenzen die experimentelle Bestimmung der Maximalamplitude am Instrument richtig sein kann. Aber auch unter der Annahme häufiger und grober Versehen in den Maximalbewegungen bleibt die bemerkenswerte Verschiedenheit in dem Abfall der Kurven bestehen. Sie zeigt, daß die Absorption von Beben zu Beben verschieden ist und zwar unabhängig von der ursprünglichen Amplitude. Vielleicht ist eher die Dauer ausschlaggebend, und vermutlich auch die ursprünglichen Schwingungsperioden der Wellen.

Angenheister (l. c.) versucht hypothetisch, die langen Wellen, die die Maximalbewegung in großen Entfernungen tragen, bereits bei den Registrierungen solcher Stationen nachzuweisen, die dem Bebenherd benachbart liegen. Tafel II scheint indessen zu zeigen, daß sich die Maximalamplitude mit zunehmender Entfernung vom Bebenherd nach immer größeren Wellenlängen hin verlagert. Hieraus dürfte folgen, daß die Maximalbewegung in verschiedenen Entfernungen vom Herde entweder überhaupt von Wellen verschiedener Länge getragen wird, sich also verlagert, oder daß die Wellen selbst sich allmählich umformen.

Letzteres würde den Erfahrungstatsachen über die Meereswellen gut entsprechen, die ebenfalls, je weiter sie sich vom Erzeugungsort entfernen, umso länger und flacher werden. Auch ihre Höhe (Amplitude) und Länge hängt nicht nur von der ursprünglichen Höhe und der Entfernung vom Erzeugungsort ab, sondern auch

von der Höhe derjenigen Wellen, die zwischen der Welle und ihrem Erzeugungsort zur Zeit der Beobachtung vorhanden sind, und Energie nachführen. Wahrscheinlich wird daher auch bei den seismischen Oberflächenwellen die Absorption von der Dauer der Erregung abhängen. Auch wird es sich empfehlen, bei der Frage der Absorption die Umwandlung der Wellenform zu berücksichtigen.

3. Schlussbetrachtung.

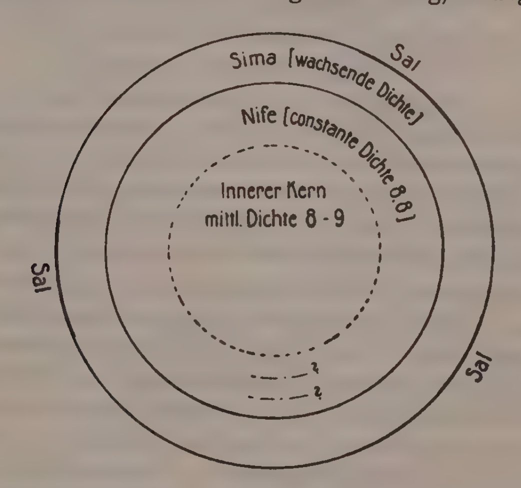
Einen Schluß auf das Erdinnere können wir nur aus dem Verhalten der sogenannten Vorläufer *P*, *S*, und ihrer Reflectionen ziehen, da die Hauptwellen oder Maximalwellen eines Bebens Rayleigh- oder Oberflächenwellen sind, und in das Innere der Erde nicht hinabtauchen.

Allgemein nehmen wir an, daß die Krümmung der Laufzeitkurve von *P* und *S* daher rührt, daß diese Wellen beim tieferen Hinabtauchen in das Erdinnere dichtere Schichten gefunden haben. Ebenso würden wir aus einer Abnahme der Geschwindigkeit von *P* und *S* auf eine Abnahme der Dichte schließen. Stets aber muß Anwachsen und Abnahme der Geschwindigkeit bei *P* und *S* zugleich und in gleichem Sinne eintreten, wenn wir von der Laufzeit auf das Erdinnere schließen wollen, da wir von der Annahme ausgehen, daß die Wege von *P* und *S* die gleichen, und nur die Geschwindigkeiten verschieden sind.

Diese Forderung einer gleichzeitigen Änderung der Laufzeit in gleichem Sinne sehen wir bei *P* und *S* erfüllt an zwei Punkten: Bei 4500 km, wo die bis dahin dauernd wachsende Geschwindigkeit von *P* und *S* einen mittleren konstanten Wert bekommt, und bei 10000 km, wo *P* und *S* verschwinden. Wir bemerken aber außer diesen gleichzeitigen Änderungen der Laufzeit von *P* und *S* auch solche, die teilweise superponiert über den Spuren der ersteren auftreten und bei *P* und *S* entgegengesetzt verlaufen. So bemerken wir, daß zwar, wie Wiechert dies bereits früher fand, bei 4500 km die Laufzeiten für *P* und *S* merklich eine Gerade werden, daß aber zunächst bei 4500 km die Kurven *P* und *S* in entgegengesetzter Richtung von der Geraden abbiegen, erst bei 7000 km diese wieder erreichen, um hier, an einer Stelle, wo keine übereinstimmende Änderung der Geschwindigkeit, also keine Dichtigkeitsänderung im Erdinnern eintritt, wieder in entgegengesetzter Richtung, *P* nach oben, *S* nach unten, sich von der Geraden fortzubewegen, und das Zurückkehren auf die Gerade

und das Fortschnellen von derselben bei 8600 km nochmals zu wiederholen.

Dieses dreimalige bei *P* und *S* entgegengesetzte Ab- und Zurückbiegen der Laufzeitkurven von der Geraden ist in höchstem Maße merkwürdig und bedarf noch der Bestätigung und Aufklärung. Es ist zwar nicht ganz ausgeschlossen, daß in der Tat, wie Geiger und Gutenberg dies zu glauben scheinen, mehrere Schichtgrenzen infolge schalenförmiger Anordnung des Erdinnern vorhanden sind. Man könnte dann an Beugung der Wellen oder an eine Änderung des Verhältnisses Linear- zu Form-Elastizität an diesen Schichtgrenzen denken. Die Annahme mehrerer selbständiger Schalen ist aber schon aus geologischen Gründen nicht sehr plausibel, da man wohl mehr als einen gewichtigen Grund für die bekannte von Wiechert nachgewiesene Schichtung bei 1500 km Tiefe kennt, aber wenigstens zur Zeit keine derartige Erklärung für eine Schichtung innerhalb des Stahlkerns anzugeben vermag, solange durch die



Laufzeiten von *P* und *S* nicht zugleich Änderungen der Dichte angegeben werden. Plausibler wäre vielleicht die Annahme von Interferenz-Erscheinungen. Hierfür würde der Umstand sprechen, daß die Rückkehr zur normalen (geraden) Laufzeitkurve und ebenso die maximalen Abweichungen in so regelmäßigen Abständen an der Erdoberfläche auftreten. Die Differenz zwischen 4500, 7000 und 9500 km, an welchen Punkten die frühere Laufzeitkurve wieder erreicht wird, ist ja konstant = 2500.

Ich möchte daher das Bild der Erdschichtung vorsichtig abwägend einstweilen nur zu der vorstehenden kleinen Skizze zusammenfassen.

A. Die oberste Gesteinskruste der Erde, in der wir zunehmende Dichte nach innen finden, ist von Süß nach ihren karakteristischen Merkmalen Silicium und Magnesium *Sima* genannt worden. Auf ihr schwimmen die Kontinentalschollen, nach ihren karakteristischen Materialien Silicium und Aluminium von Süß als *Sal* bezeichnet.

B. In 1500 km Tiefe beginnt dann der von Wiechert zuerst nachgewiesene Metallkern der Erde, den Süß nach seinen wahrscheinlichen karakteristischen Materialien Nickel und Ferrum *Nife* benennt, mit nahezu konstanter oder langsam zunehmender Dichte.

C. Es muß als möglich, wenn auch nicht als wahrscheinlich bezeichnet werden, daß der von Wiechert nachgewiesene *Nife*-Kern schalenförmig unterteilt ist. Nach der Geiger und Gutenbergschen Arbeit wäre dies der Fall, und aus der neuen Laufzeitkurve könnte man eine Bestätigung hierfür entnehmen: eine Erklärung für diese merkwürdige Schichtung, falls sie überhaupt vorhanden ist, läßt sich indessen nicht angeben, und eine Reihe gewichtiger Gründe spricht einstweilen gegen sie.

D. In ca. 3000 km Tiefe liegt möglicherweise ein weiterer Kern. Man darf vermuten, sofern nicht der innerste Kern überhaupt aus anderem Material von sehr viel größerer Dichte und geringerem Elastizitätskoeffizienten besteht als *Nife*, daß die Erklärung für sein Verhalten gegenüber den Erdbebenwellen in Temperatur und Druckverhältnissen zu suchen ist.

E. Endlich muß auf die Möglichkeit hingewiesen werden, daß die Wellen bereits in den *Nife*-Kern gar nicht hineindringen, und daß die Laufzeitkurve von P und S oberhalb 4500 km nur noch auf Reflections- und Interferenz-Erscheinungen beruht, so daß also auch das Verschwinden von P und S bei 10300 km nicht auf der Konstitution des Erdinnern zu beruhen braucht. In diesem Fall dürften wir aus der Geradlinigkeit der Laufzeitkurve von 4500—10300 nicht auf Konstanz der Dichte nach der Tiefe des Erdinnern zu schließen, sondern nur auf die tatsächlich allerdings nicht völlig vorhandene Konstanz der Wellengeschwindigkeit an der Oberfläche der *Nife*-Kugel. Die einzigen Wellen, die uns über das Innere der *Nife*-Kugel dann Aufschluß gäben, wären die bei 12000 km wieder auftauchenden. Unter der Annahme fertgesetzter Beugung würden wir dann Abnahme der Dichte nach dem Innern erhalten; das würde unseren Vorstellungen über die ordnende Kraft der Schwere widersprechen, und im Widerspruch stehen mit den Messungen der Gesamtmasse der Erde, die auf eine mittlere Dichtig-

keit des gesamten innersten und *Nife*-Kerns von ca. 8—9 bezogen auf Wasser schließen lassen.

Nehmen wir aber an, daß die den großen Entfernungen zustrebenden, immer steiler einfallenden Wellen auch immer weniger gebeugt werden, und daß in dichteren Massen im Innern ihre Fortbewegung immer mehr verzögert wird, so ist ein wichtiger Einwand dagegen, daß die bei 12000 km auftauchenden Wellen die ersten überhaupt sind, die den Stahlkern passiert haben, offenbar hinfällig. Zoeppritz hat übrigens (diese Zeitschr. V, über Erdbebenwellen, S. 125) für die *P*-Wellen bei 12000 km unter seinen 6 verschiedenen Annahmen 1103—1148^{sek} als Laufzeit berechnet, während sich diese für unsern Beobachtungshaufen bei 12000 nur wenig verschieden von seiner letzten Zahl zu 1170^{sek} ergibt.

Die Elastizitätstheorie lehrt über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_P der Longitudinalwellen:

v_P^2 = Coeff. der Linearelastizität : Dichte

und über die Fortpflanzung v_s der Transversalwellen:

v_s^2 = Coeff. der Formelastizität : Dichte.

Es ist vielleicht nützlich, sich zu vergegenwärtigen, daß wir stets über eine der 3 Unbekannten rechts in diesen 2 Gleichungen mehr oder weniger willkürliche Annahmen machen müssen, um ein Resultat über das Erdinnere zu erhalten; und daß wir hierbei v_P und v_s nur unter bestimmten Annahmen über den wahrscheinlichsten Weg der Erdbebenwellen aus der beobachteten Laufzeit berechnet haben. Um so mehr wird es notwendig, sich auf die aus allgemeinen Gründen wahrscheinlichsten Annahmen zu beschränken.

Wir kommen also zu dem Schluß; daß die Annahmen C, D und E noch nicht als gesichert betrachtet werden können, und daß einstweilen nur A und B unsern physikalischen Vorstellungen genügen.

Die Weltbeben des Jahres 1909.

10. April 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia Samoa-Observatorium.	IIv	Pi	5 27.9	ca. 0.1	(900)	(700)	2500	Horizontalpendel fällt um. EW fehlen $3\frac{1}{2}$, bei Z 4 Minu NS kommt nicht wieder in G Dem Gefühl nach erfolgen nächst ziemlich gleichmäßige brationen, die das Wohnhau lange ruhige Schwingungen setzen. Nach ca. $\frac{1}{2}$ Minute sprunghaft Zunahme der B gung ein. Nach Angaben Gouvernements war das B das bisher schwerste in Sa Herd vermutlich 2—300 km lich.
			5 37.8		500	—	400	EW und Z mit starker Reib
		f	6 47.8					Wiederkehr oder schwa neues Beben. Beide Pendel h Reibung, so daß nur die Ze sicher sind.
		eL	8 59.2					
		M	59.7	?	30	—	10	
		f	9 7.0					
Sidney River view-College d. Jesuiten.	IIr	P	5 34 23	5	2	1		Ep = 4400 km.
		PR_1	35 52	5	9	7		
		(S)	40.5	(11)				
		iL	43.0					
		M (N)	43 16	13		$72\frac{1}{2}$		
		M (E_1)	48 40	13	38			
		M (E_2)	54 44	15	64			
		f	7 5					
Batavia Java	IIu	eP	5 39.4					Nach der Laufzeitkurve er sich die Herddistanz hiernach
		eS	49.2					P-S = 8500 km
		L	6 1	20				P-L = 8000 km
		M	9	20	15	15		P-M = 8500 km
		f	52					wirkliche Herddistanz: 9000
Göttingen Geophysikal. Institut.	Iu	P	5 46.8	4	0.9	3	4	
		e	6 $1\frac{1}{2}$	9	0.7	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	
		e	$8\frac{1}{2}$	18	3	$3\frac{1}{2}$	3	
		eL	29	—	—	—	—	
		M	$53\frac{1}{2}$	18	23	20	23	
		—	7 27	18	$5\frac{1}{2}$	7	10	
		f						Fällt in den Papierwechsel.

Die ziemlich hohen Angaben für die Maximalbewegung lassen es bei Göttingen nicht ausgeschlossen erscheinen, daß dort die ganze Amplitude angegeben wurde. Die Zahlen der Bodenbewegung wären in diesem Fall durch 2 zu dividieren, wenn man sie mit denen der andern Stationen vergleichbar machen wollte.

In der Tabelle III sind die Verhältnissc der Wellenhöhen an zwei Stationen unter der Voraussetzung mitgeteilt, daß keine Absorption stattfände.

Dann wäre die Bodenbewegung in

Apia	3000 μ;	beobachtet sind ca. 3000
Sidney	72	65
Batavia	57	15
Göttingen	72	21

Die Wiederkehr der Wellen. Die fraglichen Wellen treffen am Bebenort ein um $8^h\,59.7^m$, sie sind, falls es sich um wiederkehrende Wellen handelt, zum erstenmal passiert um $5^h\,27.5$.

Demnach ist die Laufzeit $3^h\,32.2^m$.

Als Laufgeschwindigkeit $v_{(w)}$ ergibt sich demnach

$$\frac{40\,000 \text{ km}}{(3^h\,32.2^m)} = 3.15 \frac{\text{km}}{\text{Sekunde}}.$$

Bei der Rückkehr des Bebens zum Epizentrum soll die Amplitude $^1/_{490}$ nach Angenheister der ursprünglichen Größe sein, wenn sich die Form der Welle nicht geändert hat. Das wäre in unserm Fall unter der Voraussetzung, daß am Bebenherd 3000 μ vorhanden waren, 6 μ. Die beobachtete Amplitude war 30 μ, also erheblich anders, allerdings kann auch die anfängliche Maximalbewegung gut 3 fach so groß gewesen sein, als angenommen wurde.

Die Größe der Erdbodenbewegung spricht also nicht dafür, daß es sich um eine Wiederkehr des Bebens handelt.

Für die Wiederkehr hingegen spricht der Umstand, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen so gut mit den bisherigen Erfahrungen übereinstimmt.

Es scheint endlich nicht ausgeschlossen, daß die wiederkehrenden Wellen selbst nicht beobachtet wurden, aber ein zweites kleines Beben auslösten.

12. April 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	Ir	eP	1 8.5					DieDistanzberechnung ausl
		M	1 17.5	10	20	—	—	ergibt 3100 km.
		f	1 30					
Sidney	Ir	P	1 9.6	5	2½			Die Distanzberechnung e
		L	13.7	7				aus P—L 2100
		M_1	14.7	7		14		[P—M_2 3400]
		M_2	19.4	10	17	46		P—M_1 2100
		f	2 50					

Der Herd liegt wahrscheinlich in der Nähe der Salomons- oder Neue Hebriden-Gruppe.

27. April 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
Manila		P	12 48.9					Distanz aus
		S	59.5					P—S 9600 km
		eL	13 10.0					P—eL 7800
		M	12					S—eL 7200
		f	14 30					M—P 6900
								M—S 6200
Sidney	IIIr	eP	12 49.2	4½				Ep = 3500 km
		S	54 16	5½	6½			(Probably NW New-Guin
		eL	13 0.9	11				felt by Mr. A. E. C. Lyall at Ma
		M_1	1.9	9	145	170		St. Davids Islands (NW—
		M (N_2)	3 30	9		200		Guinea).
		M (E_2)	5 43	8	128			Distanz aus
		c	35	10				P—S 3400
		f	14 50					P—M 4800
Batavia	IIv	iP	12 50.5					Distanz aus
		iS	51.5	6				P—S 600 km
		M_1	52					P—M 800
		M_2	13 2	13	60	66		P—L 4000
		L	—	21	181	177		S—M 1600
		f	14 52					S—L 3700

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIr	P	12. 51.1	6	—	—	—	Z und EW haben Reibung.
				1	—	5	—	
		e	12 54.3	16	—	10	—	(PR_1 ?).
		eL	13 0	20	—	—	—	Distanz aus P—eL 3900 km
		M	13 6—15m	20—30	—	40	—	$P—M_1$ 6000
		f	14 0					
Göttingen	Iu	eP	13 2.8	4	$2^1/_4$	$1^1/_4$	2	Distanz aus P—S 8500
		PR_1	5.6	6	$1^1/_2$	0.9	0.9	P—eL 11000
		S	12.6	18	$6^1/_2$	8	8	P—M > 14000
		eSR_1	18.8	30	15	20	8	S—eL 12000
		eL	35	—	—	—	—	S—M > 14000
		M	53	24	30	45	55	
		f	16					

Wäre die Annahme von Sidney über den Bebenherd richtig, so würden wir aus den Beobachtungen der einzelnen Stationen als Bebenzeit erhalten nach den Laufzeitkurven

Manila	45.5^m
Batavia	46.2
Sidney	43.2
Samoa	41.9
Göttingen	46.

Die Geschwindigkeit der *P*-Wellen beträgt ca. 11 $\frac{\text{km}}{\text{sek.}}$ oder 660 $\frac{\text{km}}{\text{Minute}}$; die Zahlen weisen auf einen Bebenherd, der erheblich östlich gelegen ist. Für Shouten Insel an der Nordküste von Kaiser Wilhelmsland finden wir für alle Stationen mit Ausnahme von Manila als Bebenzeit ca. **43.0^m**.

Die Amplituden der Maximalbewegung verhalten sich in Batavia und Sidney nahe wie 1 : 1; d. h. das Beben sollte von beiden Stationen ungefähr gleich weit entfernt sein; in Samoa und Sidney dagegen wie 1 : 4. Offenbar sind die Ausschläge in Apia zu klein, und das Instrument nicht in Ordnung.

Der Verlauf des Bebens ist an allen Stationen ein wenig normaler, wie die aus den Laufzeitkurven entnommenen Distanzbestimmungen mit Hülfe der Phasenangaben Differenz *P—S*, etc. illustrieren.

Auch das dürftige Resultat, das der Mitteilung für wert erachtet ward, ist nur möglich unter der Annahme, daß in Manila ein Zeitfehler vorliegt; solche sind indessen wohl an keiner Station, zumal bei den provisorischen Wochenberichten, und angesichts der großen Zahlenreihen, ganz ausgeschlossen.

2. Mai 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIr	P	7 0 58	5	5	5	25	Distanz aus P—M = 2000
		S	4.0	7	15	15	—	P—S = 2000
		eL	5.0					
		M	6.0	15	50	50		Kaum merklich.
		f	40					
Sidney	IIr	P	7 1 42	$4^1/_2$				Ep. 2500.
		S	5 45					Distanz aus P—S = 2600
			5 53	7				P—e = 2700
		eL	7.5	7	50	31		P—eL = 2800
		M	9 23					P—M = 2900
		f	8 20					
Batavia	IIu	P	7 6 28	6				
		iR	11 24	6	23	14		[Distanz aus P—M = 3200
		iS, M	14 43	6	48	22		
		f	48	Wellen von 27 Sek.				
Manila		P	7 15.0					
		f	7 55.0					

Setzen wir $v_{(P)}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ersten Wellen $= 11 \frac{\text{km}}{\text{Sek.}}$, so ergibt eine einfache Ueberlegung, daß Manila 5000 km weiter vom Bebenherd entfernt sein müßte als Batavia. Das ist unmöglich, aus Rücksicht auf die Beobachtungen von Apia und Sidney. Allem Anschein nach sind die gleichen Bewegungen, die in Batavia als *iS, M* bezeichnet wurden, in Manila als *P* angesprochen worden.

Die Beobachtungen von Samoa und Sidney ergeben ziemlich sicher, daß der Herd etwa 500 km östlich von Neu-Kaledonien gelegen ist.

Als Zeit des Bebens erhalten wir
6 56^m 20^s nach den Beobachtungen von Apia
6 56^m 20^s „ „ „ „ Sidney.

26. Mai 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Manila		P	2 8.9					Distanz aus P—S 5700
		S	16.3					P—eL 5200
		eL	22.0					P—M 4600
		M	23.2					S—M 4400
		f	3 49					
Sidney	IIr	eP	2 9.2	$2^1/_2$				Ep = 5600 km (?)
		(S)	16 27	10		17		
		eL	21.0					
		M_{N1}	23 33	14		131		
		M_Z	24 28	13			73	
		M_{N2}	25 13	13		111		
		f	4 0					
Batavia	Iv	P	2 10 12					Distanz aus P—S 700 km
		S	11 42					P—M 4000
		M	22	7.5	13	19		S—M 3500
		f	3 10					
Apia	Ir	L	2 18 bis 20					
		M		10	10	10		

Nach dem Verhältnis der Amplituden der Maximalbewegung zu schließen, sollte der Herd des Bebens erheblich näher an Sidney liegen als an Batavia, und von Samoa noch weiter entfernt sein. Die ersten Wellen treffen in Batavia 1 Min. später ein als in Sidney; demnach sollte der Herd des Bebens rund 600 km von Batavia weiter entfernt sein als von Sidney, eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von rund 10 $\frac{km}{sek.}$ der ersten Wellen vorausgesetzt. Das würde mit den Amplituden nicht übereinstimmen, deren Diskussion einen Unterschied der Herddistanz von mehreren 1000 km wahrscheinlich macht. Andrerseits erhebt Manila durch seine Zeitangaben Anspruch darauf, dem Bebenherd am nächsten zu sein;

da nun auch die Aufzeichnungen in Samoa nur dürftig sind, schien es empfehlenswert, auf eine Diskussion des Bebens angesichts des offenbaren inneren Widerspruchs der Aufzeichnungen bezw. ihrer Deutungen zu verzichten. Worauf dieser Widerspruch beruht, ob vielleicht ein Versehen in Bezug auf die Zeit vorliegt, oder ob ein zweites Beben seine Aufzeichnungen über die des ersten gelagert hat, läßt sich nicht auf Grund des vorliegenden Materials erkennen.

30. Mai 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Batavia	IIIr	iP	21 6 18					In der Nähe von Ambon (2200km)
		M	21 12	6.5	101	161		
		f	22 12					
Manila		P	21 6 30					
		f	22 12					
Sidney	IIr	eP	21 7.8	2½	½	½		Ep 3400 km
			8 10	5	2½	2		
		PR₁	9 47	5	4	5½		
		S	13 1	8	16	8½		
		eL	16.6					
		M	19 32	15	402	456		
		f	23 0					
Apia	IIu	P	(21 0 56)	3	6	6	6	Die eingeklammerten, ursprünglich mitgeteilten Zahlen sind offenbar falsch. Der Mechaniker hat beim Bogenwechsel die Uhr um 10 Min. falsch abgelesen, eine zweite Ablesung fehlte auf der Kurve, weil die Uhr stehen geblieben war.
			10 56					
		eL	(9)					
			19					
		M	21 (16)					
			26					
				30	30	30		Distanz aus P—eL 3900
		f	23					P—M 5000
Göttingen	Iu	P	21 20 11	1	0.9	0.7	0.3	Distanz aus P—S 9000
		eS	30½	17	5	4	5½	P—eL 10000
		SR₁	37.6	17	3	3	5½	P—M 13000
		eL	48					
		M	22 11	21	10	6	12	
		f	23 40					

Nach den Registrierungen von Batavia und den Laufzeitkurven fand das Beben statt um $21^h\ 1^m\ 28^{sek.}$. Der Herd liegt wahrscheinlich 500 km östlich von Timor.

Unter der Voraussetzung dieses Herdes ist die Herddistanz, an der Erdoberfläche gemessen:

bei Batavia	2200	km
Manila	2500	„
Sidney	3400	„
Samoa	6500	„
Göttingen	12200	„

Die Maximalbewegungen sind nicht unbedingt vergleichbar. Nehmen wir an, daß Batavia richtig ist, so erhalten wir aus der Tabelle am Schluß:

	beobachtet	ohne Absorption
Batavia	(120 μ)	(ca. 120 μ)
Sidney	100	400 (!)
Samoa	65	30
Göttingen	61	10

Sidney fällt aus dieser sonst nicht unwahrscheinlichen Reihe ganz heraus, vielleicht hat es die volle Amplitude = 2A mitgeteilt.

3. Juni 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Batavia	IIIv	eP	18 42 18					Verheerendes Beben in Korintji, (Sumatra), 750kmNW vonBatavia. Bedeutender Schaden; 200 Menschen getötet.
		iS	43 18					
		M		6	1340			
		f						
Manila		P	18 46 20					Herddistanz aus P—S 3500
		S	18 50 25					P—eL 3500
		eL	54 05					P—M 3000
		M	55	sehr	groß			
		f	21 02					
Sidney	IIIr	iP	18 50 20	5	3	1		6000 km
		SR_1	57 58	8	6	5 1/4		The „Sumatra“ earthquake, but epicentre probably submarine, at a considerable distance NW from the island.
		eL	19 2.2					Herddistanz aus P—SR_1 3800
		$M_{(N)}$	15 14	11		92		P—(S) 6000.
		$M_{(E)}$	16.0	17	322			
		$M_{(Z)}$	16 16	18		155		
		f	22 5					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIu	P?	18 53 26?	1.0	—	—		Sehr unsicher.
		Si	19 3 56	13.1	10	10		Gut erkennbarer Einsatz.
		PS	fehlt					
		PR₁?	8½	15	15	15		Als Phaseneinsatz ist, mit g[e-] nauer Zeit — wie bereits i[m] Wochenbericht mitgeteilt wurd[e] — nur S zu erkennen.
		eL	14					
		M	24	25	30	30		
			28	15	15	15		Vorübergehend.
				25	60	60		
			40	30	50	50		
			48	15	15	15		
				30	50	50		
		f	20 50					
Göttingen	IIu	P	18 53 58	4	0.9	0.6	2¼	Reißen.
		iS	19 5 3	9	7½	30	6	Setzt allmählich ein.
		SR₁	11.8	19	15	25	20	Herd 10 100 km.
		eL	18					
		M₁	26	46	85	200	80	
		M₂	31	35	150	180	100	
		M₃	37	24	60	200	55	
		M₄	44	16	90	120	65	
		M₅	47	20	100	110	120	
		M₆	49	14	40	55	70	
		M rep.	20 58	21	12	5	17	
		f	22½					

Die Entfernung des Bebenherdes von Batavia ergibt sich aus P—S zu 500 km.

Die Entfernungen des Herdes sind, auf der Erdoberfläche gemessen, bis

Batavia	500 km	rund
Manila	2700	„
Sidney	5500	„
Göttingen	10500	„

Das Beben fand statt, wobei wir die Angaben über P von Batavia und Manila an der Hand der Laufzeitkurve für den Bebenherd anwenden, nach Batavia um $18^h 40^m 48^s$

Manila um 18 40 50,

es wird mit einer Bebenzeit von 18^h 40.8^m gerechnet.

Hiernach ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die Laufzeitkurve für P in diesen Teilen noch genau ist, als Herddistanz

6000 km von Sidney, während die wirkliche Entfernung, wenn wir die Angaben von Batavia und Manila zu Grunde legen, 5000 km beträgt. Wir haben also die zwei Möglichkeiten, entweder die Zeit- und Herdbestimmungen von Batavia, oder die Zeiten von Sidney (letztere um 1 Minute) für falsch zu halten. Ohne genaueres angeben zu können, möchte ich nur bemerken, daß S bei Samoa sehr deutlich ist und Uebereinstimmung mit den Angaben von Batavia und Manila aufweist, während, wenn die Sidneyer Herdannahmen richtig sein sollten, auch Samoa falsche Zeitangaben haben müßte. Da eine genaue Revision nichts Verdächtiges ergab, wurde bei Sidney ein Zeitfehler von 1 Minute angenommen, und die Angaben von Batavia für richtig gehalten.

Bemerkenswert sind die Aufzeichnungen der Amplituden.

Beobachtet wurden:

	beobachtet	ohne Absorption
Batavia	1340 μ,	[1340]
Sidney	2—300	460
Samoa	60	340
Göttingen	150	390.

Bei Göttingen ist vermutlich 2A statt A angegeben.

8. Juni 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Apia	IIbis	P	—					Beben zerstörend in Copiapo (Chili). Herddistanz 10500
	IIIu	PR_1	6 3.5	—	—	—		
		S	10.1	9	1	1		Kaum erkennbar.
		i	13.5	6	1	1		
		eL	30	—				
		M_1	31	24	60	60	—	
		M_2	49	15	20	20		
		f	8					
Göttingen	IIu	eP	6 0.8	6	0.6	—	0.4	P fällt in die Stundenmarke.
		e(PR_1)	5.0	(6)	($2^1/_2$)	(1)	(1)	
		eS	11.4	10	$4^1/_2$	2	0.9	Herddistanz aus P—S 10500
		i	14 37	21	30	12	12	P—eL 12000
		eL	34					P—M 12000
		M_1	$41^1/_2$	30	180	80	150	
		M_2	44	22	120	70	130	Wirkliche Distanz 11500
		M_3	49	19	100	65	100	
		f						Fällt in den Papierwechsel.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sidney	IIIu	eP	6 5.7	5	1	1		Herddistanz aus
		(PR_1)	11 27	9		1½		$P—PR_1$ = 15000
		(S)	20 27	12	5	4¼		P—S = 1600(
		(eL)	37,0					P—eL = 1100(
		M	43 47	17	29	9½		P—M = 1100(
		f	8 25					wirkl. Herddist. = 12300
Batavia	IIu	P	6 6 13					In Chili.
		M	8					Herddistanz aus
		L	37	6	19	21		P—L 11000
		Me	7 37					P—M ca. 15000
		f	8 12	26	32	35		wirkliche Herddist. 16
Manila		P	6 06 47					
		f	8 25					Wirkliche Herddistanz 185(

P scheint nur von Göttingen aufgezeichnet zu sein; die in Sidney, Batavia, Manila und in den Wochenberichten auch bei Apia angegebene, als P angesprochenen Punkte entsprechen ganz offenbar dem e (PR_1) von Göttingen.

	P	PR_1	S	M	
Samoa	—	3.5^m	10.1^m	31^m	
Göttingen	0.8^m	5.0	11.4	41	
Sidney	—	5.7	11.5	44	$+ 6^h$
Batavia	—	6.2	—	90	
Manila	—	6.7	—	—	

Die Laufzeit für PR_1 beträgt:

Samoa 17.4^m
Göttingen 18.5
Sidney 19.4

Die Zeit des Bebens ist hiernach $5^h\ 45.9^m$, 46.5, 46.3 } Mittel $5^h\ 46.^m2$.

Die beobachteten Maximalbewegungen waren abgerundet folgende:

	beobachtet	ohne Absorption
Apia	60	(60)
Göttingen	150	69
Sidney	20	62
Batavia	30	80

Die Zahlen erwecken den Eindruck, als ob in Göttingen mit A nicht der Ausschlag von der Ruhelage ab, sondern die ganze Amplitude 2A gemessen sei.

27. Juni 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
Apia	IIr	P	7 19 38					Am Horizontalseismographen wird zur Zeit des Bebens gearbeitet.
		PR₁	19 58	6		—	20 Minimum	
		S	23.2					
		eL	23.9					
		M_1	24.9	21 6			25 20	
		M_2	27	12 6			20 —	
		M_3	30.5	12 6			20 0	
		M_4	33.0	12 6			10 20	
		M_5	34	12 6			15 2	Herddistanz 2000
		fz	8 5					
Sidney	IIr	iP	7 20 21	4				
			20 35	4	13	12		
		L	24 33	8				
		M	24 45	8	87	104		
			30 45	14	57	92		Herddistanz 2300
		c	37.5	9		13		
		f	9 5					
Batavia	IIu	iP	7 25 23					Herddistanz P — S = 6200
		PR_1	29 26					P — L = 5800
		iS	33 27					P — M = 8500
		L	40					wirkliche Herddistanz 6200
		M_2	54	18	25	18		
		f	8 33					
Manila		P	7 25 55					Herddistanz 6300
		S	26 28					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
		eL	7 28.0					
		M	33					klein
		f	8 30					
Hamburg	Iu	e	7 34 27					wirkliche Herddistanz 16000 km
		i	38 20	9	6	18		
		eL	8 17					
		M_E	29.6	30	25	—		
		M_N	33.6	22		40		
		f	10 2					

Der Herd des Bebens liegt wahrscheinlich östlich von Neukaledonien. Das Beben fand statt um $7^h 15.1^m$.

Die maximalen Amplituden sind folgende:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Apia	2100	(120)*	(120)
Sidney	2300	100	114
Batavia	6200	25	79
Hamburg	16000	30 (15?)	93.

*) Unter der nicht unbedenklichen Annahme, daß A Horizontal = 3 A_z ist.

7. Juli 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N		Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	z	
Hamburg		iP	21 45 46	8 / 6	100	110		4800 km. Gefühlt in Russisch Turkestan.
		PR_2	48 06	7		32		
		iS_N	52 11					
		SR_1'	55 22	16	290			
		L	58.0					
		M_1	22 0.4	26	1500			
		M_2	3.8	26	1600			
		f	1					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Manila		P	21 46 48					5500 km
		S	49 24					[wohl dieselbe Phase, die Hamburg als PR_1 bezeichnet]
		eL	53 10					
		M	54.0					groß
		f	23 35					
Batavia	IIIr	iP	21 46 51					Herd in Samarkand; 6000 km
		PR	51 50					
		S, M_E	54 6	6				
		M	56 16	6	130			
		L	22 1	24	94	84		
		f	23 11					
Sidney	IIIu	iP	21 48.8					Ep. = 11 500 km destruktive E.Q. in Kashmir
		e	54.9	3				
		iS	22 1.7	8	$3^3/_4$	$2^1/_2$		
		(PS)	2.6	8		$2^1/_2$		
		eL	9.7	12				
		M	10.2	12	$13^1/_2$	16		
		c	39.8	17	15			
		F	23 25					
Apia	IIIu	P	fehlt					13 000 km
		e(PR?)	21 56.0					abgesehen von PR_1 sind alle Vorläufer unkenntlich verstümmelt.
			22 2.5					
		eL	12.5					
		M_1	14.0	15	20	20		
		M_2	30	30	30	30		
		M_2	40	15	20	20		
		f	23 25					

Als Zeiten des Bebens erhalten wir

Hamburg $21^h 37^m 26^s$ } $21^h 37^m 27^s$
Manila 21 37 28 }

Die beobachteten Amplituden waren:

	beobachtet	ohne Absorption
Hamburg	1500 [750?]	1500
Batavia	120	1370
Sidney	15	1250
Apia	30	1370

Der Unterschied zwischen den infolge Absorption gemessenen und ohne Absorption berechneten Wellenhöhen ist diesmal besonders groß. Vielleicht ist in Hamburg 2 A statt A angegeben.

30. Juli 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIIu	P	11 3.8					(8600 km)
		S	15.1	11	4	4	—	
		SR_1	19.9	9	5	5		
		e	21.5					
		eL	28.0					
		M_1	30	19	35	60		
		M_2	50	17	40	80		
		f	12 32					
Göttingen	IIIu	P	11 4 49	9	$6^1/_2$	$3^1/_2$	20	[9600]
		PR_1	8 15	7	15	$5^1/_2$	25	
		S	15 29	14	35	18	20	
		PS	16 3	23	70	45	60	
		eSR_1	20.0	23	45	85	40	
		eSR_2	$25^1/_2$	21	30	20	35	
		eL	30	—	—	—	—	
		M_1	45	21	180	35	160	
		M_2	49	18	140	85	130	
		M_3	$59^1/_2$	24	170	50	170	
		M_4	12 2	18	120	50	130	
		M rep.	14 40	18	2	$1^1/_4$	3	
		F	$15^1/_2{}^h$					
Sidney	IIIu	iP	11 17 27	8	$5^1/_4$			(S vermutlich) Ep = 13000 km destructive E.A. in Mexiko (Chilpanzingo).
		PR_1	21 15	12	9			
		i	27 55	14	14			
		S	30 51	12	10			
		SR_1	35 51	18	29			
		eL	42 37	18	26			
			44.8	26	27			
			46.2	20	36			
		M_Z	12 3 30	18			$1^1/_4$	$1^1/_4$
		M_E	4 5	14	24			
		M_N	7 53	16		$16^1/_2$		
		c	16.6	14	14			
		f	13 45					
Batavia	IIu	P	11 11 38					Herd in Süd-Mexiko, verheerend [17200]
		M	12 30 43	20	29	39		
		f	13 27					

Nehmen wir an, daß die Laufzeitkurven bei 9600 km bei Göttingen noch richtig sind, so erhalten wir als Laufzeit für P

$$\begin{array}{r} 12^{m}55^{s} \\ 10^{h}64\ \ 49 \\ \hline \end{array}$$

Bebenzeit: $10^{h}51^{m}54^{s}$.

P für Apia ist hiermit übereinstimmend.

Die maximalen Amplituden sind folgende:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Apia	8600	70	70
Göttingen	9600	120	70
Sidney	13000	30	73
Batavia	17200	35	110

Bei Göttingen ist vermutlich 2 A angegeben statt A.

7. August 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit h m s		Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Apia	IIv	P	16 49.0	[52.7]	9	50	50	z fehlt	800—900 km. Südtonga oder Fiti.
		S?	50.0	[53.7]					
		M	51.0	[54.7]	9	250	400		
		f	18 50	[54]					
Sidney	Ir	eP	16 56.2		5	3/4			Ep = 3300 km.
		(S)	17 1 16		7	3			
		eL	6.3		14				
		$M_{(N)}$	7 29		11		11 1/2		
		$M_{(E)}$	10 12		15	19			
		f	18 20						
Batavia	I	P	17 1 36						8500
		S	9 47						
		M	12		5.5	7	5		
		f	25						
Göttingen	I	P	17 8 21		4	—	—	0.6	(16 000)
		ePR_1	11.6		6	0.3	0.6	0.7	
		eL	57						
		M	18 14		19	1 1/2	3	3 1/2	
		f	19						

In Samoa liegt ein Zeitfehler vor. Die 2 Ablesungen des Mechanikers beim Auflegen und Abnehmen der Kurven geben einen

um $4^m 20^s$ differierenden Wert. Diese Differenz wurde (fälschlich) in den Wochenberichten als Gang der Uhr betrachtet. Es ist indessen wahrscheinlich, daß die eine Ablesung nach einer unbekannten Uhr erfolgt ist. Auch die zweite Ablesung muß noch um 1 Min. falsch sein, wenn die Angaben mit denen von Batavia und Sidney übereinstimmen sollen.

Aus Batavia und Sidney ergibt sich als Bebenzeit

$16^h 49.9$ Sidney
49.6 Batavia

$16^h 49.7$; als Bebenherd Südtonga.

Die maximalen Amplituden ergeben:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Apia	900	300	(300)
Sidney	3300	20	156
Batavia	8500	6	110
Göttingen	16000	3	144

18. August 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit (h m s)	Periode (s)	A_E (μ)	A_N (μ)	A_Z (μ)	Bemerkungen
Apia	Ir	P	0 42.6	2	15	12		2000 km. z-Pendel zeigt parallelen Gang, A = ca. $^2/_3$ der Horizontalkomponente, Aufzeichnung verwischt.
		PR_1	42.9	2	12	12		
		PR_2	43.5	2 9	12	12		
		PR_3	43.8	5 2	20 	 10		
		e	44.6	2 6	 15	 15		
		S	46.6	6	36	50		
		M	47.6	12	60	150		
		f	1 56					
Sidney	IIr	iP	0 44 11	$3^1/_2$	41	16		Ep 2500 km.
			44 46	6		20		
		(S)	47 59	8	58	—		
			48 26	8	77			
		eL	50.2	16				
			50.2	18			77	
		M_N	52 18	11		76		
		M_E	55 44	10	31			
		f	2 5					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Manila		P	0 49 36					(6500 km)
		f	1 30.0					
Batavia	IIu	P	0 49 57					(6600)
		iS,M	58 24					
		L	1 5	{ 28 6.5	100	110		
		f	1 47					
Göttingen	Iu	P	0 59 8	5	2	1¹/₄	5¹/₂	(16000)
		PR_1	1 2.6	5	0.6	1¹/₄	1¹/₄	
		i(S)	9 19	5	1¹/₄	4	0.3	
		eL	44					
		M	55	31	15	30	40	
		f	3					
Ottawa, Canada	I	P	1 0 9					
		S	10 14					
		L	36					
		M	42	21	10			
		F	2 27					

Der Bebenherd liegt nordöstlich von Kaledonien. Als Bebenzeit ergibt sich aus Samoa $0^h 38.3^m$.

Die Amplituden ergeben:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Apia	2000	ca. 100	100
Sidney	2500	75	93
Batavia	6600	100 (50?)	63
Göttingen	16000	20	76

6. September 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sidney	Ir	P	14 38 53	4				Epcentro 3200 km.
		S	43 54	7	3			
		eL	45.9	11				
		M_N	47 53	(8)		(7)		
		M_E	49 59	11	13			
		f	15 20					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
Apia	Ir	L	14 50.7 bis 15 18.0	14		9		
Manila		P	14 39 37					
		f	15 7					
Batavia	Ir?	e(P?)	14 41 52					
		M	43	6	5	3		
		f	15 7					
Göttingen		eL	15 32					
		M	48 1/2	18	0.9	1 3/4	3	
		f	16 4					

Weder Ort noch Zeit des an allen Stationen mit Ausnahme von Sidney verstümmelten Bebens waren festzustellen. Eine Diskussion scheint daher nicht gerechtfertigt.

8. September 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
öttingen	Iu	P	17 1 32	4	2	4	12	
		S	11 12	14	5 1/2	5 1/2	3 2/3	Herd 8300 km
		eL	21					
		M	41	20	10	20	15	
		f	19					
Manila		P	17 0 30					
		S	5 40					
		eL	9 50					
		M	18 12 11					
Batavia	Iu	P	17 3 5					
		S, M	15 1	6	11	20		
		f	18 4					
Apia	Ir	P?	17 3 0					
		S?	12.0	6	6	10		
		eL	19.0	15	2	2		
		M	42.0	9	3	12		
		f	19 3					

Auch dieses Beben hat sich so verworren aufgezeichnet, daß eine Diskussion nicht lohnend erscheinen kann.

13. Oktober 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	Ir	L	12 52 bis 57					
		M	54.1	9 4	1 3	1 8		
Batavia	I	P	12 55					
		f	57					

Die Angaben sind zu dürftig, um eine Diskussion zu erlauben.

28. November 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIv	P	1 1.7	—	—	—		ca. 1400
		eP	1 3.7	9	12	12		
		iM	1 5.7	9	115	100		
		f	$2^1/_2$					
Sidney	IIr	iP	1 4 23	5	2			Ep 2000 km.
		PR	5 14	5	5			
		eL	10.2	12				
		M_z	14 09	12			8	
		M_N	14 50	11		32		
		M_E	15 31	14	11			
		f	2 20					
Hamburg	Iu	eP	1 18 04					(16500)
		eL	2 (10)					
		M	24 33	20 20	5 5	8		
		f	3					

Nach den Beobachtungen von Apia ist der Bebenherd 1400 km entfernt. Von offenbar dem gleichen oder ähnlichem Herd stammt eine ganze Reihe von Beben an dem gleichen Datum. An der Hand der Laufzeitkurven ergibt sich als Laufzeit für P 3.3^m. Die Bebenzeit wäre demnach $1^h 58.4^m$.

Hieraus ergibt sich für Sidney als Distanz 2900 m. Der Herd wäre demnach etwa in der Nähe des Minerva Riffs zu suchen.

Die Amplituden sind:

	Entfernung	beobachtet	berechnet ohne Absorption
Apia	1400	110	(110)
Sidney	2900	12	78
Hamburg	16500	6	72

3. Dezember 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit h m s	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Sidney	Ir	eP	3 14.2	4				Ep 1400 km.
		L	18 30	13				
		M_N	18 50	13		21		
		M_E	24 08	15	13			
		M_Z	25 52	15		8		
		f	4 10					
Batavia	Ir	P	3 18 26					
		S,M	25 4	6	6	3		
		f	54					
Apia	Ir	L	3 20 bis 3 26	23	10—20			

Wahrscheinlich Neu-Guinea-Beben. Nicht ohne weiteres verwendbar.

9. Dezember 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit h m s	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Tsingtau	IIr	P	23 35 10					(3500)
		S	40 10					
		M	45 0	14	300	900		
		f	1 15	39				
Batavia	IIu	P	23 36 39					in Ambon registriert (5000 km)
		S, M	42 45	6	111	221		
		f	24 47					
Sidney	IIr	iP	23 37 10	6	1½	18		Ep 5500 km in Guam, Ladrone Islands
		PR_1	39 12	4	6	13	6½	
		S	44 26	8	7½	14		
		i	47 38	(12)	53	26		
		L	51 24	(20)				
		M_E	53 50	12	46			
		M_N	56 18	8			15	
		M_Z	56 20	8		20		
		f	1 10					
Apia		i	23 37.2					Beide Instrumente haben starke Reibung. (5500)
		e	38.0					
		M	38.3	6	(6?)			
		f	51.0					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
Hamburg	Iu	e	23 45.6				(11 500 km).
		S	53 21	8	30	40	
		L	0 19				
		M	24.2	26	90	110	
		f	2				
Ottawa, Canada	I	P?	23 46				[13 000]
		iS?	57 30				
		L	24 20	31			
		f	25 21				

Tsingtau fand für P $23^h 35^m 10^s$;
die Laufzeit für P ist 6 40 bei 3500 km Entfernung
$23^h 28^m 30^s$ ist also die Zeit des Bebens.

Die Amplituden sind:	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Tsingtau	3500	600	600
Batavia	5000	150	525
Sidney	5500	30	505
Apia	5500	(6?)	505
Hamburg	11500	100(50?)	440.

9. Dezember 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sidney	IIr	iP	15 39 26	1¼			12	E.P. 2900 km.
			39 36	1¼			28	
		iS	44 2	12			136	
		eL	46.8	20				
		M_z	50.2	15			403	
		f	17 10					
Apia	Ir	P	[15 39.7]	1.5				(3000)
		eL	[46.5]					
		M	[47.0]	15	60?	60?		
Batavia	IIu	P	15 43 24					(6000)
		PR	46 38					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	
		S	15 50 49				
		M	53	6.5	73	48	
		L	59 3				
		f	17 27				
Ottawa, Canada	II	P	15 54 18				Epicentre 3800 km.
		S	59 44				
		L	16 4 13	11			[13700]
		M	17 0	16	8	4	
		f	18 10				
Hamburg	Iu	e	15 55				
		i	56 42	8	7	116	(14500)
		M_1	40	34	100		
		M_2	49.0	27	—	70	
			49.5	27	65		
		f	18 20				

Das Beben hat anscheinend in der Salomonsgruppe stattgefunden. In Apia können nur relative Zeiten und keine Amplituden mitgeteilt werden, weil das Instrument nicht in Ordnung war. Nehmen wir die Beobachtungen von Sidney als richtig an, so erhalten wir

P beobachtet 39.4^m
5.8^m Laufzeit bei 2900 km
$15^h 33.6^m$ Bebenzeit

Das stimmt leidlich mit Batavia überein.

Die Amplituden der Maximalbewegung sind dann wie folgt:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Sidney	2900	300—400	(300)
Apia	3000	(60?)	290
Batavia	6000	70	210
Hamburg	14500	70	210

9. Dezember 1909.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Manila		P	21 50.6					(2200 km)
		S	55.2					
		eL	59.6					
		M	22 2.5					
		f	22 55					
Batavia	III	P	21 51 13					in Ceram und Ambon gefühlt. (2500 km)
		S, M	55 7					
		L	59 15	7	212	321		
		f	22 52					
Tsingtau	Ir	P	21 53.8					(4400)
		S	59.8	10	14			
		M	22 6.0	18	40	40		
		f	23 0					
Apia	IIr	P	21 11.5				3	6800 wirkliche Entfernung. Herddistanz aus P — eL = 3500
		eL	18.8					P — M = 3500
		M	21.3	18			20	
		f	27					
Hamburg	Iu	e	22 5 5					(12000)
		iS	11 39	9	11	$8^1/_2$		
		eL	41					
		M	46	30	—	46		
		f	23 20					
Ottawa, Canada	I	i	22 9 8					[14 200]
		L	23	12				
		f	23 20					

Allem Anschein nach ist das in Samoa aufgezeichnete Beben nicht identisch mit den aufgezählten der andern Stationen, auch nicht, wenn man grobe Zeitfehler für möglich hält.

Aus Manila ergibt sich als Bebenzeit: 21^h 45.9.

Die Amplituden der Maximalbewegung sind:

	Entfernung	beobachtet	ohne Absorption
Batavia	2500	250	(250)
Tsingtau	4400	40	200
Hamburg	12000	40	165.

Die Weltbeben des Jahres 1910.

Aus Rücksicht auf den Umfang der Publikation werden nur diejenigen Beben von 1910 mitgeteilt, die für die Laufzeitkurve in Frage kommen. Auch auf die Richtigstellung von Zeit- etc. Fehlern mußte bei den übrigen Beben Verzicht geleistet werden, da eine solche ohne eingehende Diskussion der Begründung, und damit des Existenzrechtes entbehren würde.

Die Zusammenstellung beschränkt sich auf die Zeit bis September 1910, weil das für die folgende Zeit vorliegende Material bisher zu dürftig schien. Im Interesse eines Abschlusses der Publikation mußte ferner auf die Aufzeichnungen aus Batavia für 1910 Verzicht geleistet werden, weil von diesen in Göttingen bis zum Juni 1911 nichts eingetroffen war. Dem Register kann daher, zumal auch von Tsingtau vieles fehlte, nicht der gleiche Wert beigemessen werden, wie dem vorjährigen.

1. Januar 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Göttingen	IIu	P	11 14 6	6	3	0.6	$4^1/_2$	Herd 8600 km EW-lich.
		S	24 1	22	18	12	15	
		PS	24.7	20	35	15	16	
		SR_1	29 bis 31	13	$7^1/_2$	$6^1/_2$	$6^1/_2$	(8100 km)
		eL	34					
		M_1	58	25	65	40	65	
		M_2	12 $4^1/_2$	16	30	17	30	
		M rep_1	13 39 bis 43	18	$1^3/_4$	$1^3/_4$	—	
		f	$14^1/_4$					
Tiflis	IIv	P	?					
		S	11 26 32 / 29 33					
		eL	?					(9800)
		M	55.0					
Apia		L	11 25.0 bis 12 16.0					
		M_1	11 26.0	12	7	10		(10 500)
		M_2	45.3	25	40	30		
		M_3	56.3	16	20	30		

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
singtau	IIu	PR_1	11 21.9	3—4	< 1			
		S (PS?)	34.7	9—11	8—10			(13000)
		L_N	52.0					
		L_E	53.0					
		M_N	58.4	39	13			
		M_E	58.4	39		17		
		c	12 17.0					
		f	54.0					
Sidney	IIu	iP	11 23 0	10	1.7			
		i	24 24	10	2.8			
		i (PR_1)	30 8	10	4.7			
		S	40 20	10	5.1	5.4		(14800)
		(PS)	44 8	10				
		eL	12 1.8	24				
		M_{N1}	9 2	14		10.6		
		M_{E1}	10 42	15	17.5			
		M_{E2}	14 42	15	15.0			
		M_{N2}	16 16	15		12.2		
		M_Z	22 56	15			6.2	
		M_E	23 28	13	14.3			
		(Mr_1)	52 56	17		4.8		
		F	13 50					

Der Bebenherd liegt ca. 100 km westlich der Südspitze von Florida. Göttingen allein hat P; seine Entfernung ist 8100 km.

Als Bebenzeit folgt: $11^h 14^m 6^s$

$11\ 40$ Laufzeit

$11^h\ 2^m 26^s$

4. Februar 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
Apia	IIr	Pi	14 3 40	{ 2.0	3	8		Z-Pendel hat Reibung.
				{ 14.0	35	14		
		S	7 10	10.6	20	15		
		eL	8 40					(1800)
		M_1	9 20	21.0	400	80		
		M_2	12 40	14.0	70	50		

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Tsingtau	IIu	e_N	14 11 47	4—5	1—2			
		e_N		6—7		—4.5		(8400)
		S_N	21 9	5—6	7—8			
		S_E	21 17	7—8		3—4		
		L_N	29 29	22	16			
		L_E	29.4	22		13		
		M_{1N}	34.0	27.8	44			
		M_{2N}	37.0	26.0	76			
		M_{3N}	38.4	27.3	52			
		M_E	38.4	27.5		57		
		c	40.0	21	6	8		
		f	42.0					
Tiflis		S	14 21 48					(15 800)
		M	15 6					
Jena	IIu	iP	14 19 55	5	1.3			
		PR	24 58	9	1.3	1.1	12	
		i? S_V	34 33			—	8	
		eL	15 0				4.5	
		M_{1eV}	16	30	10.3			Gleichzeitig Einsatz d. i
		M_{1N}	17	30			85	Beben.
		M_{2E}	23	22	1—8	22		(16 000)
		M_{2NV}	26		20			
		f				16	50	
								Geht in d. folg. Beben übe

Der Bebenherd liegt 400 km westlich Süd-Fidji. Die Bebenzeit ist durch die Registrierung von Samoa gegeben zu $13^h 59.7^m$.

4. Februar 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s					
Apia	IIr	Pi	15 44 10	2	5	5		
		S	47 20	9	20	5		(1800)
		eL	49 10	9	30	20		
		M_E	50 00	16	80	20		
		M_N		13	50	30		
		f	16 33					
Jena	IIu							
		iP_V	15 0 9				7	
		PR_V	4 46				2.5	(16 000)
		eL_{NV}	48					
		M_{1NV}	51	20		4.5	32	
		M_{2NV}	16 0	18		1.7	35	
		c		10—15				
		f	17 5					

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß der Herd dieses Bebens der gleiche wie der des vorigen ist.

Als Bebenzeit ergibt sich dann: $15^h 44^m 10^s$ P Samoa

$$\frac{-4}{15^h 40.2^m}$$

4. Februar 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
			h m s					
Apia	IIr	Pi	17 40 30	2.0	3	2		
				6.3	10	10		
		S	43 50	9.5	15	10		(1800)
		eL	45 30					
		M	46 30	12.8	50	50		
		f	18 23.0					
Tsingtau	Iu	e_N	17 48.5	2—3	1—2			
		e_E		6—7		3—4		(8400)
		S	57.9	9—11	3—4	4—5		
		L_N	18 17.1	22	10			
		L_E	16.4	16				
		M_N	27.2	16.5				
		M_E	23.4	19.2		16		
		c	28.7					
		f	40.0					
Tiflis		P	?					
		S	17 59 48					
		eL	18 41 23					
		M	8 10					(15000)
Jena	Iu	iP	17 56 34	4	0.5		4	
		i	43				16	
		eS	18 9.0				4	(16000)
		eL	35					
		M'_N	45	28		5		
		M_{1V}	19 0	22	1.3	1.4	25	
		M_{2NV}	10	18	1.5	1.7	31	
		f	?					durch d. folg. Beben verde[ckt]

Auch dieses Beben ist vom gleichen Herd. Die Bebenzeit ist: $17^h 36.5^m$.

4. Februar 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
Apia	IIr	Pi	18h 36m 30s	2.0	1	1		
				6.0	10	5		
		S	39 30	9.5	7	3		(1800)
		eL	41 30	—	—	—		
		M	42 30	13.0	36	15		
		f	19 13.0					
Tsingtau	Iu	e	18 44.7					
		S	53.9					
		(L)						(8400)
		(M)						
		(c)						
		f	19 45.0					
Jena	Iu	iP	18 52 32				9	
		eP_E	37					
		eL	19 47					
		M_{1V}	48				22	(16000)
		M_{1N}	55	20		17		
		M_{1E}	59	20	1		17	$= M_{2V}$
		M_{2E}	20 4	20	1		21	$= M_{3V}$
		c						
		f	21 0					

Der Herd ist der gleiche wie der vorige. Die Bebenzeit ist: $18^h\,32.5^m$.

Es ist bemerkenswert, wie bei dem vorstehenden Beben von offenbar ein und demselben Bebenherd, und bei gut stimmender Laufzeit für P, die Laufzeit der übrigen Phasen ziemlich stark differieren kann; wie die folgende kleine Tabelle dies zeigt.

Laufzeiten		P	S	eL Samoa
Beben um	$13^h\,59.7^m$	4.0	7.5	8.0
	15 40.2	4.0	7.1	9.0
	17 36.5	4.0	7.3	9.0
	18 32.5	4.0	7.0	9.0

Wenn wir aber auch annehmen, daß der Bebenherd nicht immer ganz genau der gleiche war, so ist damit nichts gebessert. P—S beim ersten Beben zum Beispiel würde die Annahme notwendig machen, daß der Herd weiter liegt als bei den andern

Beben; dem widerspricht S—eL, aber auch die absoluten Werte (die in der Bestimmung von P enthalten sind). Denn wenn auch bei einem einzelnen Beben ein Fehler der absoluten Zeiten möglich ist, so könnte er bei den so rasch aufeinanderfolgenden Beben sich nur einmal bemerkbar machen, und müßte beim Vergleich der Beben untereinander herausfallen.

30. März 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	II—	P	17 0 25	1	1	1		Kleine Wellen als Vorläufer.
	JIIr	Pi	35	3	10	10		Z hat Reibung im Dämpfer.
		PR	55	{ 3	3	3		
				12	55	55		
		S	4 5	12	70	140		
		SR	4 55	12	100	(200)		NS haut an den Anschlag.
		M	6 55	12	250	(400)		
		c	8 55	12	60	100		(2000)
		c	20 55	12	30	50		
		c	41 55	12	7	20		
			18 5					Wiederkehr oder Eintreffen der
			bis 15					Wellen auf dem längeren Weg?
		eL	5 0	15	10	12		
		M	7 3	10	20	50		
		f	55.0					
Sidney	IIr	iP	17 0 34	6	4.4	2.3		
		iR_1	1 30	6	35.3	34.2		
		iS	4 29	8	47.0	44.8		
			51	8	211.0	134.2		(2300)
		eL	5.4	16				
		M_N	9 5	14		180.2		
		M_E	9 23	12	164.3			
		f	19 30					
	Ir	iP	18 0 34					
		iS	4 29	6	19.4	7.6		
		eL	7.7	15				
		M_E	9 42	13	30.9			
		M_N	10 36	10		18.3		
		f	?					
Tsingtau	Iu	e	17 5.3	4—5	3—4	3—4		
		S	14.8	12	3—4	5		(7500)
		L	27	18		22		
		Mp	32.5					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
		M_{2E}	17 38.3	20		40		
		M_{2N}	18 37.5	19	32			
		M_s	48.5	24	40	40		
		c	49					
		f	19 10					
Ottawa, Canada	I	[P?	17 1 38]					P and S through small mic
		S?	17 16 25	4				seims very uncertain.
		eL	17 26	20				(13 700)
		M	18 0	24	10	5		
		L_E	17 57 to					
			18 5	24				
		L_E	18 9 to					
			18 17					
		f	19.5					
Tiflis		P	17 15 14					
		S	?					(15 000)
		eL	18 0 47					
		M	17 44 38					
Göttingen	IIu	iP	17 15 26	5	6	7½	15	Herddistanz ca. 14 300 km. Na
		RR_1	18.9	18	5	7½	25	den Beobachtungen von Sam
		S?	31⅓	21	4	8	15	Manila und Zi-ka-wei liegt
		SR_1?	37	17	3	5⅓	6	Herd etwa bei 2° S u. 177 E
		M_1	18 14	24	10	45	60	$18^h 15^m 31^s$ ist im Vertikalpen
		M_2	20	21	12	35	20	ein neuer Stoß zu sehen.
		M_s	26	21	18	35	30	(16 200)
		f	20½					

Der Herd ist bei der Loyalty-Gruppe gelegen. Als Bebenzeit ergibt sich aus Samoa: $16^h 55.3^m$. Das Beben stammt von einem Herd in der Nähe des vorigen. Bei Tsingtau wurde ein Zeitversehen um 2½ Minuten angenommen.

8. April 1910.

Apia	IIv	Pi	h m s 16 35 3	{ 0.1 12	18 30	18 30		
			53	{ 0.1 15	12 250	12 250		(200) Beide Nadeln fallen ab.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sidney	Ir	iP	16 42 26	5	2.2	1.2		
			43 11	5	6.6	0.4		
		S	46 30	?				
		eL	49.2	18				(4000)
		iM	51 26	18	90.3	32.4		
		M_{N2}	54 3	11		12.2		
		f	17 20					
Göttingen	Iu	P	16 53 46	5	1¼	2½	2½	
		e	57.4	5	0.6	1¼	1¼	
		e′	59.8	5	0.3		0.6	
		e″	17 16	18	2	1	—	(16000)
		M	18 6	21	4	2½	5	
		f	19					
Tsingtau	Ir	eP	16 56.8	7	6—8	13		
		(S)						(8700)
		L	17 13.5					
		M_E	15.8	25				
		M_N	18.5	18	6—10			
		c_E	20					
		c_N	17					
		f	30					
Tiflis		P	16 54 4					
		S	57 46					(15500)
		eL	?					
		M	17 0 4					

Der Herd liegt ca. 200 km südwestlich von Samoa. Als Bebenzeit ergibt sich dann: $16^h 34.7^m$.

12. April 1910.

			h m s					
Tsingtau	IIIv	iP	0 24 50	6—7	84	21		
		i(S)						
		M_{1V}	27 12	11	294			
		M_{2N}	27 37	9	268			(1400)
		M_{3N}	30 12	12	360			
		M_{4N}	30 18	12	425			
		M_{1E}	27 15	14		1172		
		M_{2E}	30 55	12		580		
		c	31 47	9	208	160		
		f	2 20					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Sidney	IIu	iP	0 32 32	2 6	3.5	6.5	23.5	
		iS	41 2	6	61.6	24.7	3.3	
			41 20	6			6.7	
		(PS)	42 16	7	48.6	47.5		(7200)
		(eL)	48.2	(20)				
		M	49.7	16	61.6	37.0	31.4	
		c	58.5	12	17.2	14.8		
		f	1 45					
Tiflis		P	0 32 32					
		S	41 8					(7200)
		eL	1 34 5					
Apia	Iv	P?	0 33 39		Nadeln abgefall.			Eigenschwingung der Insel regelmäßig. Z hat Reibung Dämpfer, starker Einsatz.
		S?	43 00	6		7		
		M	50	9 24		50 60		(8400)
		f	1 27					
Göttingen	IIIu	iP	0 34 25	5	20	7½	30	
		iPR_1	37 40	6	10	6	12	
		iS	44 32	12	90	90	30	
		ePS	45½	17	90	60	50	(9400)
		M	1 16	12	65	40	55	
		f	3					
Ottawa, Canada	IIu	eP?	0 35 20					
		e	40 50					Epicentre 11000 km.
		iPR_2	41 31					
		iS	46 44	4				
		M	46 50		12	18		(12—13000)
		PS_E	48 7					
		eL?	50 15					
		eL_N	1 3 36	14				
		eL_E	6 20					
		L_E	10	20				
		f	2					

Der Herd liegt in Formosa. Als Bebenzeit ergibt sich nach Tsingtau $0^h 21.6^m$.

1. Mai 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Apia	IIv	P	18 35 6	4		20		(1300 km)
		S?	37 36					
		M_1	39.1	12		36		Die bisher regelmäßigen Schwingungen von 6sec. Periode u. 15μ Amplitunde hören sprunghaft auf.
		M_2	41.5	12		{ 5.0 / 3.6		Schwebungen.
		f	19 35.0					(2200)
Sidney	IIr	iP	18 35 15	7	15.0	5.1	14.9	
			35 27	8	65.3	22.8	34.0	
		iS	39 13	10	141.8	112.5	33.6	
		PS	39 24	9			89.0	(2200)
		(eL)	40.3	(15)				
		M_Z	43 15	16			157.0	
		M_N	43 28	13		149.6		
		M_E	43 32	14	80.6			
		f	20 30					
Tsingtau	IIu	eP	18 42 7	6—8	2—3	2—3		
		iS	51 32	10	4—8	4—8		
		L_N	19 3.5	23	23			
		L_E	5.2	21		11		(8100)
		M_{1N}	11.8	21	36			
		M_{2N}	13.2	21	22			
		M_{3N}	17.2	21	30			
		M_E	15.2	18		26		
		c	18.0					
		f	20 0.0					
öttingen	Iu	iP	18 50 11	14?	2½	4	i:60	
		eL	19 40					(16 200)
		M_1	54	19	7½	15	10	
		M_2	57	21	12	15	9	
		M_3	20 0.0	20	10	15	15	M_3 folgen noch eine Reihe schwacher relativer Maxima.
		f	21½					
Tiflis		P	18 53 31					
		S	?					
		eL	?					(14 500)
		M	19 13 4					
tawa, Canada	Iu	e	19 1					
		eL_E	32 to 37	24	3			(13 700)
		L_E	43 to 51	17	3			
		f	20 25					

Der Bebenherd ist in den neuen Hebriden gelegen. Als Bebenzeit ergibt sich $18^h 30.4^m$ nach Samoa.

31. Mai 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Apia	IIu	e	5 7 5	2		merklich		
		e	7 40	5	5	—		
		e	10 35	6	5	—		
		e	15 5					
		i	16 40	9	5			[8400]
		i	20 30	12 3	6 7	5 7		
		L	20 bis 21	9	5	5		
		L	22.0 bis 23 30	14	10	10		
		eL	31					
		M	36 bis 42	18	50	50		
		f	6 22					
Göttingen	Iu	iP	5 8 24	6	2	1	3	Herddistanz 9600 km.
		eP_{R1}	11.8	6	5	$1^1/_4$	$4^1/_2$	
		eS	19.1	14	9	5	6	
		ePS	20.1	16	9	5	8	
		eS_{R1}	24.5	21	10	7	9	
		eS_{R2}	28.2	18	3	2	3	
		eL	31					
		M	55	17	35	23	30	
		f	8					
Tsingtau	Ir	e	5 21					[12500]
		f	44					
Sidney	Ir	e (P)	5 25.2					[12500]
		e (S)	31.5	16	3.3			
		e (L)	49.2	24				
		M_{E1}	50.7	20	10.4			
		M_{N1}	53.2	16		2.8		
		M_{E2}	6 4.7	14	3.7			
		M_{N2}	7.1	12		1.5		
		f	7 0					

Der Bebenherd ist (unsicher) in Mexiko. Als Bebenzeit wurde angenommen $4^h\ 55.5^m$.

1. Juni 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Samoa	IIr	P	6 0 0	6	50	50		
		iPR	0 3	6	50	50		Unter der Voraussetzung, daß, abgesehen von einer ersten schwachen entgegengesetzten Bewegung, eine Verschiebung vom Bebenherde weg bei der ersten Wellenbewegung eintritt, sollte das Beben im Norden liegen.
		i	1.1	7	10	30		
		i	1.9	7	10	30		
		i	2.9	7	30	10		
		i (S ?)	4.0	9	80	20		
		iPS	5.6	12	150	100		
		M	10—15	18	200	200		
		i (P ?)	51.7	6	30	30		Zweites Beben.
		i (S ?)	52.9	8	30	30		
		eL	55.2					
		M	7 2	15	60	60		
		f	8 34					[2200]
Sidney	IIr	iP	6 0 14	6	20.2	11.0	20.2	
			0 26	6	90.3	37.6	23.5	
		iS	4 10	13	162.0	90.0	185.4	
			4 24	13	378.0	276.3	309.0	[2400]
		eL	5.3	20				
		M_E	7 42	15	220.4			
		M_Z	8 13	16			157.0	
		M_N	8 25	13		171.0		
		f	?					
Ottawa, Kanada	Iu	e?	6 16 7					
		e?	21 37					
		eL	33.5					
		Mil	6 35 to 55					No record on NS component.
		L	6 55.5	26				No maximum.
		L	59 to 7 5	20				
		L	8 to 16	16.5				[13700]
		L	52 to 55	20				
		f	8 15					
Tiflis		S	6 18 7					
		M	7 26 13					[14500]

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Jena	IIu	iP	6 15 4	3	3.5	2.7	28	± 2sek (Minutenmarke).
		eS_V	29 33				3.6	
		eS_E	29.6					
		eL	7 0					[16500]
		M_{NV}	12	28		12	110	
		M_E	15	22	11.5			
			28	19	9	9	49	
								Vom folgend. Beben vernichte

Der Herd ist wiederum in den neuen Hebriden gelegen, aber es sei schon jetzt bemerkt, daß der Herd innerhalb dieser Gruppe nicht konstant bleibt, sondern wandert. Als Bebenzeit wurde angenommen: $5^h\ 55.1^m$.

Bei Samoa wurde in den Wochenberichten ein Zeitfehler um 1^m vermutet.

23. Juni 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Samoa	IIv	Pe	18 53.6	{ 0.1				Federn ab. Bei Z steht di Uhr.
				15	5	3		
			54.4	{ 0.1	10	10		Federn wieder auf.
				15	50	50		
			19 13	6	7	7		
		f	21³/₄					[400]
Jena	Iu	iP_{1V}	19 12 28				8	
		i_{2V}	41				6	
		i_{3V}	52				6	
		i_1PR_{1V}	15 49					± 2sek (Minutenmarke).
		i_3PR_{1V}	16 6				1.7	
		eL_V	20 2					
		M_V	14				3.3	[16000]
		c						
		f	21.3					

Tongabeben! Der Herd wird in 400 km Entfernung von Samoa angenommen. Als Zeit des Bebens ergibt sich dann: $18^h\ 52.6^m$. Die Tongabeben gleichen sich so sehr im Aussehen, daß es nicht zu gewagt erschien, auf Grund der einen Aufzeichnung das Beben auf seinen Herd hin anzusprechen.

Für die Laufzeit der andern Station (Jena, 16000 km) würde ein Fehler der Entfernung um 100 km wenig ausmachen. Die Laufzeit zeigt gute Übereinstimmung mit der Mehrzahl andrer Beobachtungen in den gleichen Entfernungen.

30. Juni 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Tsingtau	Ir	e	3 0.6	2—3	< 1	1—2		
		S	6.0	3—4	< 1	2—3		S − e 5.4 : 3700 km.
		L	8.9	4	< 1	1—2		
		M	10.6	6	< 1	2—3		
		f	4 5					
Sidney	Ir	e(P)	3 8.8	3	4.6	0.9		
		(P)	12 14	8		4.5		
		(eL)	15.9	(12)				[5000]
		M_N	21 58	8		1.9		
		M_E	23 54	14	6.3			
		f	3 35					
Apia	Iv	e	3 13.4	9	5	—		
		L	16	12	3	—		[8200]
		M	20	9	5	3		
		f	40					
Jena	Iu	eP_V	3 7 55				1	
		i? PR	12 7				2.7	
		eS_V	21 53				1.7	
		SR_{1V}	28 2				1.7	
		SR_{2V}	32 16				1.8	
		eL_{1V}	47					= eL_E [12000]
			53	20	4		7.6	
			4 0	16	0.8		20	
		c						f_W bei 4^h 2.
		eL_2	5.9					
		f_V	6.3					

Der Herd liegt in Borneo. Als Bebenzeit ergibt sich: 2^h 53.6^m.

29. Juli 1910.

Tsingtau	IIr	P	10 (35) 34 00	4—9	2—3	3—4		Zeitfehler um 1 Minute angenommen.
		Si	(41) 40 43	7—10	30	35		
		L	(45.5) 44	11—13		18		
		M_{1E}	(48.9) 47.9	19		32		
		M_{2E}	(49.9) 48.9	17		42		
		M_N	(49.9) 48.9	17	34			[5000]
		c	11 (5) 4					
		f	40					

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Phase	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
Ottawa, Kanada	I	e	10 48					
		L	59 14	19				Light of N component t
		L	11 33 to					weak for distinct record.
			41	22				
		f	12 35					[5500]
Apia	II	i	10 35 00	8	5	5		
		i	36 23	5	3	3		
		e	37 43	9	5	1		
		e	41 3	9	5	3		
		i (S?)	42 13	8	5	5		[6000]
		i	43 48	8	7	5		
		eL	46 43	14	—	—		
		M	50–54	15	30	10		
		M	52.0	18	40	15		
		f	11 40					
Jena	Iu	eP_E?	10 45 33	6	0.7			eP_V vielleicht schon bei 45m 2
		eP_E	46 23	8	0.5			
		eP_V	26				2	± 2s (Minutenmarke).
		e_E	43	7	0.5			
		i_V	45				9.7	
		eS_E	56.2					
		eS_V	56 22				3	Herd wahrscheinlich im Mal
		eL	11 21					ischen Archipel gelegen.
		M_{1E}	23	30	11.4			
		M_{1V}	26				10	
		M_{2EV}	29	25	13.7		21	[12500]
		M_{3V}	32				62	
		M_{3E}	34	20	6.1			
		M_{4E}	37	20	8.5	1.3		$= M_V$?
		M_{4V}	38				30	
		M_{5E}	42	19	4.3			
		M_{5V}	43				42	
		c						
		f	13,8					f_W bei 22h 2.

Nach den Laufzeiten von Tsingtau und Samoa liegt der Bebenherd an der Südostküste von J a v a.

Als Bebenzeit ergibt sich nach Tsingtau 1^h 12.2^m, aber Tiflis und Jena zeigen so merkwürdige Laufzeiten, daß es analog dem vorigen Beben auch bei diesem ratsam schien, auf das gesamte Material für die Laufzeitkurven zu verzichten.

7. September 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
Apia	IIr	P	7 18 25	2	3	2		
		PR	20 10	8	7	5		[4400]
		S	24 45	8	15	10		
		eL	27.0					
		M	29½ bis 31½	20	30	40		
		f	7 30					
Tsingtau	IIu	iP	7 19 15	5—6	10	15		
		iS_N	26 28	12	26			
		iS_E		13		43		
		L_N	51.1	18	30			[5200]
		L_E		21		42		
		M	57.1	23	100	63		
		c	47					
		f	8 40					
Tiflis		M_1	7 36 35					
		L_W	8 10 22					[12000]
		M_2	16 43					
Jena	Iu	iP_V	7 30 13	2	0.5	—	6.2	$= P_E$ I
		iP_{EV}	31 57	4	2.2	0.4	9	$= P_E$ II
		PR_{1E}	34 38	5	0.4			II
		PR_{1V}	43				4	II
		eS	37 26	5	1.6		5.3	II
		eS_V	41 33				16.7	I
		eS_{EN}	54	18	5.5	3.3		I [13200]
		SR_{1V}	47 44				12	I
		eL	53					II
		M?	58	23	10.4	8.5	49.5	II
		eL	8 11					I
		M_{1EN}	17	22	15.2	6.4		I
		M_{1V}	18				58	I

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
		M_2	m h s 23	24	36.4	28.8	113	I
		c		15—18				I
		f_W	10.0					I fw geht in das gende Beben über.
Ottawa, Kanada	I	iP	7 31 49					
		iS	38 44	5				
		PS	41 40					
		eL	45.5					
		L	8 14 to					Distance 54 km.
			32	20				
		M	20	20	4	6		[14000]
		f	9 32					

Der Bebenherd liegt im Bismarck-Archipel. Als Bebenzeit ergibt sich: 7^h 10.4^m. In Jena sind offenbar 2 Bebenaufzeichnungen durcheinandergelaufen, die sich nicht gut trennen lassen. Die Laufzeiten für S sind so bedenklich, daß man Zweifel haben muß, ob die Aufzeichnungen glaubwürdig sind. Vielleicht liegt an einer der beiden allein verwendbaren Stationen ein Fehler um 1 Minute vor. Es empfiehlt sich wohl unter diesen Umständen, auf die Angaben zu verzichten.

9. September 1910.

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
				s	μ	μ	μ	
Tsingtau	IIr	Pi	h m s 1 20 41	7—8	10—12	10—12		
		iS	27 31	12—13	56	50		[5000]
		L	32					
		M_E	38.5	22		104		
		M_N	38.5	19	156			
		c	48					
		f	2 50					
Samoa	IIu	Pi	1 23 33	3	5	5		
		PR	27 8	6	2	2		
		PR	29 10	8	5	5		

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode	A_E	A_N	A_Z	Bemerkungen
			h m s	s	μ	μ	μ	
		Si	1 33 5	18	40	35		[7900]
		PS	34 25	11	30	20		
		PSR	39 15	10	8	5		
		eL	41.0	—	—	—		
		M	44—48	50	50	60		
		f	3 0					
Tiflis		V_1	1 25 37					
		V_2	29 4					[9200]
		L_W	52 56					
		M	2 6 30					
		e	5 15					
Jena	Iu	iP_V	1 25 16	—			19.2	
		eP_N	21	2		0.4		
		eP_E	25	1	0.5			
		PR_{1N}	28 1	—				
		PR_{1V}	6	—			5.1	
		PR_{1E}	17	—				[11500]
		PR_{2N}	30 19	—				
		PR_{2E}	21	—				
		PR_{2V}	25	—			16	
		PR_{3V}	31 42	—			3.6	
		eS_N	35 9	—				
		eS_E	10	—				
		i_N	16	11		7		± 2^s.
		eS_V	17				33.8	
		i_V	36 19				17.3	
			40	24		33.8		Bei 4 a. m., $1SR_{1v}$ angedeutet.
		eL_1	44					
		M_{1E}	46	30	32.4			
		M_{1V}	49				46.1	
		M_{2EV}	53	32	24.7	90	189.4	= M_N.
		M_{3V}	54				301.8	
		M_{3E}	57	25	69.6			
		c		13—15				
		eL_2	3 33					Rückkehr des Bebens.
		M_{4V}	35				8	
		M_{4E}	44	20	0.8			
		M_{5V}	47				10	
		c						$f_W = 4^h.3$.
		eL_{3V}	4 50					Zweite Rückkehr.
		M_{6V}	52				0.8	

Ort	Charakter	Phase	Greenwich-Zeit	Periode s	A_E μ	A_N μ	A_Z μ	Bemerkungen
			h m s					
		M_7v	5 12				2.3	
		f	6,0					
Ottawa, Kanada	II	iP	1 23 42	5				
		iS	32 0	8				
		L	42	40				
		M	50	23	12			
		f	3 37					Distance 6750 km [16000]

Der Bebenherd liegt nach den Aufzeichnungen von Samoa ca. 400 km nördlich von Bali (Java).

Als Bebenzeit ergibt sich:

Samoa	1^h 11.9^m
Jena	11.8
Tsingtau	11.9.

Laufzeitkurven.

Zeichenerklärung.

P (primae) = Longitudinalwelle, direkt
PR_1 = „ 1 mal reflektiert
PR_2 = „ 2 mal reflektiert } I. Vorläufer

S = Transversalwelle, direkt . . . . II. Vorläufer

PRS, SRP = PS = Wechselwellen, 1 mal reflektiert

PRPRS, PRSRP, SRPRP = (PS) R = Wechselwellen, 2 mal reflektiert

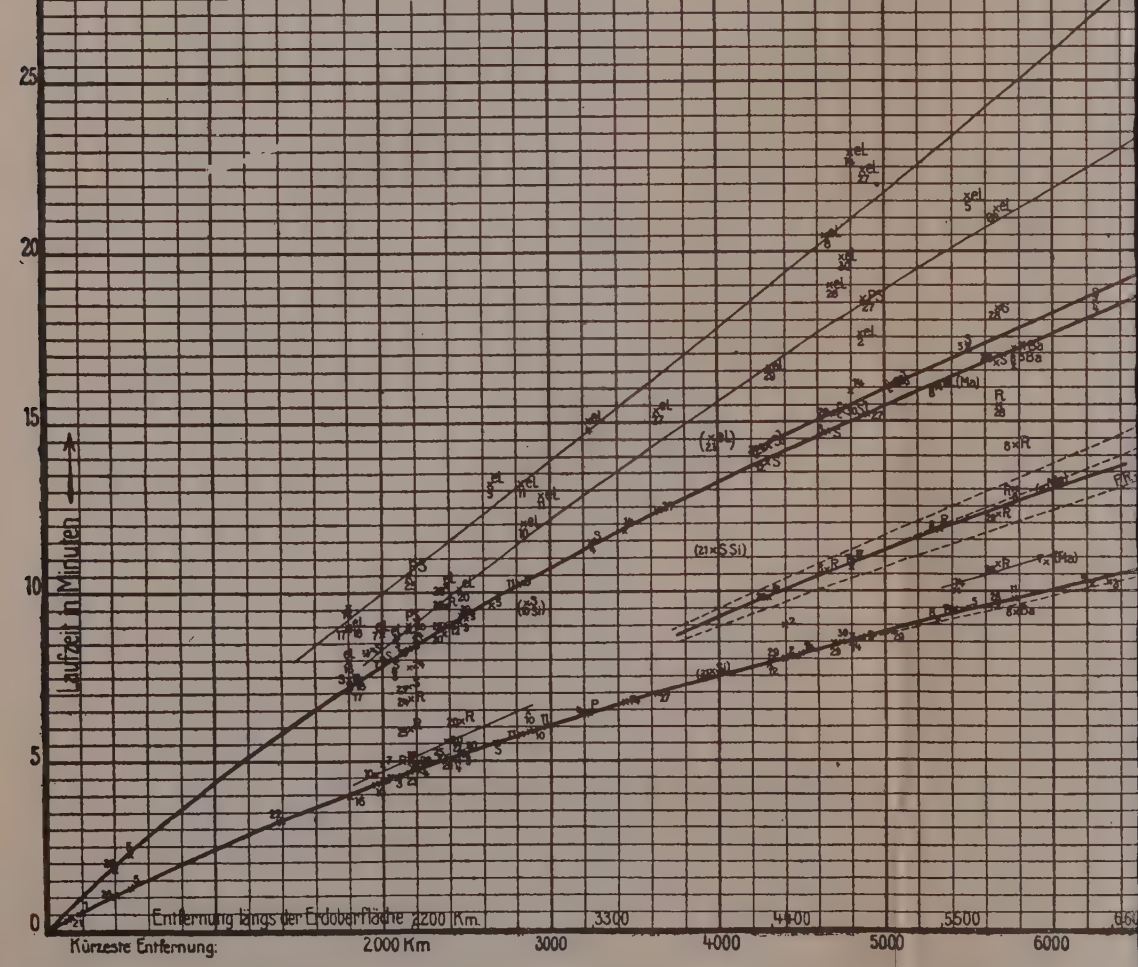
L = lange Wellen (Auftauchen)

e = emersio = Auftauchen

Die bei den Auswertungen als P, S, PS, u. s. w. angesprochenen Punkte wurden in den Fällen, in denen dies von Interesse schien, auch auf der Zeichnung mit den Buchstaben P, S, u. s. w. versehen.

Schien eine Beobachtung besonders bemerkenswert, so wurden die Anfangsbuchstaben der beobachtenden Stationen hinzugefügt (z. B. Ha = Hamburg, Gö = Göttingen, Ma = Manila, Ti = Tiflis, Si = Sidney).

Die den Beobachtungspunkten beigefügten Zahlen (1—30) lassen aus der Liste unter der Tafel den Bebenherd ersehen.

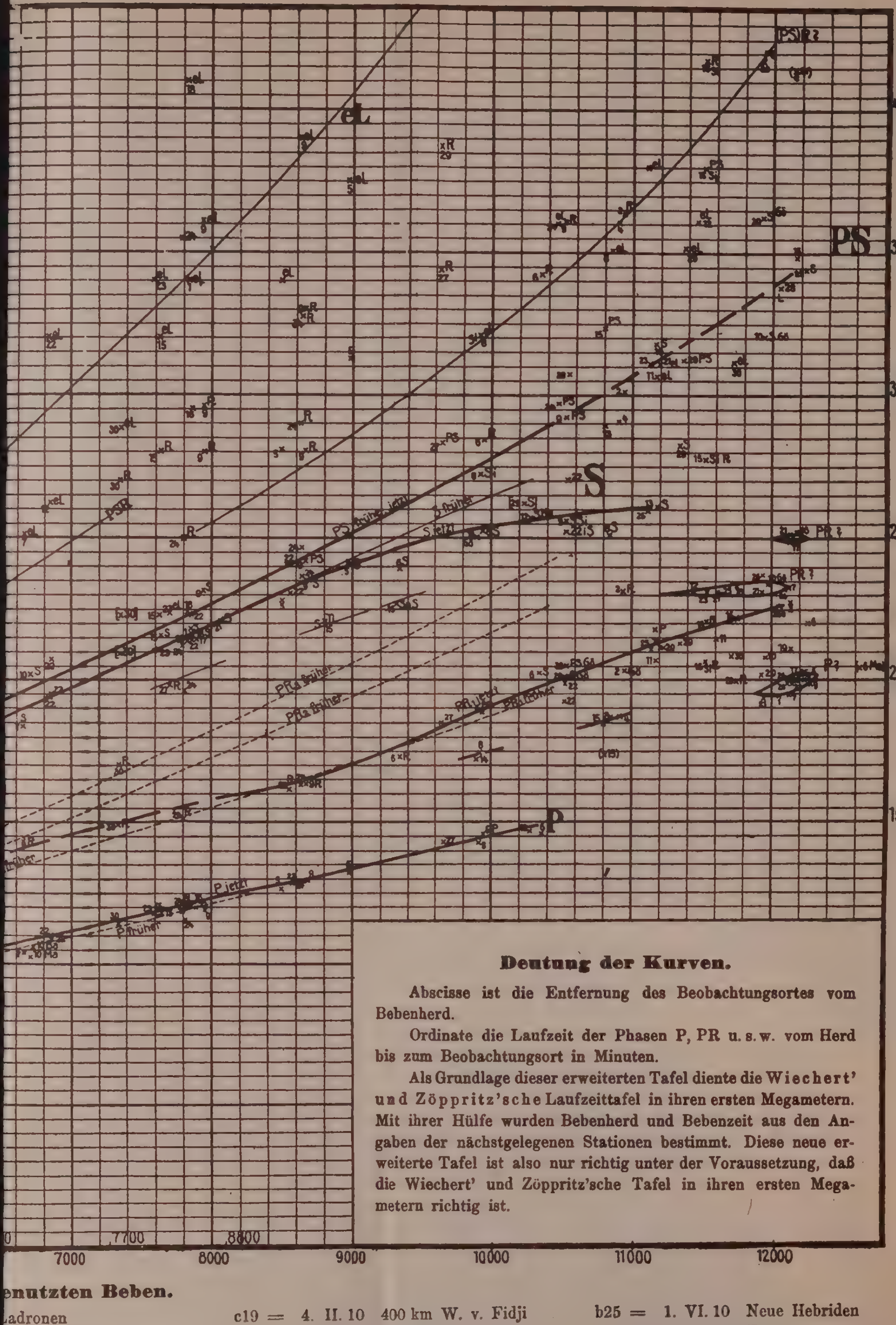


Verzeichnis der b

a1 = 10. IV. 09 Samoa
2 = 27. IV. 09 Shouten (Kais. Wilh. Ld.)
b3 = 2. V. 09 Neue Hebriden
4 = 30. V. 09 NW. Australien
5 = 3. VI. 09 Corintji (Sumatra)
6 = 8. VI. 09 Kopiapo (Chile)

7 = 27. VI. 09 Neue Hebriden
8 = 27. VII. 09 Samarkand
9 = 30. VII. 09 Chilpanzingo (Mexiko)
b10 = 18. VIII. 09 Neue Hebriden
11 = 9. XII. 09 Salomons-Inseln
12 = 9. XII. 09 NW. v. Neu Guinea

13 = 9. XII. 09
14 = 9. XII. 09
15 = 1. I. 10
c16 = 4. II. 10
c17 = 4. II. 10
c18 = 4. II. 10



Deutung der Kurven.

Abscisse ist die Entfernung des Beobachtungsortes vom Bebenherd.

Ordinate die Laufzeit der Phasen P, PR u. s. w. vom Herd bis zum Beobachtungsort in Minuten.

Als Grundlage dieser erweiterten Tafel diente die Wiechert' und Zöppritz'sche Laufzeittafel in ihren ersten Megametern. Mit ihrer Hülfe wurden Bebenherd und Bebenzeit aus den Angaben der nächstgelegenen Stationen bestimmt. Diese neue erweiterte Tafel ist also nur richtig unter der Voraussetzung, daß die Wiechert' und Zöppritz'sche Tafel in ihren ersten Megametern richtig ist.

enutzten Beben.

adronen
uam
00 km W. v. Florida
00 km W. v. Fidji
00 km W. v. Fidji
00 km W. v. Fidji

c19 = 4. II. 10 400 km W. v. Fidji
b20 = 30. III. 10 Neue Hebriden
a21 = 8. IV. 10 Samoa
22 = 12. IV. 10 Formosa
b23 = 1. V. 10 Neue Hebriden
24 = 31. V. 10 Mexiko

b25 = 1. VI. 10 Neue Hebriden
26 = 23. VI. 10 Tonga
27 = 30. VI. 10 Borneo
28 = 29. VII. 10 Timor
29 = 7. IX. 10 Bismarck-Archipel
30 = 9. IX. 10 SE. Java

Weiteres zur Polarisation des an Rowland-Gittern gebeugten Lichtes.

Von

W. Voigt und P. Collet.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1912.

I. Theoretischer Teil.

Von W. Voigt.

1) Die Anwendung der Lord Rayleighschen theoretischen Methode auf die Ableitung der Beugungsgesetze an Rowland-Gittern, welche ich der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften am 11. Jan. 1911 vorgelegt habe[1]), hat in Gemeinschaft mit Beobachtungen, die von Herrn Pogany[2]) nach meiner Anregung im hiesigen Institut ausgeführt sind, die Polarisationsverhältnisse des an Reflexionsgittern gebeugten Lichtes in dem bisher fast allein der Untersuchung unterworfenen Falle, daß die Gitterfurchen normal zur Einfallsebene stehen, ziemlich weitgehend aufgeklärt. Dieser Erfolg hat mich veranlaßt, nun auch den allgemeineren und bisher systematisch garnicht behandelten Fall zur Einfallsebene geneigter Gitterfurchen in Angriff zu nehmen. Die hier erhaltenen Resultate, bei denen die Beobachtungen und deren Vergleichungen mit der Theorie von Frl. P. Collet ausgeführt sind, sollen im Nachstehenden dargestellt werden.

Wie in der früheren theoretischen Untersuchung soll auch weiterhin im Anschluß an die Festsetzungen von Lord Rayleigh die reflektierende Gitterebene zur XY-Ebene, die Richtung der

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1191 p. 41.

2) B. Pogany, Ann. d. Phys. **37**, p. 257, 1912.

Gitterfurchen zur Y-Axe gewählt werden; die $+Z$-Axe tritt aus der Gitterebene in die Luft aus. Ferner mag die einfallende Welle so gegen das Gitter laufen, daß die Richtungskosinus der (negativ gerechneten) Wellennormale α, β, γ sind. Die (ebenso gerechneten) Richtungskosinus der reflektiert gebeugten Wellen seien α_h, β_h, γ_h, wobei $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist, und $h = 0$ der regelmäßig reflektierten Welle entspricht, so daß

1) $$\alpha_0 = \alpha,\ \beta_0 = \beta,\ \gamma_0 = -\gamma.$$

Das Profil der Gitterfurchen sei wie früher dargestellt durch

2) $$\xi = S \zeta_k e^{ikulx}$$

wobei $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist, und der Wert $k = 0$ ausfällt. In diesem Fall verlangen die Grenzbedingungen der Elektrodynamik die Beziehungen

3) $$\alpha_h = \alpha + hl, \quad \beta_h = \beta, \quad \text{während} \quad \gamma_h^2 = 1 - \alpha_h^2 - \beta_h^2.$$

Wir wollen die Lage der hierdurch gegebenen Beugungsbilder uns geometrisch veranschaulichen.

Konstruiert man die ihnen entsprechenden Wellennormalen vom Koordinatenanfang aus, so liegen dieselben auf einem Kegel mit der Y- als Axe und von einer durch $\beta = \cos \Theta$ d. h. durch die einfallende Wellennormale gegebenen Öffnung Θ. Stellt in der Figur 1 der Kreis um den Punkt p die Spur des Kegels auf der

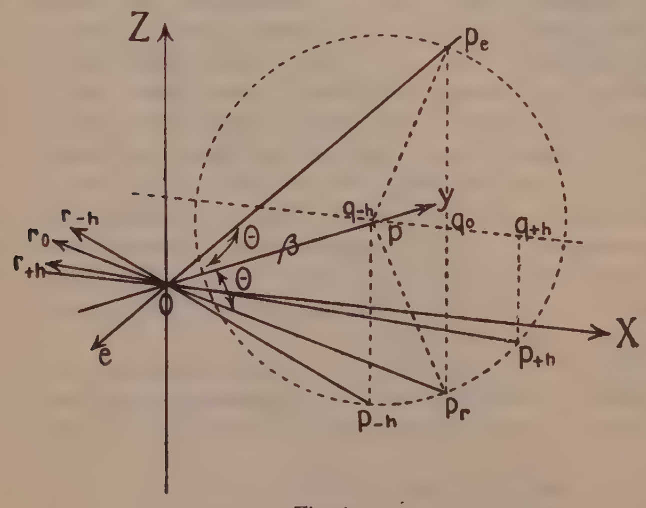


Fig. 1.

Ebene $y = \beta$ dar und e die Richtung der einfallenden Wellennormale, dann ist die Strecke $\overline{op_e} = 1$ und ihre Projektion $\overline{pq_0}$ auf die Parallele zur X-Axe durch $p = \alpha$. $\overline{op_r} = 1$ gibt die regelmäßig reflektierte Wellennormale, deren Richtung durch r_0 dargestellt ist; $\overline{pq_0}$ ist zugleich die Projektion von $\overline{op_r}$, also gleichfalls $= \alpha$. Trägt man von q_0 auf der X-Axe die Strecken $\overline{q_0 q_{\pm h}} = \pm hl$ an, so erhält man nach (3) $\overline{pq_{\pm h}} = \alpha_{\pm h}$, und $\overline{op_{+h}}$, $\overline{op_{-h}}$ bestimmen die Wellennormalen $r_{\pm h}$ der Beugungsbilder $\pm h$. (In der Fig. 1 fällt q_{-h} zufällig nur ganz wenig links von p.)

2) Die Theorie benutzt von den Schwingungsvektoren zunächst die Komponenten nach den festen Koordinatenaxen XYZ, die nicht von einander unabhängig sind, zumal für die Wellen im ersten Medium durch die Bedingung der Transversalität der Schwingungen einfach verknüpft werden. Die Beobachtung betrifft nur die Komponenten in der Wellenebene und nach der (wie unten zu zeigen) durch die Verhältnisse gegebenen Beobachtungsart speziell diejenigen beiden, die resp. parallel und normal zur Einfallsebene stehen. Wir wollen an die vorstehenden geometrischen Überlegungen sogleich diejenigen weiteren anknüpfen, welche die Richtungen dieser Komponenten (p) und (n) gegen die Koordinatenaxen X, Y, Z ergeben.

Figur 2 stellt auf der Kugelfläche diejenigen zwei Oktanten

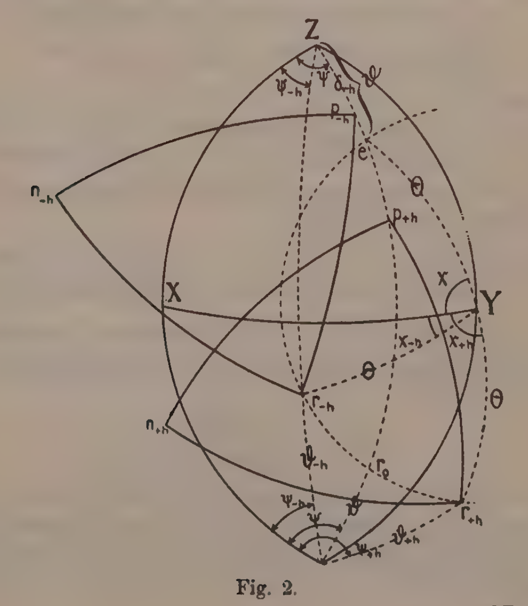


Fig. 2.

des Koordinatenkreuzes XYZ dar, in denen die einfallende und die reflektierte Wellennormale (negativ gerechnet) liegen. Um den Punkt $+Y$ ist die Spur des Kegels von der Öffnung Θ als Kreis sichtbar; die auf ihm liegenden Punkte e und r_0 geben die einfallende und die reflektierte Wellennormale, $r_{\pm h}$ diejenigen der Beugungsbilder ($\pm h$). Der größte Kreis $\overline{Zer_0}$ stellt die Einfallsebene dar, $p_{\pm h}$ geben also die Komponenten der bez. gebeugten Schwingungen nach dieser Ebene, $n_{\pm h}$ diejenigen normal dazu. Fügt man nach der Figur die Winkel ψ, ϑ, $\delta_{\pm h}$, χ, $\chi_{\pm h}$ ein, so gilt

$$4)\quad \begin{cases} \beta = \beta_0 = \beta_h = \cos\Theta, \\ \alpha = \sin\Theta\cos\chi = \alpha_0\,,\ \gamma = \sin\Theta\sin\chi = -\gamma_0\,, \end{cases}$$

$$5)\qquad \alpha_h = \sin\Theta\cos\chi_h\,,\ \gamma_h = -\sin\Theta\sin\chi_h\,,$$

und ist

$$6)\qquad \alpha_h - \alpha = hl,\ \text{d. h.}\ \cos\chi_h - \cos\chi = \frac{hl}{\sin\Theta}.$$

Durch die Bedingung $-1 < \cos\chi_h < +1$ sind die zulässigen Werte h bestimmt. Ebenso gilt auch

$$7)\qquad \alpha = \sin\vartheta\cos\psi,\quad \beta = \sin\vartheta\sin\psi,\quad \gamma = \cos\vartheta = -\gamma_0\,,$$

$$8)\qquad \alpha_h = \sin\vartheta_h\cos\psi_h\,,\quad \beta_h = \sin\vartheta_h\sin\psi_h\,,\quad \gamma_h = -\cos\vartheta_h\,,$$

wobei nun nach der Figur ist

$$9)\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \sin\chi\sin\Theta, & \operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\Theta\cos\chi, \\ \cos\Theta = \sin\psi\sin\vartheta, & \operatorname{ctg}\chi = \operatorname{tg}\vartheta\cos\psi \end{cases}$$

und analoges für ϑ_h, ψ_h, χ_h gilt, bei $\Theta_h = \Theta$.

Der Regel nach wird die einfallende Welle am bequemsten durch ψ und ϑ definiert werden und man wird daraus χ und Θ berechnen, woraus dann χ_h und hiermit alle α_h, β_h, γ_h zu finden sind. Nebenbei ergibt sich auch

$$10)\quad \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\psi_h} = \frac{\cos\chi_h}{\cos\chi},\quad \operatorname{tg}(\psi - \psi_h) = \frac{(\cos\chi_h - \cos\chi)\operatorname{tg}\Theta}{1 + \cos\chi\cos\chi_h\operatorname{tg}^2\Theta}.$$

Um die Richtungskosinus der p-Schwingung auszudrücken ist vorerst der Winkel δ_h zu bestimmen. Aus dem Dreieck ($Z\, r_{\pm h}\, p_{\pm h}$) ergibt sich direkt

$$11)\qquad \operatorname{tg}\delta_h = \frac{\operatorname{ctg}\vartheta_h}{\cos(\psi - \psi_h)},$$

wobei $\psi - \psi_h$ aus (10^2) folgt. Da es sich aber bei uns um numerische Anwendungen handelt, wird man wahrscheinlich am einfachsten mit dem gegebenen ψ das aus ($11'$) zu berechnende ψ_h kombinieren.

Nunmehr ergibt sich für die Richtungkosinus $\alpha_{ph}, \beta_{ph}, \gamma_{ph}$ von p_h:

12) $$\alpha_{ph} = \sin\delta_h \cos\psi, \quad \beta_{ph} = \sin\delta_h \sin\psi, \quad \gamma_{ph} = \cos\delta_h,$$

und hieraus für die $\alpha_{nh}, \beta_{nh}, \gamma_{nh}$ von n_h

$$\alpha_{nh} = \beta_h \gamma_{ph} - \gamma_h \beta_{ph}, \quad \beta_{nh} = \gamma_h \alpha_{ph} - \alpha_h \gamma_{ph}, \quad \gamma_{nh} = \alpha_h \beta_{ph} - \beta_h \alpha_{ph},$$

d. h.

13) $$\left\{\begin{aligned} \alpha_{nh} &= \sin\vartheta_h \cos\delta_h \sin\psi_h + \cos\vartheta_h \sin\delta_h \sin\psi, \\ \beta_{nh} &= -(\sin\vartheta_h \cos\delta_h \cos\psi_h + \cos\vartheta_h \sin\delta_h \cos\psi), \\ \gamma_{nh} &= \sin(\psi - \psi_h)\sin\vartheta_h \sin\delta_h. \end{aligned}\right.$$

3) Wir gehen nun dazu über, die Ansätze für die elektrischen Schwingungsvektoren zu bilden und in ihnen die Grenzbedingungen auszudrücken. Dabei seien die einfallenden Amplituden mit E_x, E_y, E_z, die reflektierten, resp. reflektiert gebeugten mit R_{hx}, R_{hy}, R_{hz} die eindringenden, resp. eindringend gebeugten mit D_{hx}, D_{hy}, D_{hz} bezeichnet. $R_{0x}, \ldots = R_x, \ldots$ und $D_{0x}, \ldots = D_x, \ldots$ sind dann die regelmäßig reflektierten und gebrochenen Komponenten.

Demgemäß schreiben wir für die einfallende Welle

14) $$E_{(xyz)} e^{i\mu(ct + \alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

für die reflektierten resp. reflektiert gebeugten

15) $$R_{h(xyz)} e^{i\mu(ct + \alpha_h x + \beta y + \gamma_h z)} \quad \text{bei } h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei wieder

16) $$\alpha_h = \alpha + hl, \quad \gamma_h = -\sqrt{1 - \alpha_h^2 - \beta^2}, \quad \gamma_0 = -\gamma;$$

für die eindringenden resp. eindringend gebeugten

17) $$D_{h(xyz)} e^{i\mu(ct + \alpha_h x + \beta y + \nu_h z)} \quad \text{bei } h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei unter Heranziehung des komplexen Brechungsindex $\mathfrak{n}$

18) $$\nu_h = \sqrt{\mathfrak{n}^2 - \alpha_h^2 - \beta^2}.$$

Die Amplituden E, R, D sind je verknüpft durch die Bedingungen

19) $$\begin{aligned} E_x \alpha + E_y \beta + E_z \gamma &= 0, \\ R_{hx} \alpha_h + R_{hy} \beta + R_{hz} \gamma_h &= 0, \\ D_{hx} \alpha_h + D_{hy} \beta + D_{hz} \nu_h &= 0, \text{ für } h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen verlangen für $z = \zeta$ die Stetigkeit der zur Grenze tangentialen Komponenten der elektrischen und der

magnetischen Feldstärken ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$), d. h. von $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{E}_t$, $\mathfrak{H}_t$, wobei der Index t die in der XZ-Ebene liegende Tangentialkomponente bezeichnet.

Dabei ist nach den Maxwell-Hertzschen Gleichungen

$$20)\qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = c\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_t}{\partial y}\right), \ldots;$$

ferner gilt

$$21)\qquad \mathfrak{E}_t = \mathfrak{E}_x + \mathfrak{E}_z \frac{d\zeta}{dx}, \quad \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_x + \mathfrak{H}_z \frac{d\zeta}{dx}.$$

Hiernach nehmen bei Beseitigung der gemeinsamen Faktoren die vier Grenzbedingungen die Formen an

$$E_y e^{i\mu\gamma\zeta} + (\Sigma) R_{hy} e^{i\mu\gamma_h\zeta + i\mu hlx} = (\Sigma) D_{hy} e^{i\mu\nu_h\zeta + i\mu hlx},$$

$$(E_z\alpha - E_x\gamma) e^{i\mu\gamma\zeta} + (\Sigma)(R_{hz}\alpha_h - R_{hx}\gamma_h) e^{i\mu\gamma_h\zeta + i\mu hlx}$$
$$= (\Sigma)(D_{hz}\alpha_h - D_{hx}\nu_h) e^{i\mu\nu_h\zeta + i\mu hlx}$$

$$\left(E_x + E_z \frac{d\zeta}{dx}\right) e^{i\mu\gamma\zeta} + (\Sigma)\left(R_{hx} + R_{hz}\frac{d\zeta}{dx}\right) e^{i\mu\gamma_h\zeta + i\mu hlx}$$

$$22)\qquad = (\Sigma)\left(D_{hx} + D_{hz}\frac{d\zeta}{dx}\right) e^{i\mu\nu_h\zeta + i\mu hlx}$$

$$\left[(E_y\gamma - E_z\beta) + (E_x\beta - E_y\alpha)\frac{d\zeta}{dx}\right] e^{i\mu\gamma\zeta}$$
$$+ (\Sigma)\left[(R_{hy}\gamma_h - R_{hz}\beta) + (R_{hx}\beta - R_{hy}\alpha_h)\frac{d\zeta}{dx}\right] e^{i\mu\gamma_h\zeta + i\mu hlx}$$
$$= (\Sigma)\left[(D_{hy}\nu_h - D_{hz}\beta) + (D_{hx}\beta - D_{hy}\alpha_h)\frac{d\zeta}{dx}\right] e^{i\mu\nu_h\zeta + i\mu hlx}$$

Hierbei sind die Summen (Σ) über $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zu nehmen, soweit damit Werte $-1 < \alpha + hl = \alpha_h < 1$ vereinbar sind. Ferner ist

$$23)\qquad \zeta = S\,\zeta_k e^{ik\mu lx}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = i\mu l\, S\, k\zeta_k e^{ik\mu lx}$$

und die Summen S sind über alle ganzzahligen k mit Ausnahme von $k = 0$ zu nehmen.

4) Die Grenzbedingungen (22) sind nun gliedweise zu erfüllen, und wir entwickeln zunächst die konstanten Glieder bis auf zweite Ordnung bez. ζ inklusive. Da die R_h und D_h sich selbst von erster Ordnung finden, sind ihre Faktoren nur bis auf erste

Ordnung inklusive zu entwickeln. In erster Annäherung gilt:

24)
$$(\Sigma) R_h e^{i\mu\gamma_h\zeta + i\mu h l x} = (\Sigma) R_h (1 + i\mu\gamma_h \mathfrak{S}\zeta_k e^{ik\mu l x}) e^{i\mu h l x},$$
$$(\Sigma) D_h e^{i\mu\nu_h\zeta + i\mu h l x} = (\Sigma) D_h (1 + i\mu\nu_h \mathfrak{S}\zeta_k e^{ik\mu l x}) e^{i\mu h l x},$$

und lauten hiervon die in x konstanten Glieder

25)
$$R_0 + i\mu(\mathfrak{S}) R_h \gamma_h \zeta_{-h}, \quad \text{resp. } D_0 + i\mu(\mathfrak{S}) D_h \nu_h \zeta_{-h}.$$

Die Summen $(\mathfrak{S})$ sind mit Ausschluß von h (resp. k) $= 0$ und innerhalb der durch $-1 < \alpha_h < +1$ gezogenen Grenzen zu nehmen. Das konstante Glied in $\zeta \frac{d\zeta}{dx}$ ist mit $\mathfrak{S} k \zeta_k \zeta_{-k}$ proportional, also gleich Null.

Wir erhalten so, wenn wir wieder setzen $2\mathfrak{S}\zeta_k\zeta_{-k} = \zeta_0^2$

26)
$$\begin{aligned}
&(E_y + R_y)(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S}) R_{hy}\gamma_h\zeta_{-h} \\
&\quad = D_y(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S}) D_{hy}\nu_h\zeta_{-h}, \\
&[(E_z + R_z)\alpha - (E_x - R_x)\gamma](1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S})(R_{hz}\alpha_h - R_{hx}\gamma_h)\gamma_h\zeta_{-h} \\
&\quad = (D_z\alpha - D_x\nu)(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S})(D_{hz}\alpha_h - D_{hx}\nu_h)\nu_h\zeta_{-h}, \\
&(E_x + R_x)(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S})(\gamma_h R_{hx} - hl R_{hz})\zeta_{-h} \\
&\quad = D_x(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2) + i\mu(\mathfrak{S})(\nu_h D_{hx} - hl D_{hz})\zeta_{-} \\
&[(E_y - R_y)\gamma - (E_z + R_z)\beta](1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2) \\
&\qquad + i\mu(\mathfrak{S})[(\gamma_h R_{hy} - \beta R_{hz})\gamma_h + (\beta R_{hx} - \alpha_h R_{hy}) hl]\zeta_{-h} \\
&\quad = (D_y\nu - D_z\beta)(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2) \\
&\qquad + i\mu(\mathfrak{S})[(\nu_h D_{hy} - \beta D_{hz})\nu_h + (\beta D_{hx} - \alpha_h D_{hy}) hl]\zeta_{-h}.
\end{aligned}$$

Im Grenzfall verschwindender Furchen ($\zeta = 0$) gibt dies die Bedingungen

27)
$$\begin{aligned}
E_y + R_y &= D_y, \\
(E_z + R_z)\alpha - (E_x - R_x)\gamma &= D_z\alpha - D_x\nu, \\
E_x + R_x &= D_x \\
(E_y - R_y)\gamma - (E_z + R_z)\beta &= D_y\nu - D_z\beta,
\end{aligned}$$

in denen nun auch bei den gewöhnlichen Verwendungen entweder α oder β gleich Null gesetzt werden. Hier müssen aber die allgemeinen Formen beibehalten werden.

Um aus (26) die regelmäßig reflektierten Amplituden R_x, R_y, R_z zu berechnen sind für die gebeugten Amplituden $R_{hx}, \ldots D_{hx}, \ldots$ Ausdrücke heranzuziehen, die bis auf erste Ordnung inklusive

genau sind. Diese gewinnen wir, indem wir die aus (22) folgenden Relationen für die Faktoren von $e^{ih\mu lx}$ bis auf diese Ordnung bilden, welche folgendermaßen lauten

$$
\begin{aligned}
& i\mu\xi_h[(E_y - R_y)\gamma - D_y\nu] = D_{hy} - R_{hy},\\
& i\mu\xi_h[((E_z - R_z)\alpha - (E_x + R_x)\gamma)\gamma - (D_z\alpha - D_x\nu)\nu]\\
& \qquad = (D_{hz}\alpha_h - D_{hx}\nu_h) - (R_{hz}\alpha_h - R_{hx}\gamma_h),\\
28)\quad & i\mu\xi_h[(E_x - R_x)\gamma + (E_z + R_z)lh - D_x\nu - D_z lh] = D_{hx} - R_{hx}\\
& i\mu\xi_h[((E_y + R_y)\gamma - (E_z - R_z)\beta)\gamma + ((E_x + R_x)\beta - (E_y + R_y)\alpha)lh\\
& \qquad - ((D_y\nu - D_z\beta)\nu + (D_x\beta - D_y\alpha)lh)]\\
& \qquad = (D_{hy}\nu_h - D_{hz}\beta) - (R_{hy}\gamma_h - R_{hz}\beta).
\end{aligned}
$$

5) Bei der weiteren Entwickelung beschränken wir uns auf den Fall, daß die Gitterfurchen in der Einfallsebene liegen. Hier ist dann (nach Fig. 2 und 3)

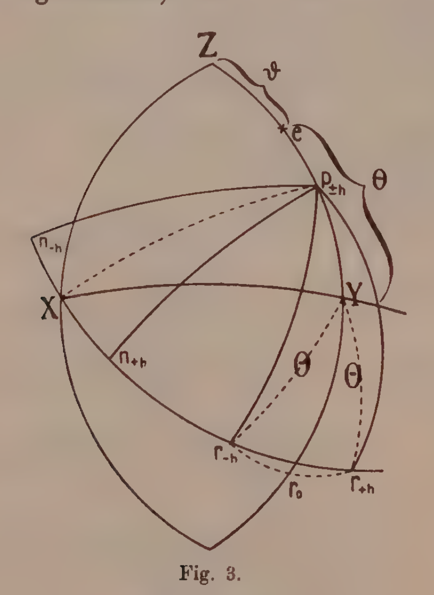


Fig. 3.

$$29)\qquad \psi = \chi = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \vartheta + \Theta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und es gilt demgemäß nach (4) und (7)

$$
30)\quad
\begin{aligned}
& \alpha = 0, \quad \beta = \sin\vartheta = \cos\Theta, \quad \gamma = \cos\vartheta = \sin\Theta = -\gamma_0\\
& \alpha_h = hl, \quad \beta_h = \beta = \cos\Theta, \quad \gamma_h = -\sqrt{\sin^2\Theta - h^2 l^2}.
\end{aligned}
$$

Ferner ergeben die Formeln (12) und (13)

$$\alpha_{ph} = 0, \quad \beta_{ph} = -\frac{\gamma_h}{\sqrt{\beta^2+\gamma_h^2}}, \quad \gamma_{ph} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma_h^2}}$$

31)

$$\alpha_{nh} = \sqrt{\beta^2+\gamma_h^2}, \quad \beta_{nh} = -\frac{\alpha_h\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma_h^2}}, \quad \gamma_{nh} = -\frac{\alpha_h\gamma_h}{\sqrt{\beta^2+\gamma_h^2}}$$

wobei $\beta^2+\gamma_h^2 = 1-h^2l^2$ ist.

Wir beginnen mit der Entwickelung der Formeln (28) welche wegen $\alpha = 0$, $\alpha_h = hl$ die Gestalt annehmen

32)

$$\begin{aligned}
&i\mu\xi_h[(E_y-R_y)\gamma - D_y\nu] = D_{hy}-R_{hy},\\
&i\mu\xi_h[-(E_x+R_x)\gamma^2+D_x\nu^2] = (D_{hz}\alpha_h - D_{hx}\nu_h)-(R_{hz}\alpha_h - R_{hx}\gamma_h),\\
&i\mu\xi_h[(E_x-R_x)\gamma+(E_z+R_z)\alpha_h - D_x\nu - D_z\alpha_h] = D_{hx}-R_{hx},\\
&i\mu\xi_h[(E_y+R_y)\gamma^2-(E_z-R_z)\beta\gamma+(E_x+R_x)\beta\alpha_h\\
&\quad -((D_y\nu-D_z\beta)\nu+D_x\beta\alpha_h)] = (D_{hy}\nu_h - D_{hz}\beta)-(R_{hy}\gamma_h - R_{hz}\beta).
\end{aligned}$$

Hier können wir links diejenigen Beziehungen ausführen, die für $\alpha = 0$ aus (27) und (19) folgen, d. h. aus

$$E_y+R_y = D_y, \qquad (E_x-R_x)\gamma = D_x\nu,$$
$$(E_y-R_y)\gamma-(E_z+R_z)\beta = D_y\nu - D_z\beta, \quad E_x+R_x = D_x,$$

und

$$E_y\beta+E_z\gamma = 0, \quad R_y\beta - R_z\gamma = 0, \quad D_y\beta+D_z\nu = 0.$$

Setzt man

33)

$$\begin{aligned}
E_y &= E_p\gamma, \quad R_y = R_p\gamma, \quad D_y = D_p\nu/\sqrt{\beta^2+\nu^2},\\
E_z &= -E_p\beta, \quad R_z = R_p\beta, \quad D_z = -D_p\beta/\sqrt{\beta^2+\nu^2},
\end{aligned}$$

wobei $\beta^2+\nu^2 = \mathfrak{n}^2$ ist, so resultiert

34)

$$\begin{aligned}
&2E_p\gamma\mathfrak{n} = D_p(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu), \qquad 2E_x\gamma = D_x(\gamma+\nu),\\
&E_p(\mathfrak{n}^2\gamma-\nu) = -R_p(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu), \quad E_x(\gamma-\nu) = R_x(\gamma+\nu).
\end{aligned}$$

Dies wollen wir kurz schreiben

35) $$D_p = E_p\delta_p, \quad R_p = E_p\varrho_p, \quad D_x = E_x\delta_x, \quad R_x = E_x\varrho_x,$$

wobei dann

36) $$\delta_p = \frac{2\mathfrak{n}\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}, \quad \varrho_p = -\frac{\mathfrak{n}^2\gamma-\nu}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}, \quad \delta_x = \frac{2\gamma}{\gamma+\nu}, \quad \varrho_x = \frac{\gamma-\nu}{\gamma+\nu}$$

$$\text{also } \mathfrak{n}\delta_p+\varrho_p = +1, \; \delta_x - \varrho_x = +1.$$

Hiernach liefern die Formeln (32)

$$
37)\quad
\begin{aligned}
L_h &= 2i\mu\zeta_h E_p \frac{\gamma(\mathfrak{n}^2\gamma^2-\nu^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu} = D_{hy} - R_{hy},\\
M_h &= 2i\mu\zeta_h E_x \gamma(\nu-\gamma) = (D_{hz}\alpha_h - D_{hx}\nu_h) - (R_{hz}\alpha_h - R_{hx}\gamma_h),\\
N_h &= 2i\mu\zeta_h E_p \frac{\gamma\beta\alpha_h(1-\mathfrak{n}^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu} = D_{hx} - R_{hx},\\
P_h &= 2i\mu\zeta_h E_p \frac{\gamma\nu(1-\mathfrak{n}^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu} = (D_{hy}\nu_h - D_{hz}\beta) - (R_{hy}\gamma_h - R_{hz}\beta),
\end{aligned}
$$

wobei L, M, N, P Abkürzungen sind.

Diese Bedingungen, zusammen mit

$$
38)\quad R_{hx}\alpha_h + R_{hy}\beta + R_{hz}\gamma_h = 0,\quad D_{hx}\alpha_h + D_{hy}\beta + D_{hz}\nu_h = 0
$$

bestimmen die sechs Komponenten R und D.

Die Beobachtungen beziehen sich auf die Komponenten nach den Richtungen p und $\pm n$ in Fig. 3; es erscheint angemessen dieselben bereits in die vorstehenden Formeln einzuführen. Bezeichnet man die Komponenten nach p und n durch die Indizes hp und hn, so muß ersichtlich sein

$$
39)\quad
\begin{aligned}
R_{hx} &= R_{hp}\,.\,0 + R_{hn}\,r_h,\\
R_{hy} &= -R_{hp}\frac{\gamma_h}{r_h} - R_{hn}\frac{\alpha_h\beta}{r_h},\\
R_{hz} &= R_{hp}\frac{\beta}{r_h} - R_{hn}\frac{\alpha_h\gamma_h}{r_h},\quad \text{wobei } r_h = \sqrt{\beta^2+\gamma_h^2} = \sqrt{1-h^2l^2},
\end{aligned}
$$

wodurch natürlich die erste Gleichung (38) identisch erfüllt ist. Der Symmetrie halber setzen wir, um sogleich auch die zweite Formel (38) zu befriedigen,

$$
40)\quad
\begin{aligned}
D_{hx} &= D_{hp}\,.\,0 + D_{hn}\frac{r_h'}{\mathfrak{n}},\\
D_{hy} &= -D_{hp}\frac{\nu_h}{r_h'} - D_{hn}\frac{\alpha_h\beta}{r_h'\mathfrak{n}},\\
D_{hz} &= D_{hp}\frac{\beta}{r_h'} - D_{hn}\frac{\alpha_h\nu_h}{r_h'\mathfrak{n}},\quad \text{wobei } r_h' = \sqrt{\beta^2+\nu_h^2} = \sqrt{\mathfrak{n}^2-h^2l^2}.
\end{aligned}
$$

So erhält man

$$
41)\quad
\begin{aligned}
L_h &= \left(R_{hp}\frac{\gamma_h}{r_h} + R_{hn}\frac{\alpha_h\beta}{r_h}\right) - \left(D_{hp}\frac{\nu_h}{r_h'} + D_{hn}\frac{\alpha_h\beta}{r_h'\mathfrak{n}}\right),\\
M_h &= -\left(R_{hp}\frac{\alpha_h\beta}{r_h} - R_{hn}\frac{\gamma_h}{r_h}\right) + \left(D_{hp}\frac{\alpha_h\beta}{r_h'} - D_{hn}\frac{\nu_h\mathfrak{n}}{r_h'}\right),\\
N_h &= \qquad\qquad - R_{hn}\,r_h \qquad\qquad + D_{hn}\frac{r_h'}{\mathfrak{n}},\\
P_h &= \qquad R_{hp}\,r_h \qquad\qquad - D_{hp}\,r_h'
\end{aligned}
$$

und bei Elimination von D_{hp} und D_{hn} da $r_h'^2 - r_h^2 = \mathfrak{n}^2 - 1$

42)
$$\begin{aligned} L_h r_h'^2 + N_h \alpha_h \beta - P_h \nu_h \\ = \frac{1}{r_h}\left[R_{hp}(\gamma_h r_h'^2 - \nu_h r_h^2) + R_{hn}\alpha_h \beta(\mathfrak{n}^2 - 1)\right], \\ M_h r_h'^2 + N_h \mathfrak{n}^2 \nu_h + P_h \alpha_h \beta \\ = \frac{1}{r_h}\left[-R_{hp}\alpha_h \beta(\mathfrak{n}^2 - 1) + R_{hn}(\gamma_h r_h'^2 - \mathfrak{n}^2 \nu_h r_h^2)\right]. \end{aligned}$$

Betrachtet man mod. $(\mathfrak{n}^2)$ als groß neben Eins, so wird in erster Annäherung, da sich hier ν, ν_h und r_h' mit $\mathfrak{n}$ vertauschen lassen,

43)
$$\begin{aligned} L_h &= -2i\,\mu\zeta_h E_p \frac{\mathfrak{n}\gamma\beta^2}{\mathfrak{n}\gamma + 1}, \\ M_h &= +2i\,\mu\zeta_h E_x \gamma(\mathfrak{n} - \gamma), \\ N_h &= -2i\,\mu\zeta_h E_p \frac{\mathfrak{n}\gamma\beta\alpha_h}{\mathfrak{n}\gamma + 1}, \\ P_h &= -2i\,\mu\zeta_h E_p \frac{\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}\gamma + 1}, \end{aligned}$$

und die Gleichungen (42) nehmen die Form an

44)
$$\begin{aligned} L_h \mathfrak{n} - P_h &= \frac{1}{r_h}\left[R_{hp}(\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2) + R_{hn}\mathfrak{n}\alpha_h\beta\right], \\ M_h + N_h \mathfrak{n} &= \frac{1}{r_h}\left[-R_{hp}\alpha_h\beta + R_{hn}(\gamma_h - r_h^2 \mathfrak{n})\right]. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich R_{hp} und R_{hn}; wir wollen die ziemlich komplizierten Ausdrücke aber nicht hinschreiben und nur bemerken, daß, wenn man setzt

45)
$$\frac{R_{hp}}{R_{hn}} = e^{i\Delta} \operatorname{tg} \omega,$$

dann ω das wiederhergestellte lineäre Azimut des reflektiert gebeugten Lichtes, und Δ die Verzögerung der n- gegen die p-Komponente bezeichnet. ω ist dabei in dem Quadranten $(+p, +n)$ von der $+p$- nach der $+n$-Richtung positiv gerechnet.

6) Die einfachsten Verhältnisse ergeben sich für $E_p = 0$, d. h. für den Einfall von Licht, das nach der Einfallsebene polarisiert ist; hier findet sich bei $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$ aus

$$\frac{R_{hp}}{R_{hn}} = -\frac{\mathfrak{n}\alpha_h\beta}{\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2},$$

46) $$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\varkappa r_h^2}{\gamma_h n(1+\varkappa^2) - r_h^2},$$

$$\frac{|R_{hp}|^2}{|R_{hn}|^2} = \frac{\alpha_h^2\beta^2 n^2(1+\varkappa^2)}{(\gamma_h n - r_h^2)^2 + \gamma_h^2 n^2\varkappa^2} = \operatorname{tg}^2\omega_h.$$

Eine noch rohere Annäherung ergibt sich, indem man r_h^2 neben $\mathfrak{n}\gamma_h$ vernachlässigt, was natürlich bei kleinen γ_h ganz unzulässig wird. Dann findet sich R_{hp}/R_{hn} reell, also daß Licht lineär polarisiert nach dem Azimut

47) $$\operatorname{tg}\omega_h = \frac{\alpha_h\beta}{\gamma_h}.$$

Diese Annäherung entspricht ersichtlich dem Fall der vollkommenen Reflexion. Da $\alpha_h = hl$ sein Vorzeichen mit dem von h variiert, so ist ω_h für $\pm h$ entgegengesetzt. γ_h bestimmt sich aus $\gamma_h = -\sqrt{1-\beta^2-h^2 l^2}$.

Eine etwas weitergehende Annäherung gibt

48) $$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\varkappa r_h^2}{\gamma_h n(1+\varkappa^2)},$$
$$\operatorname{tg}\omega_h = \frac{\alpha_h\beta}{\gamma_h - \dfrac{n r_h^2}{n^2(1+\varkappa^2)}}.$$

Der nächst einfache Fall stellt sich dar, wenn $E_x = 0$ also das einfallende Licht normal zur Einfallsebene polarisiert ist. Hier gilt

49) $$\frac{R_{hp}}{R_{hp}} = -\frac{\mathfrak{n}(\alpha_h^2-\gamma^2)+\gamma^2\gamma_h}{\beta\alpha_h[(\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2)-\gamma^2]}.$$

In erster roher Annäherung wird hier wieder R_{hp}/R_{hn} reell, nämlich

50) $$R_{hp}/R_{hn} = -\frac{\alpha_h^2\beta^2 - r_h^2\gamma^2}{\alpha_h\beta\gamma_h} = -\frac{\alpha_h^2-\gamma^2}{\alpha_h\beta\gamma_h} = \operatorname{tg}\omega_h'.$$

Genauer gilt

51) $$\operatorname{tg}\omega_h' = -\frac{1}{\beta\alpha_h}\,\frac{\alpha_h^2-\gamma^2+\dfrac{\gamma^2\gamma_h}{n(1+\varkappa^2)}}{\gamma_h - \dfrac{r_h^2+\gamma^2}{n(1+\varkappa^2)}}$$
$$\operatorname{tg}\Delta' = \frac{\varkappa}{n(1+\varkappa^2)}\cdot\frac{\gamma^2\gamma_h^2+(\alpha_h^2-\gamma^2)(r_h^2+\gamma^2)}{(\alpha_h^2-\gamma^2)\gamma_h}.$$

7) Etwas komplizierter ist der Fall $E_x = \pm E_p$, d. h. derjenige von einfallendem im Azimut $\pm 45^\circ$ gegen die Einfallsebene polarisierten Licht. Man erkennt von vorn herein, daß in diesem Fall sich das $+h$ te und das $-h$ te Beugungsspektrum verschieden verhalten, was durchaus den Symmetrieverhältnissen des Vorganges entspricht.

Im übrigen gilt jetzt nach (44) in früherer Annäherung

$$53) \qquad \frac{\mathfrak{n}\gamma^2}{-\mathfrak{n}(\alpha_h \beta \pm \gamma) \pm \beta^2} = \frac{R_{hp}(\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2) + R_{hn}\mathfrak{n}\alpha_h \beta}{-R_{hp}\alpha_h \beta + R_{hn}(\gamma_h - \mathfrak{n} r_h^2)},$$

woraus dann folgt

$$53) \qquad \frac{R_{hp}}{R_{hn}} = \frac{A\mathfrak{n} + B}{C\mathfrak{n} + D}$$

und bedeutet $A = \alpha_h^2 - \gamma^2 \mp \alpha_h \beta\gamma$, $B = \gamma_h \gamma^2 \mp \alpha_h \beta^3$,

$C = -\gamma_h(\alpha_h \beta \mp \gamma)$, $D = \alpha_h \beta(\gamma^2 + r_h^2) \pm (\gamma_h \beta^2 - \gamma r_h^2)$.

Wieder gibt die rohe erste Annäherung R_{hp}/R_{hn} reell, nämlich

$$54) \qquad \frac{R_{hp}}{R_{hn}} = \frac{A}{C} = -\frac{\alpha_h^2 - \gamma^2 \mp \alpha_h \beta\gamma}{\gamma_h(\alpha_h \beta \mp \gamma)} = \operatorname{tg} \omega'',$$

also lineäre Polarisation mit etwas geändertem Azimut. Eine weitergehende Annäherung liefert

$$53) \qquad \operatorname{tg} \Delta'' = \frac{\varkappa(BC - AD)}{ACn(1+\varkappa^2)}, \quad \operatorname{tg} \omega'' = \frac{A + B/n(1+\varkappa^2)}{C + D/n(1+\varkappa^2)}.$$

8) Gehen wir nun zur weiteren Entwickelung der Formeln (26) für die regelmäßig reflektierte Welle über, so ist zunächst zu bemerken, daß die Glieder mit ζ_0^2 gestrichen werden können. In der Tat: dividiert man die Gleichungen sämtlich durch $1 - \frac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2$ und beschränkt sich auf die Glieder zweiter Ordnung, so erhalten nur alle D_x, D_y, D_z den Faktor $1 - \frac{1}{2}\mu^2(\nu^2 - \gamma^2)\zeta_0^2$, der also bei Elimination der D selbst mit herausfällt.

Führt man dann noch die Komponenten nach p und x resp. p_h und n_h ein, so erhält man für $\alpha = 0$ das folgende System

$$(E_p + R_p)\gamma - D_p \frac{\nu}{\mathfrak{n}} = i\mu(S)\left[\left(R_{hp}\frac{\gamma_h}{r_h} + R_{hn}\frac{\alpha_h \beta}{r_h}\right)\gamma_h - \left(D_{hp}\frac{\nu_h}{r_h'} + D_{hn}\frac{\alpha_h \beta}{r_h'\mathfrak{n}}\right)\nu_h\right]\zeta_{-h},$$

$$-(E_x - R_x)\gamma + D_x \nu = i\mu(S)\left[\left(-R_{hp}\frac{\alpha_h \beta}{r_h} + R_{hn}\frac{\gamma_h}{r_h}\right)\gamma_h + \left(D_{hp}\frac{\alpha_h \beta}{r_h'} - D_{hn}\frac{\nu_h \mathfrak{n}}{r_h'}\right)\nu_h\right]\zeta_{-h},$$

$$E_x + R_x - D_x = i\mu(S)\left[\left(R_{hp}\frac{\alpha_h \beta}{r_h} - R_{hn}\frac{\gamma_h}{r_h}\right) - \left(D_{hp}\frac{\alpha_h \beta}{r_h} - D_{hn}\frac{\nu_h \mathfrak{n}}{r_h'}\right)\right]\zeta_{-h},$$

$$E_p - R_p - D_p \mathfrak{n} = i\mu(S)\left[R_{hp}\frac{r_h^2 - \alpha_h^2}{r_h}\gamma_h - R_{hn}\frac{\alpha_h \beta}{r_h} - D_{hp}\frac{r_h'^2 - \alpha_h^2}{r_h'}\nu_h + D_{hn}\frac{\mathfrak{n}\alpha_h \beta}{r_h'}\right]\zeta_{-h}.$$

In diesen Formeln sind nun die Resultate des vorigen Abschnittes bezüglich der R_{hp}, R_{hn}, D_{hp}, D_{hn} einzusetzen. Da uns aber nur die reflektierten Amplituden interessieren, wollen wir von allem Anfang an die eindringenden, d. h. D_p und D_z eliminieren. Wir erhalten auf diese Weise in der alten Annäherung:

$$
\begin{aligned}
&(E_p + R_p)\mathfrak{n}\gamma - (E_p - R_p) \\
&\quad = i\mu(S)\Big[R_{hp}\frac{\gamma_h}{r_h}(\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2 + \alpha_h^2) + R_{hn}\frac{\alpha_h\beta}{r_h}(\mathfrak{n}\gamma_h + 1) \\
57)\quad &\qquad - D_{hp}\alpha^2 - D_{hn}2\alpha_h\beta\Big]\zeta_{-h}, \\
&(E_z + R_z)\mathfrak{n} - (E_z - R_z)\gamma \\
&\quad = i\mu(S)[R_{hp}\alpha_h\beta - R_{hn}\gamma_h]\left(\frac{\mathfrak{n}-\gamma_h}{r_h}\right)\zeta_{-h}.
\end{aligned}
$$

Beschränken wir uns auf ein symmetrisches Profil der Gitterfurchen, so ist $\zeta_h = +\zeta_{-h}$, und Summen von der Form $(S)\alpha_h\zeta_h\zeta_{-h}$ müssen verschwinden, weil $\alpha_h = -\alpha_{-h}$. Hiermit hängt zusammen, daß dann die rechte Seite der ersten Formel (57) nur E_p, diejenige der zweiten nur E_z enthalten hann. Wir können somit z. B. die zweite Summe aus (57) berechnen, indem wir L_h, P_h, N_h mit Null vertauschen.

Wir erhalten so

$$\frac{R_{hp}}{r_h} = -\frac{\mathfrak{n}\alpha_h\beta}{\varDelta_h}M_h, \quad \frac{R_{hn}}{r_h} = \frac{\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2}{\varDelta_h}M_h,$$

wobei

$$\varDelta_h = (\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2)(\gamma_h - \mathfrak{n}r_h^2) + \mathfrak{n}\alpha_h^2\beta^2,$$

also

$$58)\quad \frac{1}{r_h}(R_{hp}\alpha_h\beta - R_{hn}\gamma_h) = -(\mathfrak{n}\alpha_h^2\beta^2 + \gamma_h(\mathfrak{n}\gamma_h - r_h^2))\frac{M_h}{\varDelta_h}.$$

Ferner folgt aus (41)

$$59)\quad D_{hp} = (R_{hp}r_h - P_h)/\mathfrak{n}, \quad D_{hn} = (R_{hn}r_h + N_h),$$

und bei Einsetzung dieser Ausdrücke in die erste Formel (57) und Benutzung der Werte von R_{hp} und R_{hn} aus (44) bei Fortlassung von M_h dann die ganze rechte Seite der ersten Gleichung (57).

Um die resultierenden komplizierten Ausdrücke zu vereinfachen, beschränken wir uns in ihnen auf die Glieder höchster Ordnung inbezug auf $\mathfrak{n}$. R_{hp} und R_{hn} sind nach (43) und (44) von nullter Ordnung, und Gleiches gilt nach (43) inbezug auf $P_h/\mathfrak{n}$ und N_h.

Somit sind in der ersten Summe (57) die höchsten Glieder

$$\frac{\mathfrak{n}\gamma_h}{\gamma_h}(R_{hp}\gamma_h + R_{hn}\alpha_h\beta),$$

und da die erste Formel (44) in der gleichen Annäherung rechts dieselbe Klammer erhält, so ergibt dies schließlich

60) $$\gamma_h(\mathfrak{n}L_h - P_h) = 2i\mu\zeta_h E_p \mathfrak{n}\gamma^2\gamma_p.$$

Die höchsten Glieder der zweiten Summe (57) werden in derselben Annäherung zu

61) $$\frac{\gamma^2}{\gamma_h}M_h = 2i\mu\zeta_h E_x \mathfrak{n}\frac{\gamma^3}{\gamma_h},$$

woraus erhellt, daß diese Annäherung unzulässig wird, wenn eines der γ_h der Null nahe kommt.

Demgemäß nehmen die Formeln (57) schließlich die Gestalt an

62) $$\begin{aligned} R_p(\mathfrak{n}\gamma+1) &= -E_p(\mathfrak{n}\gamma - 1 + 2\mathfrak{n}\mu^2\gamma^2(S)\gamma_h\zeta_h\zeta_{-h}),\\ R_x(\mathfrak{n}+\gamma) &= -E_x\left(\mathfrak{n}-\gamma+2\mathfrak{n}\mu^2\gamma^2(S)\frac{\zeta_h\zeta_{-h}}{\gamma_h}\right). \end{aligned}$$

Für ihre Diskussion denken wir uns ein Gitter und einen Einfallswinkel derart gewählt, daß nur die beiden Beugungsbilder $h = \pm 1$ zustande kommen. Wir schreiben dann die Formel (62)

63) $$\begin{aligned} R_p &= -E_p P_p\left(1+\frac{\mathfrak{n}\sigma}{\mathfrak{n}\gamma-1}\gamma^2\gamma_1\right)\\ R_x &= -E_x P_x\left(1+\frac{\mathfrak{n}\sigma}{\mathfrak{n}-\gamma}\frac{\gamma^3}{\gamma_1}\right), \end{aligned}$$

wobei $\sigma = 4\mu^2\zeta_1\zeta_{-1}$.

Wegen der Kleinheit von σ kann man dann schreiben

64) $$\frac{R_p}{R_x} = \frac{E_p P_p}{E_x P_x}e^{(p+iq)\gamma^2\sigma}$$

wobei

65) $$\left\{\begin{aligned} p+iq &= \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}\gamma-1}\gamma_1 - \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}-\gamma}\frac{\gamma}{\gamma_1}\\ \text{und}\quad \frac{P_p}{P_x} &= \operatorname{tg}\omega_0 e^{i\Delta_0}, \end{aligned}\right.$$

ω_0 und Δ_0 aber die Werte ω und Δ bei fehlenden Gitterfurchen darstellen. Es ergibt sich dann wegen $\mathfrak{n} = n(1-i\varkappa)$

66) $$\begin{aligned} p &= \frac{n^2(1+\varkappa^2)\gamma - n}{(n\gamma-1)^2+n^2\varkappa^2\gamma^2}\gamma_1 - \frac{n^2(1+\varkappa^2)-\mathfrak{n}\gamma}{(\mathfrak{n}-\gamma)^2+n^2\varkappa^2}\frac{\gamma}{\gamma_1},\\ q &= nk\left(\frac{\gamma_1}{(n\gamma-1)^2+n^2\varkappa^2\gamma^2} - \frac{\gamma^3/\gamma_1}{(n-\gamma)^2+n^2\varkappa^2}\right). \end{aligned}$$

In früherer erster Annäherung bezüglich $1/n^2(1+\varkappa^2)$ findet sich daraus

$$67)\qquad p=\frac{\gamma_1}{\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma_1},\quad q=\frac{\varkappa}{n(1+\varkappa^2)}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma^2}-\frac{\gamma^2}{\gamma_1}\right).$$

Die geometrische Anschauung (s. Fig. 3 auf S. 6) ergibt nun, das $|\gamma_1|$ stets kleiner als γ sein muß, — in dem Falle, daß nur die Beugungsbilder ± 1 zustande kommen, sogar erheblich kleiner, derart daß häufig $|\gamma_1| < \gamma^2$ gesetzt werden darf[1]. In diesem Falle sind wegen $\gamma_1 < 0$ nach (67) sowohl p als $q > 0$, d. h., es wird durch die Beugungswirkung der Gitterfurchen sowohl der absolute Wert von ω, als auch $\varDelta$ vergrößert. Ist $\gamma^2 < |\gamma_1| < \gamma$, so findet sich $p > 0$, $q < 0$. Der Faktor $\varkappa/n(1+\varkappa^2)$ ist meist < 1.

Vertauscht man für eine qualitative Abschätzung der Wirkung einer streifigen Politur auf die Bestimmung der Metallkonstanten die bez. Streifen mit einer hinreichend feinen Gitterteilung, so ergeben sich die analogen Folgerungen. Bei den bezüglichen Beobachtungen ist der benutzte Einfallswinkel sehr groß, γ also sehr klein. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens nur der Beugungsspektren ± 1 nimmt damit zu. In der Tat sind die möglichen Ordnungszahlen $\pm h$ begrenzt durch die Ungleichnng

$$-\gamma < hl < +\gamma.$$

Für das Rowland-Gitter, auf welches sich die Beobachtungen des II. Teiles beziehen, gibt nach Frl. Collet Fig. 4 eine Anschauung von den bezüglichen allgemeinen Verhältnissen.

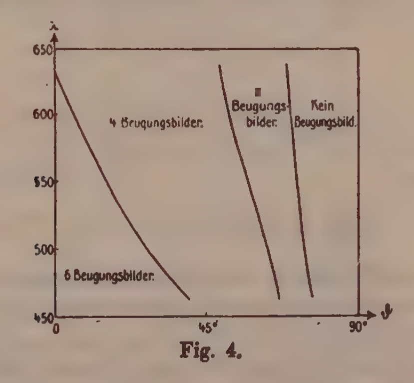


Fig. 4.

1) Natürlich ist für Werte γ_1 die der Null sehr nahe kommen, die in (67) benutzte Annäherung wiederum unzulässig.

Über die Wirkung einer streifigen Politur parallel der Einfallsebene auf den Polarisationszustand des regelmäßig reflektierten Lichtes hat Drude[1]) — speziell für Kupfer, wo $\varkappa/n\,(1+\varkappa^2)$ etwa $= 1/3$ ist, — ausführliche Beobachtungen angestellt. Dieselben ergaben eine beträchtliche Vergrößerung des Azimutes ω, dagegen eine kaum merkliche Änderung der Verzögerung Δ. Man darf diese Resultate als durch die vorstehenden Überlegungen erklärt ansehen. Die Vergrößerung des Azimutes ω ergibt sich nämlich aus ihnen unmittelbar, und was die Veränderung der Verzögerung Δ angeht, so darf man für nur qualitative Schlüsse die unregelmäßige Streifung durch die Politur als eine Superposition von regelmäßigen ansehen, die zum Teil $\gamma^2 > |\gamma_1|$ zum Teil $\gamma^2 < |\gamma_1|$ liefern, deren Wirkungen sich also bezüglich q gegenseitig zerstören können.

Bemerkung. In meiner vorigen Arbeit über Gitterbeugung muß S. 263 (resp. 7) Z. 15 v. o. stehen: $-\nu\,(\gamma_h\,\mathfrak{n}^2\,({}^2\mathfrak{n}-\nu\nu_h)+\nu_h\,(\mathfrak{n}^2+\nu\gamma_h))$.

II. Experimenteller Teil.

Von **Paule Collet.**

Zur Prüfung der vorstehend entwickelten Theorie wurden folgende Beobachtungen gemacht. Man ließ monochromatisches Licht auf ein Rowland-Metallgitter fallen, dessen Furchen parallel der Einfallsebene waren. Die Elliptizität des gebeugten Lichtes wurde mit Hülfe eines Soleil-Babinetschen Kompensators und eines Analysators bestimmt. Andrerseits wurden Azimut und Phasenverzögerung berechnet. Die experimentellen und die theoretischen Kurven, nach den Werten von λ als Abszissen hergestellt, wurden dann verglichen.

9) Apparate.

Der erste Spalt von einem geeichten Monochromator wurde mit dem Bild eines vertikalen Nernstfadens beleuchtet. Der zweite Spalt lieferte monochromatisches Licht, das durch einen Nicol auf das Gitter fiel und in dem Fernrohr eines Analysators zum Erlöschen gebracht wurde. Vor diesem Fernrohr wurde der Kompensator befestigt. Eine von seinen Schwingungsrichtungen blieb bei allen Messungen parallel zur Einfallsebene.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 39, p. 492 u. f. 1890.

Bei den früheren Untersuchungen über die Polarisation gebeugten Lichtes genügte es, daß beide Fernrohre in der horizontalen Einfalls-Ebene beweglich waren. Hier aber, wo die Beugungsbilder sich nach S. 2 auf einem Kegel befinden, mußte der Analysator einen zweiten Grad der Freiheit haben. Die hierzu getroffene Einrichtung ist in Fig. 5 am Schluß dargestellt.

Das Fernrohr wurde an einem Ende eines beweglichen Armes befestigt, der am anderen Ende ein Gegengewicht trug. Dieser Hebelarm konnte sich in einer vertikalen Ebene frei bewegen, um einen Punkt der in der Einfallsebene lag. Bei horizontalem Hebel war also die Achse des Analysators in der Einfallsebene. Auf dem üblichen eingeteilten Kreis konnte man den Winkel der Achsen der beiden Fernrohre leicht ablesen. Damit wurden die Einfallswinkel bestimmt. Die Beugungswinkel brauchten nicht abgelesen zu werden, da sie sich nach S. 2 aus dem Einfallswinkel und der Gitterkonstante berechnen lassen.

Das Rowland-Gitter (von der Gitterkonstante 0,001759 mm) befand sich auf dem Tischchen des Spektrometers, in der Mitte des Kreises, an einen vertikalen Ständer gelehnt und durch drei Schrauben in einer vertikalen Stellung befestigt. Eine Bremse hielt das Tischchen fest beim Drehen des Fernrohrs.

Die Eichung des Monochromators geschah mit Hilfe einer Heliumröhre. Die Nullstellen der Nicols wurden erstens mit Hülfe eines dritten Nicols, zweitens mit einer Krystallplatte bestimmt. Beide Bestimmungen stimmten bis zu wenigen Minuten überein. Diese Beobachtungen wurden im Verlauf der Experimente mehrfach wiederholt, ohne daß eine Veränderung bemerkbar war.

Bei dem Kompensator dagegen zeigte es sich, daß die Nullpunkte für verschiedene Wellenlängen nicht absolut fest waren. Daher wurden sie von neuem nach jeder Reihe von Beobachtungen bestimmt.

10) Beobachtungen.

Die Beobachtungen bestehen aus folgenden Reihen:

I. Einfallswinkel $\vartheta = 60^0$ Einfallendes Licht polarisiert in der Einfallsebene.

II. Einfallswinkel $\vartheta = 40^0$ Einfallendes Licht polarisiert in der Einfallsebene.

III. Einfallswinkel $\vartheta = 40^0$ Einfallendes Licht polarisiert senkrecht zur Einfallsebene.

IV. Einfallswinkel $\vartheta = 60^0$ Einfallendes Licht polarisiert 45^0 zu der Einfallsebene.

V. Einfallswinkel $\vartheta = 60^0$ Einfallendes Licht polarisiert 45^0 zu der Einfallsebene.

VI. Einfallswinkel $\vartheta = 40^0$ Einfallendes Licht polarisiert 45^0 zu der Einfallsebene.

In jedem Fall sind die Beobachtungen für fünf Werte von λ gemacht worden, die sich von $460^{\mu\mu}$ bis $685^{\mu\mu}$ erstrecken.

Jeder angegebene Wert ist ein Mittelwert von 5 bis 8 Ablesungen, die sich gewöhnlich für das Azimut ω von 5′ bis 10′, für die Phasenverzögerung $\varDelta$ von 10′ bis 20′ vom Mittelwert entfernten. Die Genauigkeit wurde bei rotem Licht und für die Spektren zweiter Ordnung ein wenig geringer. Eine zeitliche Veränderung des Zustandes der Oberfläche des Gitters war nicht erkennbar.

Bei dem Einfallswinkel $\vartheta = 60^0$ bekommt man ein Spektrum oben und ein Spektrum unten, die beide, sowie das Hauptbild beobachtet wurden. Bei dem Winkel $\vartheta = 40^0$ bekommt man vier Beugungsbilder. Das zweite untere Spektrum konnte aber wegen gewisser praktischen Hindernisse nicht beobachtet werden. Übrigens konnte man natürlich durch Umkehrung des Gitters das zuvor unten befindliche Beugungsbild nach oben bringen. Um identische Verhältnisse zu erhalten mußte dabei auch Richtungssinn und Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in die symmetrische Position gebracht werden.

Jede Reihe von Beobachtungen wurde zweimal wiederholt mit zwei Stellungen des Gitters die sich durch eine Drehung von 180^0 um die Normale unterscheiden. In den Tabellen und Kurven sind sie durch die Indices α und β bezeichnet. Die zwischen ihnen bestehenden Differenzen beruhen nicht auf Beobachtungsfehlern, sondern auf Dissymmetrien in der Textur des Gitters.

I. (Pol. // Einfallsebene, $\vartheta = 60^0$.)

λ		α Unteres Sp.	α Oberes Sp.	β Unteres Sp.	β Oberes Sp.
$460^{\mu\mu}$	$\varDelta$	50°,14	44°	43°, 3	47°
	ω	— 27° 52′	35° 50′	— 32° 40′	31° 34′
493,5	$\varDelta$	49°	38°,57	43°, 4	44°, 6
	ω	— 30° 16′	38° 45′	— 39° 40′	26° 50′
539	$\varDelta$	43°, 8	44°, 7	46°	38°, 8
	ω	— 34° 9′	43° 42′	— 41° 40′	38° 54′
575,5	$\varDelta$	45°	41°,55	48°, 2	38°
	ω	— 38° 46′	43° 44′	— 42°	42°
635,5	$\varDelta$		34°, 5	37°, 4	37°, 4
	ω		46° 17′	— 46°	50° 8′

II. (Pol. // Einfallseb., $\vartheta = 40°$.)

λ		α Unteres Sp.	α I. Oberes Sp.	α II. Oberes Sp.	β Unteres Sp.	β I. Oberes Sp.	β II. Oberes Sp.
460	Δ	27°,8	36°	18°,35	26°	20°,6	18°,3
	ω	— 15° 15′	21° 3′	35° 30′	— 16° 50′	15° 38′	55° 23′
493,5	Δ	20°	26°,7	16°,2	23°,4	19°,35	16°,7
	ω	— 15° 36′	21° 1′	38° 17′	— 18° 57′	17° 28′	39° 20′
539	Δ	20°,4	24°,4	16°,6	24°,1	17°,9	13°,7
	ω	— 16° 49′	22° 56′	42° 10′	— 20° 7′	17° 27′	48° 2′
575,5	Δ	22°,5	20°,4	14°,3	23°,1	17°,4	15°,6
	ω	— 18° 30′	23° 50′	48° 26′	— 21° 38′	18° 44′	49°
635,5	Δ	?	20°,1	10°,5	?	16°,6	15°,8
	ω	? — 24°	26° 11′	54° 58′	— 22° 30′	22° 23′	53° 34′

III (Pol. ⊥ Einfallseb., $\vartheta = 40°$).

λ		α Unteres Sp.	α I. Oberes Sp.	α II. Oberes Sp.	β Unteres Sp.	β I. Oberes Sp.	β II. Oberes Sp.
460	Δ	28°,4	17°,2	27°,2	18°,3	23°,9	29°,8
	ω	82° 4′	— 72° 56′	— 61° 10′	79° 17′	— 75° 36′	— 58° 40′
493,5	Δ	38°,4	17°,6	21°,5	18°,3	34°	19°,4
	ω	81° 5′	— 72° 20′	— 58° 2′	78° 58′	— 76° 4′	— 59° 3′
539	Δ	35°	18°,8	21°,5	24°,8	31°	19°,1
	ω	79° 5′	— 72° 33′	— 53° 32′	77° 50′	— 73°	— 53° 10′
575,5	Δ	33°	19°	18°,6	22°,4	24°	15°,4
	ω	77° 51′	— 70° 33′	— 49° 22′	76° 12′	— 71° 50′	— 52° 5′
635,5	Δ		20°,6	19°		21°,8	18°,7
	ω		— 69°	— 30° 47′	? 72°	— 70° 40′	— 37°

IV (Pol. 45° z. Einfallseb., $\vartheta = 60°$).

λ		α Unteres Sp.	α Hauptbild	α Oberes Sp.	β Unteres Sp.	β Hauptbild	β Oberes Sp.
493,5	Δ	79°	70°	84°	84°	76°	55°
	ω	106°	131°	161° 30′	109° 5′	130°	157° 2′
539	Δ	85°,5	65°,75	49°	79°,40′	75°	45°,5
	ω	101° 45′	133° 12′	175° 40′	105° 30′	131° 20′	158° 30′
575,5	Δ	104°,75	61°	0°	80°	67°,8	32°,8
	ω	98° 20′	134° 30′	174° 20′	99° 50′	138° 8′	159°
635,5	Δ	163°,5′	49°,6	0°		56°,12	37°,80
	ω	96°	135° 20′	168° 29′		134°	160°

V (Pol. 45° z. Einfallseb., ϑ = 60°).

λ		α′			β′		
		Oberes Sp.	Hauptbild	Unteres Sp.	Oberes Sp.	Hauptbild	Unteres Sp.
493,5	Δ	64°	86°,4	94°,5	94°,5	67°,5	74°
	ω	159° 19′	130° 10′	113° 9	162° 40′	126° 35′	103° 10′
539	Δ	50°	82°	83°,5	58°,76	64°,3	70°,9
	ω	160°	133° 46′	108° 56′	171° 48′	129°	98°
575,5	Δ	44°,15	74°,8	79°,13	0°	59°,4	92°,5
	ω	160° 50′	137° 5′	103° 40	167°	130° 14′	94°
635,5	Δ	40°	64°	105°,2	6°,14	48°	143°,5
	ω	161° 4′	137° 58′	? 97° 42′	163°	131°	93° 24′

VII (Pol. 45° z. Einfallseb., ϑ = 40°).

		β				α			
		Unteres Sp.	Hauptbild	I. Oberes Sp.	II. Oberes Sp.	Unteres Sp.	Hauptbild	I. Oberes Sp.	II. Oberes S
	Δ	34°,4	33°,6	28°,2	0	25°,6′	25°,6	23°,3	23°,3
	ω	121° 50′	129° 40′	148° 19′	169° 7′	122° 42	130° 36′	150° 49′	171°
5	Δ	36°,8′	35°,2	26°	— 12°,9	28°,2	31°,4	26°,5	16°,6
	ω	122° 21′	131° 37′	152° 17′	166° 39′	122° 30′	129° 19′	156°	173°
	Δ	24°,8	35°,5	18°,6	— 22°,2	20°,7	32°,8	24°,2	— 31°,5
	ω	123° 17′	134° 40′	154° 30′	165° 25′	122° 6′	132° 8′	161° 30′	172°
5	Δ	21°,6	27°,7	9°,5	— 17°,8	10°,6	29°	7°,8	— 27°
	ω	122° 28′	133° 49′	153° 53′	166° 54′	119° 30′	133°	162° 50′	172° 22′
5	Δ	?	27°,5	11°	? — 14°,18	?	28°,3	5°,79	— 37°,2
	ω	115°	135° 56′	153° 49′	172° 54′	115°	135° 42′	162° 42′	176° 26′

Die Resultate der Beobachtungen in Bezug auf Δ und ω sind in den Tafeln I, II, III (IV, V) VI und VII durch die ausgezogenen Kurven dargestellt. Über die punktierten Kurven, welche durch Formeln von verschiedener Annäherung gegeben werden, wird weiter unten gesprochen werden.

Die Reihen I, II und III zeigen, daß, obwohl die Bedingungen hier symmetrisch sind, die oberen und unteren Spektren gleicher Ordnung nicht symmetrisch polarisiert sind, besonders was die Phasenverzögerung betrifft. Die Dissymmetrie, die kleiner für die Spektren zweiter Ordnung wird, ist für die ersten Beugungsbilder sehr auffallend. Man merkt aber, daß durch eine Umdrehung des Gitters um seine Normale, oberes und unteres Spektrum vertauscht

werden: die Kurven U_α und O_β einerseits, O_α und U_β andrerseits, haben einen ähnlichen Verlauf. Die Dissymmetrie scheint also vom Gitterprofil abhängig zu sein. Zu dieser Annahme wird man auch durch folgende Tatsachen geführt: Das hauptreflektierte Bild besitzt eine (zwar geringe) elliptische Polarisation und hat, in Bezug auf das einfallende Licht, ein Azimut von 30′ bis 2° 30′. Den Unterschied, der noch zwischen den Kurven U_α und O_β besteht, kann man durch die Annahme erklären, daß die Gitterfurchen nicht konstante Tiefen haben, sondern tiefer werden, wenn man sich einem Rand des Gitters annähert.

Für die Kurven II ist die Ähnlichkeit der Kurven U_α und O_β weniger auffallend. Es mag von dem großen plötzlichen Abnehmen der Phasenverzögerung, bei der α-Stellung, für $\lambda = 460^{\mu\mu}$ herrühren. Dies Abnehmen steht vermutlich im Zusammenhang mit einer sehr dissymmetrischen Verteilung der Lichtintensität, die hier stattfand. Sonst erschien die Intensitäts-Verteilung sehr regelmäßig. Bei kleinen Einfallswinkeln aber und kleinen Werten von λ war manchmal das Hauptbild kaum erleuchtet, und die einfallende Energie war fast auf das erste obere Spektrum konzentriert. In solchen Fällen sind die Annahmen der Theorie nicht berechtigt.

Die Reihen IV und V von Beobachtungen die in der Tafel (IV, V) durch Kurven O, U und O', U' unterschieden sind, unterscheiden sich nur durch die Veränderung des Richtungssinnes, in welchem das Licht auf das Gitter fällt. Es hat sich dabei gezeigt, daß dieser Richtungssinn, bei sonst unveränderten Zuständen, einen Einfluß hatte (Kurven IV_α, V_α). Diesen Einfluß können wir gleichfalls durch eine stetige Variation der Tiefe der Gitterfurchen erklären.

Dagegen sind solche Kurven wie IV_α und V_β für Fälle, wo das Licht in demselben Sinn einfällt, sehr ähnlich.

Der Unterschied zwischen den α- und β-Kurven ist, was die Phasenverzögerung betrifft, bei der Reihe VI sehr auffallend, und sogar mehr bei den zweiten, als bei den ersten Beugungsbildern.

11. Vergleichung mit der Theorie.

Für die Vergleichung mit der Theorie mußten die Metallkonstanten n und $\varkappa$ des Gittermaterials bekannt sein. Sie wurden durch Reflexionsbeobachtungen am polierten Rand der Gitterplatte bestimmt, indem die Elemente der Elliptizität des reflektierten Lichtes, Δ und ω, gemessen wurden.

Die Resultate sind in der nachstehenden Figur für Wellenlängen zwischen 450 und 650 $\mu\mu$ wiedergegeben.

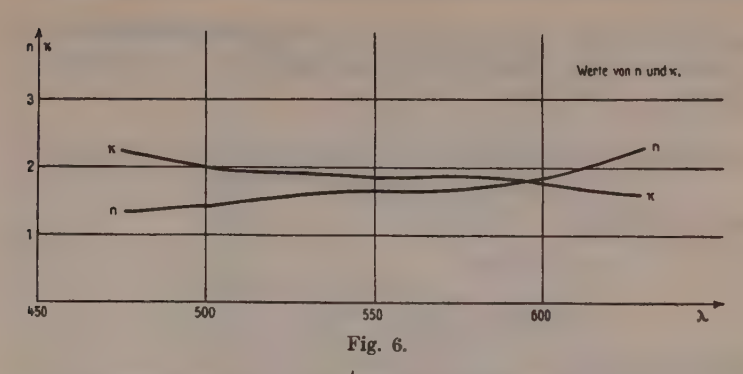


Fig. 6.

Zur Herstellung der berechneten theoretischen Kurven dienten folgende Formeln:

Tafel I und II. Licht polarisiert in der Einfallsebene (s. Abschnitt 6).

Erste grobe Annäherung

$$\begin{cases} \Delta_h = 0, \\ \operatorname{tg} \omega_h = -\frac{\alpha_h}{\gamma_h}\beta. \end{cases} \qquad \text{Kurve +++}$$

Zweite Annäherung

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \Delta_h = \frac{\varkappa r_h^2}{n\gamma_h(1+\varkappa^2)}, \\ \operatorname{tg} \omega_h = -\frac{\alpha_h \beta}{\gamma_h - \frac{r_h^2}{n(1+\varkappa^2)}}. \end{cases} \qquad \text{Kurve ---}$$

Für ω_h gibt die erste Formel um so bessere Resultate, je kleiner $\frac{r_h^2}{\gamma_h} = \frac{\beta^2+\gamma_h^2}{\gamma_h} = \frac{\beta^2}{\gamma_h} + \gamma_h$ ist, das heißt, je kleiner $||\gamma_h| - \beta|$ ist.

Wenn γ_h nahezu null ist (für $h = -2$ bei $\vartheta = 40^0$ und $\lambda = 650^{\mu\mu}$), wird diese erste Annäherung vermutlich keine gute sein. In diesem Fall wird auch die zweite Formel für $\operatorname{tg} \Delta_h$ nicht mehr gerechtfertigt sein; genauer ist dann die Formel

$$\operatorname{tg} \Delta_h = \frac{\varkappa r_h^2}{n\gamma_h(1+\varkappa^2) - r_h^2} \qquad \text{Kurve} \cdots$$

Die Übereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen kann hier als sehr gut bezeichnet werden. Für das Azimut könnte man sich kaum eine bessere denken. Auch für die Phasenver-

zögerung muß man sie noch als eine befriedigende ansehen, wenn man bemerkt, wie verschieden die beobachteten α- und β-Kurven schon sind.

Tafel III. Licht polarisiert senkrecht zur Einfallsebene (s. Abschnitt 6).

Erste Annäherung

$$\begin{cases} \Delta_h = 0, \\ \operatorname{tg} \omega_h = \dfrac{\gamma_h}{\alpha_h \beta} \end{cases} \qquad \text{Kurve} +++$$

Zweite Annäherung

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \Delta_h = \dfrac{\varkappa}{n \gamma_h (1+\varkappa^2)} [r_h^2 + \gamma^2 (1-\alpha_h)], \\ \operatorname{tg} \omega_h = \dfrac{\gamma_h}{\alpha_h \beta} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{\gamma^2}{n\gamma_h (1+\varkappa^2)}}{1 - \dfrac{r_h^2 + \gamma^2}{n \gamma_h (1+\varkappa^2)}}. \end{cases} \qquad \text{Kurve} \cdots$$

Für die Fälle, wo α_h groß ist, kann für Δ_h die Formel gelten

$$\operatorname{tg} \Delta_h = \frac{\varkappa r_h^2}{n \gamma_h (1+\varkappa^2)}, \qquad \text{Kurve} \mathrel{+\!\!+}\mathrel{+\!\!+}\mathrel{+\!\!+}$$

wie in dem Fall, wo das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist.

Die Übereinstimmung mit den Beobachtungen ist wiederum sehr gut. Was die Phasenverzögerung betrifft, stimmen die Kurven noch besser, als früher, überein. —

Es ist nun sehr merkwürdig und kaum ganz verständlich, daß, während bei Polarisation // und $\perp$ zur Einfallsebene die (angenäherten) Annahmen der Theorie sich durch die Beobachtung völlig befriedigend rechtfertigen, die Beobachtungen bei Polarisation unter 45° viel weniger gut, ja, was die Verzögerungen angeht, ganz unbefriedigend durch die Theorie dargestellt werden.

Tafel IV, V, VI. Licht polarisiert zu 45° der Einfallsebene (s. Abschnitt 7).

Erste grobe Annäherung

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \Delta_h = \dfrac{\varkappa (BC - AD)}{n A C (1+\varkappa^2)}, \\ \operatorname{tg} \omega_h = -\dfrac{A}{C} \end{cases} \qquad \text{Kurve} +++$$

Zweite Annäherung

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \Delta_\lambda = \dfrac{\varkappa(BC + AD)}{nAC(1+\varkappa^2) + BC + AD}, \\ \operatorname{tg} \omega_\lambda = - \dfrac{A + \dfrac{B}{n(1+\varkappa^2)}}{C + \dfrac{D}{n(1+\varkappa^2)}}. \end{cases} \qquad \text{Kurve} \cdots$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \alpha_\lambda^2 - \gamma^2 - \alpha_\lambda \beta \gamma, \\ B &= \gamma^2 \gamma_\lambda - \beta^2 \alpha_\lambda, \\ C &= \gamma_\lambda(\gamma - \alpha_\lambda \beta), \\ D &= \gamma_\lambda \beta^2 - \gamma r_\lambda^2 + \alpha_\lambda \beta (r_\lambda^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

A kann in einer und derselben Reihe von Beobachtungen sein Vorzeichen ändern; wenn A nahezu = null, ist natürlich die erste Annäherung keine gute.

Für das Azimut ist die Übereinstimmung mit den Beobachtungen ziemlich gut, und um so besser, je kleiner α_λ ist, das heißt, je näher das gebeugte Bild dem regelmäßig reflektierten Bilde steht.

Was die Phasenverzögerung betrifft, sind die Resultate, wie schon gesagt, wenig befriedigend. Die Abweichungen übertreffen alle diejenigen, welche Herr Pogany bei Gitterlinien $\perp$ zur Einfallsebene erhalten hat, bedeutend. An reine Beobachtungsfehler ist aber, obgleich die bez. Messungen zu den ersten von mir angestellten gehören, nicht zu denken. Es muß sonach in der Form der Gitterfurchen eine Abweichung von der Annahme der Theorie vorliegen, die sich bei der vorliegenden Art der Beobachtungen mehr geltend macht, als bei irgend einer anderen.

Tafel VII. Phasenverzögerung und Azimut des regelmäßig reflektierten Bildes.

In den Tabellen IV, V und VI sind die beobachteten Werte von Δ und ω auch für das Hauptbild gegeben. Die ausgezogenen Kurven von Tafel VII zeigen den Verlauf dieser Werte für verschiedene λ in dem Fall, wo das Licht 45° zu der Einfallsebene polarisiert ist.

Die punktierten Kurven sind mit den Formeln der gewöhnlichen Metallreflexion berechnet

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \omega = \dfrac{1 - \dfrac{\beta^2}{n\gamma(1+\varkappa^2)}}{1 + \dfrac{\beta^2}{n\gamma(1+\varkappa^2)}}, \\ \operatorname{tg} \Delta = - \dfrac{2\beta^2 \varkappa}{n\gamma(1+\varkappa^2)}. \end{cases} \qquad \text{Kurve} \cdots$$

Über den Sinn der Abweichungen, welche nach der Theorie zwischen den beobachteten und den in dieser Weise berechneten Kurven bestehen müssen, ist in Abschnitt 8 unter besonders einfachen Voraussetzungen gesprochen worden. Man darf die Beziehung $|\gamma_1| < \gamma^2$ wegen des relativ großen γ bei den Beobachtungen als erfüllt ansehen und demgemäß die Folgerungen $p > 0$, $q > 0$ als gültig betrachten. In der Tat geben die Beobachtungen, dieser Ungleichung entsprechend, eine Vergrößerung sowohl des Absolutwertes des Azimutes ω, als der Verzögerung Δ infolge der beugenden Wirkung der Gitterfurchen.

Bemerkung. Bei der Verkleinerung der Kurventafeln während der Reproduktion sind leider die Unterschiede zwischen den verschieden punktierten Kurven (..., – – –, + + +, ++ ++ ++) fast verschwunden. Es mag demgemäß hier noch ein besonderer Hinweis auf die Bedeutung der Kurven angefügt werden.

Tafel I. Obere Hälfte: Kurven + + +,
Untere Hälfte: Kurve + + + in der Abszissenaxe,
Kurve – – – darüber.

Tafel II. Obere Hälfte: Kurve + + + und – – –,
Untere Hälfte: Kurve + + + in der Abszissenaxe, – – – und ····.

Tafel III. Obere Hälfte: Kurve + + +,
Untere Hälfte: Kurve + + + in der Abszissenaxe, ++ ++ ++ und ····.

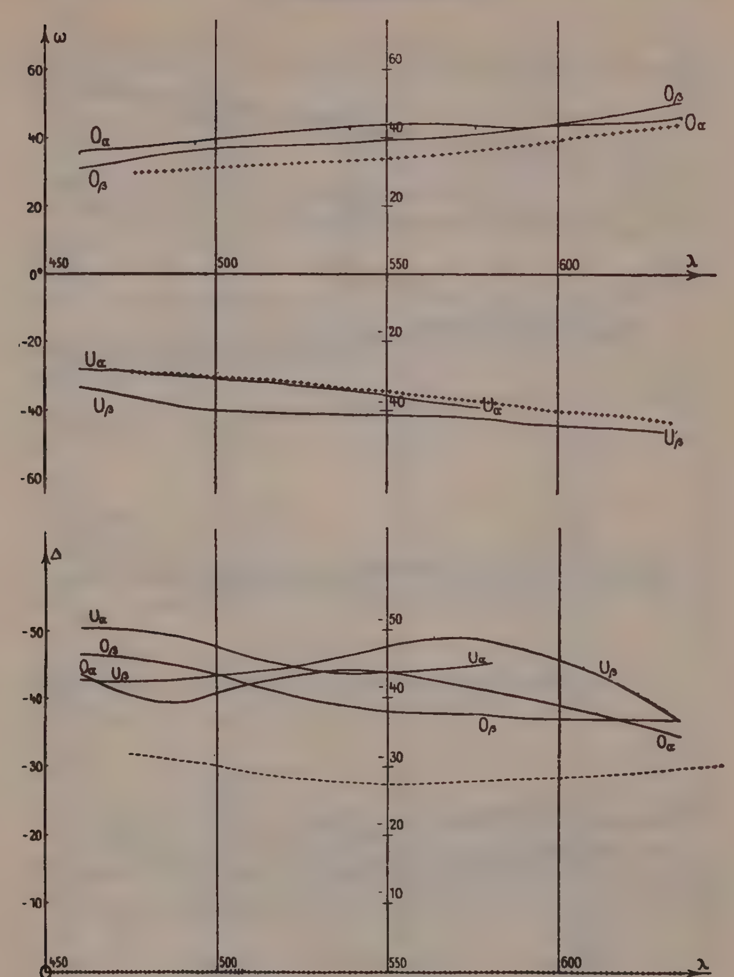
Tafel IV, V. Obere Hälfte: Kurve + + +,
Untere Hälfte: Kurve + + + und ····.

Tafel VI. Obere und untere Hälfte: Kurve + + + und ····

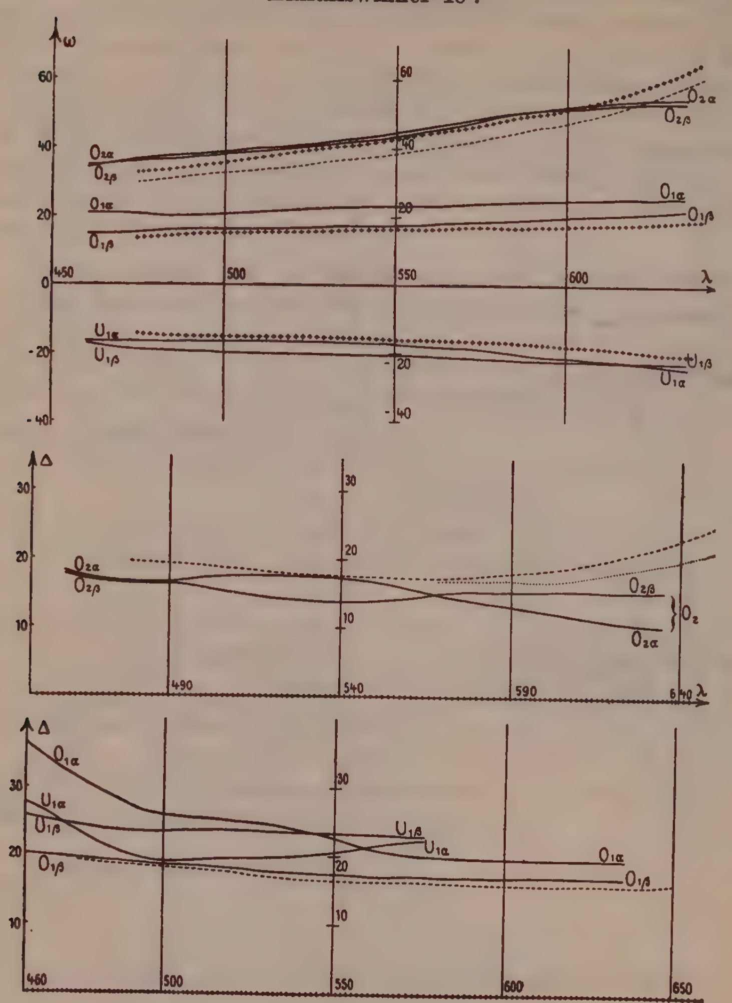
Tafel VII. Allenthalben: Kurve + + +.

Göttingen, im Januar 1912.

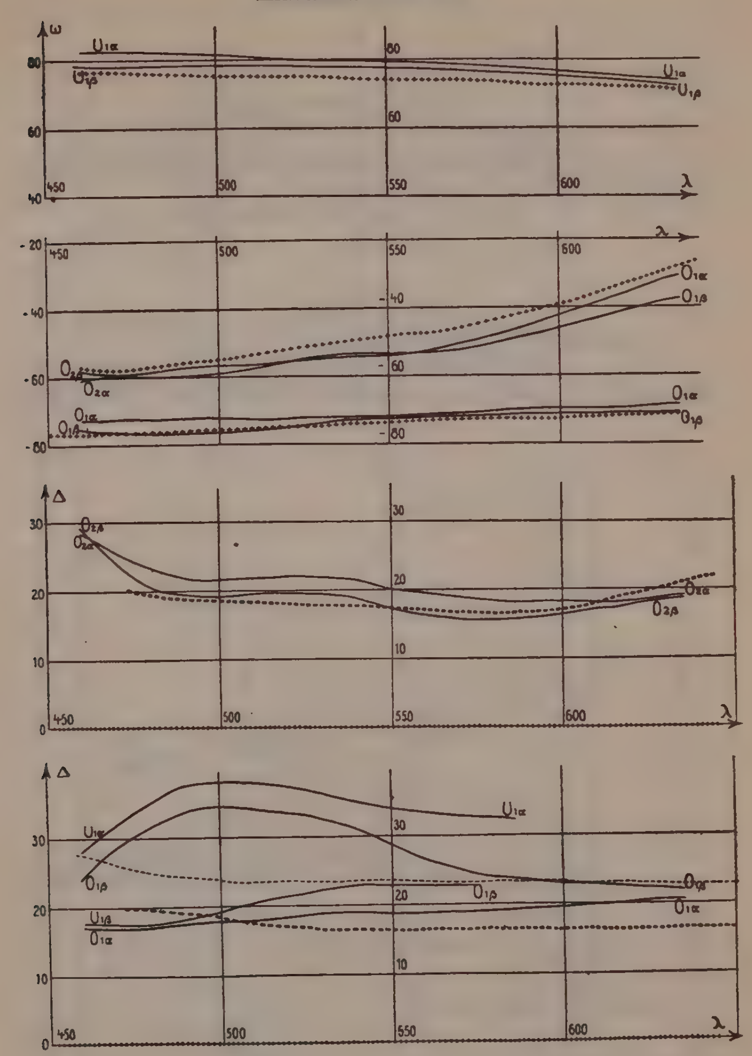
I. Einfallendes Licht parallel zur Einfallsebene polarisiert.
Einfallswinkel 60°.



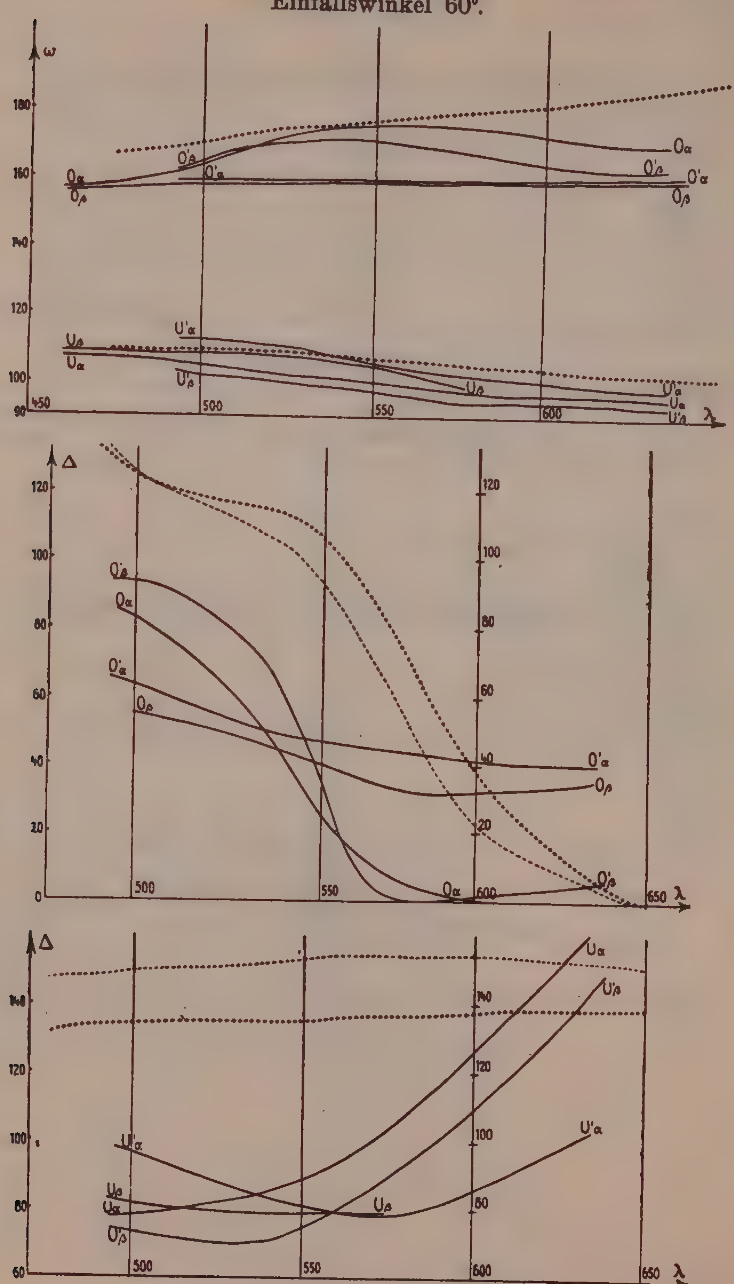
II. Einfallendes Licht parallel der Einfallsebene polarisiert. Einfallswinkel 40°.



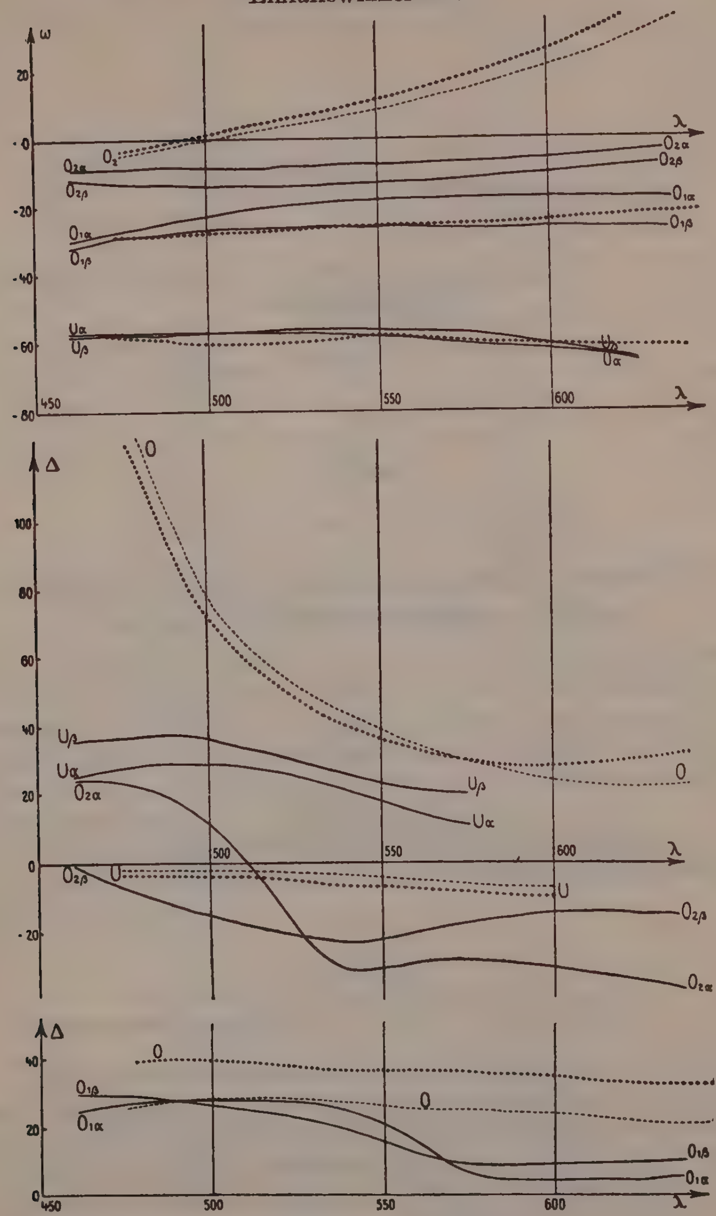
III. Einfallendes Licht normal zur Einfallsebene polarisiert.
Einfallswinkel 40°.



IV u. V. Einfallendes Licht unter 45° polarisiert.
Einfallswinkel 60°.

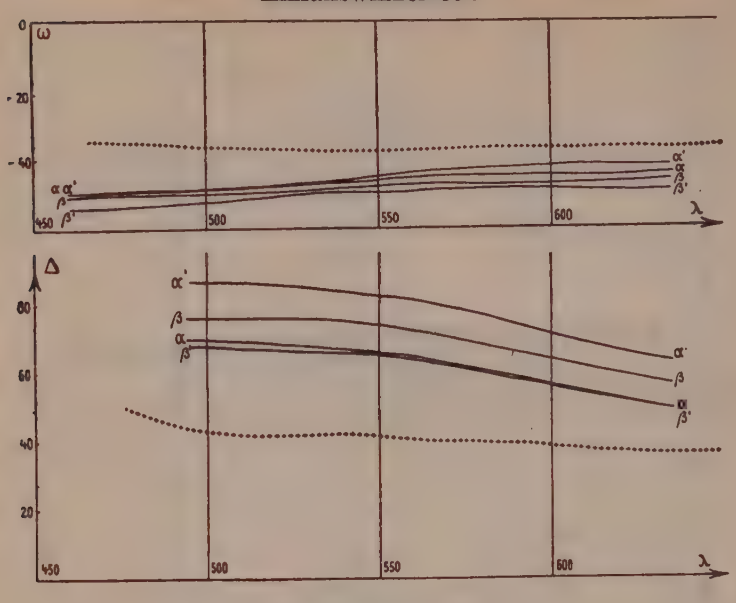


VI. Einfallendes Licht unter 45° polarisiert. Einfallswinkel 40°.

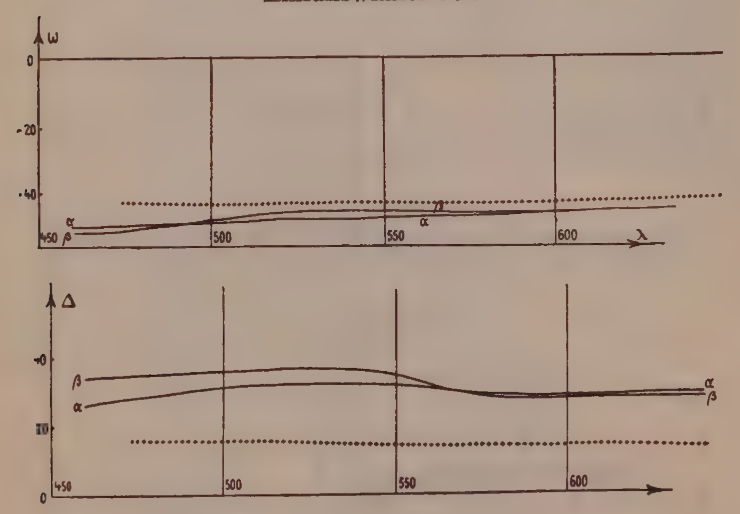


VII. Hauptbild. Einfallendes Licht unter 45° polarisiert.

Einfallswinkel 60°.



Einfallswinkel 40°.



Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen.

XXV.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Februar 1912.

I. Über die Darstellung eines neuen einfachen bicyclischen Terpens und tricyclischen Sesquiterpens.

Durch Polymerisation des Isoprens C_5H_8 kann man bekanntlich zu $(C_5H_8)_2 = C_{10}H_{16}$ Terpen, $(C_5H_8)_3 = C_{15}H_{24}$ Sesquiterpen und $(C_5H_8)_x$ Kautschuk gelangen. Das Isopren ist ein zweifach ungesättigter Kohlenwasserstoff mit offener Kohlenstoffkette, seine Polymerisationsprodukte sind Alkyl-substituierte Ringverbindungen von sehr verschiedenartigem Bau.

Man kennt nun einen mit Isopren isomeren Kohlenwasserstoff C_5H_8, der eine sehr einfache cyclische Verbindung vorstellt, nämlich das Cyclopenten

```
        CH
  CH2 /   \\ CH
     |     |
  CH2 ----- CH2
```

Es war von Interesse, falls man Verbindungen von der Zusammensetzung eines Terpens und eines Sesquiterpens aufbauen konnte, die nicht substituierte Ringsysteme vorstellen und die zu diesem Cyklopenten in einfacher Beziehung stehen. Von solchen Verbindungen war vorauszusetzen, daß sie im chemischen Verhalten bekannten Terpenkohlenwasserstoffen ähneln würden, während

man bezüglich ihrer **physikalischen Eigenschaften** ein abweichendes Verhalten erwarten durfte, das kennen zu lernen nach verschiedenen Gesichtspunkten hin von Wichtigkeit war.

Es ist mir gelungen die gewünschten Verbindungen zu erhalten und zwar aus einem Ausgangsmaterial, dessen Herstellung ich schon vor einigen Jahren aufgefunden habe. Es wurde damals gezeigt[1]), daß Cyklopentanon sich beim Zusammenbringen mit Natriumäthylat leicht zu 2 neuen Ketonen, einem bicyclischen und einem tricyclischen, condensieren läßt, denen die Formeln

```
                        O
          CH2           C̈
   CH2 /     \ C ====== C /     \ CH2
       |       |          |       |
   CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2
```

Cyklopentenpentanon $C_{10}H_{14}O$

und

```
                         O
         CH2             C̈              CH2
  CH2 /     \ C ===== C /   \ C ===== C /     \ CH2
      |       |         |     |         |       |
  CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2
```

Dicyklopentenpentanon $C_{15}H_{20}O$

zukommen.

Beide Ketone haben sich nun leicht nach **Paal** zu den **gesättigten** Ketonen $C_{10}H_{16}O$ und $C_{15}H_{24}O$ reduzieren lassen und diese waren wiederum nach der gewöhnlichen Reductionsmethode durch nascierenden Wasserstoff in alkalischer Lösung in die zugehörigen Alkohole $C_{10}H_{17}OH$ und $C_{15}H_{25}OH$ überführbar. Entzog man diesen Alkoholen Wasser, so erhielt man ein **Terpen** $C_{10}H_{16}$ und ein **Sesquiterpen** $C_{15}H_{24}$ von folgender Konstitution:

```
         CH2             CH
  CH2 /     \ CH ——— C //   \ CH2 ,   C10H16 und
      |       |        |      |
  CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2

        CH2              CH               CH2
 CH2 /     \ CH ——— C //   \ CH ——— CH /     \ CH2      C15H24.
     |       |        |      |         |       |
 CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2  CH2 ——————— CH2
```

Diese Kohlenwasserstoffe zeigen eine entsprechende Additions-

---

1) Ber. Chem. Ges. 29, 2963 (1896).

fähigkeit wie die bekannten Isomeren mit einer Äthylenbindung, sie nehmen z. B. leicht Nitrosylchlorid auf. Was die physikalischen Eigenschaften betrifft, so fällt der hohe Siedepunkt auf, sowie die größere Dichte und das etwas höhere Brechungsvermögen gegenüber den isomeren Verbindungen, die nicht aneinander hängende, sondern ineinander verschlungene Ringsysteme aufweisen.

Das Nähere ergibt sich aus der nachfolgenden Beschreibung der angestellten Versuche.

Cyklopentylpentanon $C_5H_9 . C_5H_7O$.

Die Wasserstoffaufnahme des Cyklopentenpentanons erfolgt bei gewöhnlicher Temperatur bei Gegenwart von Palladium sehr schnell. 40 Gramm des ungesättigten bicyclischen Ketons waren nach etwa einer Stunde Schüttelns mit Wasserstoff schon vollständig gesättigt. Das neue Keton zeigt folgende Eigenschaften: Siedepunkt 232—233° bei gewöhnlichem Druck, 117—120° unter 16^{mm}, $d_{21} = 0.9745$, $n_D = 1.4763$

Berechnet für $C_{10}H_{16}O$	Gefunden
M = 44.11	44.12.

Bemerkenswert ist der starke Menthon-Geruch des gesättigten Ketons, während das ungesättigte nur sehr schwach riecht.

Das Semicarbazon des Ketons $C_{10}H_{16}O$ schmilzt bei 210°, das Oxim bei 78—79°, das Chlorhydrat des Oxims bei 112—113°.

Wird das Keton mit einer alkoholischen Lösung von 1 Mol. Benzaldehyd und etwas Natriumäthylat versetzt, so findet schnell Kondensation zu der Benzyliden-Verbindung

O
=CHC₆H₅

statt, die fast farblose bei 97—98° schmelzende Krystalle bildet. 1.1448 gr gaben 0.4503 CO_2 und 0.1078 H_2O

Berechnet für $C_{17}H_{20}O$	Gefunden
C — 84.95	84.81
H — 8.39	8.33.

Ganz analog, wie es für das Cyklohexylhexanon [1]) nachgewiesen wurde, spaltet sich das Cyklopentylpentanon bei der Oxydation mit Chromsäure zu einer Ketosäure von gleichem Kohlenstoffgehalt auf, die als δ-Cyklopentyl-δ-keto-n-Valeriansäure

1) Annal. d. Chem. 381, 105 (1911).

[cyclopentyl ring]—$COCH_2\,CH_2\,CH_2\,CO_2H$

aufzufassen ist. Die Säure wurde nur ölig erhalten. Das Semicarbazon schmilzt bei 181—183°.

0.1934 gr geben 0.3866 CO_2 und 0.1372 H_2O.

Berechnet für $C_{11}H_{19}O_3N_3$	Gefunden
C – 54.73	54.52
H – 7.94	7.94

Cyklopentylpentanol, $C_5H_9 . C_5H_8OH$.

Dieser Alkohol entsteht glatt bei der Reduction des Cyklopentylpentanons in alkoholischer Lösung mit Natrium und hat folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 235—236°, d_{17} = 0.9785, n_D = 1.4884 bei 17°.

Berechnet für $C_{10}H_{17}OH$	Gefunden
M = 45.45	45.43.

0.1700 gr gaben 0.4842 CO_2 und 0.1743 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{17}OH$	Gefunden
C – 77.85	77.68
H – 11.77	11.47.

Bei der Umsetzung des Alkohols mit Phenylisocyanat entsteht ein bei 88—89° schmelzendes Phenylurethan.

Cyklopentylpenten, $C_{10}H_{16}$,



Dies Terpen wird erhalten, wenn man das Cyklopentylpentanol mit der doppelten Menge Chlorzink etwa 1 Stunde auf 150° erhitzt. Es weist folgende Eigenschaften auf:

Siedepunkt 196,5—198°, $d_{19,5}$ = 0.9080, n_D = 1.4938 bei 19,5°.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$ $|\!=$	Gefunden
M = 43.53	43.59.

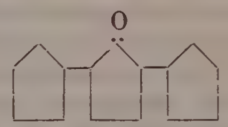
0.1736 gr gaben 0.5597 CO_2 und 0.1856 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C – 88.16	87.93
H – 11.84	11.96.

Wie schon oben bemerkt, unterscheidet sich dies Terpen, das zwei einfach mit einander verknüpfte Fünfringsysteme enthält, von den bekannten bicyclischen Terpenen durch bedeutend höheren Siedepunkt.

Mit Nitrosylchlorid liefert es ein mit Wasserdämpfen flüchtiges, bei 113—114° schmelzendes Additionsprodukt, das sich bezüglich seiner Reactionsfähigkeit ähnlich indifferent verhält, wie das Nitrosylchlorid des Cyklohexens.

Dicyklopentylcyklopentanon, $C_{15}H_{24}O$,



Als Ausgangsmaterial für die Darstellung dieser Verbindung diente das bei der Selbstcondensation von Cyklopentanon in einer Ausbeute von etwa 12—13 % entstehende Dicyklopentenpentanon $C_{15}H_{20}O$. Das bei 76—77° schmelzende gelb gefärbte Keton nimmt bei der Reduction nach Paal leicht 4 Wasserstoffatome auf und geht in das gesättigte farblose Dicyklopentylpentanon, $C_{15}H_{24}O$, von folgenden Eigenschaften über:

Ziemlich leicht bewegliche, wenig riechende Flüssigkeit, Siedepunkt 165—170° unter 12mm, $d_{19} = 0.9925$, $n_D = 1.4956$ bei 19°.

Berechnet für $C_{15}H_{24}O$	Gefunden
M = 65.02	64.71.

0.1944 gr geben 0.5836 CO_2 und 0.1883 H_2O.

Berechnet für $C_{15}H_{24}O$	Gefunden
C — 81.75	81.67
H — 10.98	10.81.

Das Keton erstarrt leicht beim Abkühlen, schmilzt aber wieder beim Herausnehmen aus Eiswasser.

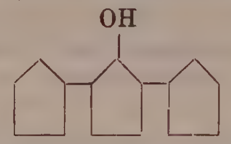
Das Semicarbazon schmilzt nicht ganz scharf bei 188—190°, das Oxim bei 85—86°.

Bei der Oxydation mit Chromsäure liefert auch dies Keton eine Ketosäure, die als α, δ-Dicyklopentyl-δ-keto-n-Valeriansäure

$$C_5H_9\,COCH_2\,CH_2\,CH\,(C_5H_9)\;COOH$$

aufzufassen ist. Das Semicarbazon dieser Säure schmilzt bei 195—196°.

Dicyklopentylcyklopentanol, $C_{15}H_{25}OH$,



entsteht leicht bei der Reduction des eben beschriebenen Ketons in alkoholischer Lösung mit Natrium. Dieser tricyclische Alkohol, der die Formel eines Sesquiterpenalkohols besitzt, ist fest und schmilzt bei 68°. Der Siedepunkt liegt bei 210° unter 100mm.

0.1496 gr gaben 0.4431 CO_2 und 0.1581 H_2O

Berechnet für $C_{15}H_{26}O$	Gefunden
C – 81.01	80.78
H – 11.79	11.82

Dicyklopentylcyklopenten, $C_{15}H_{24}$



entsteht durch etwa halbstündiges Erhitzen des Alkohols $C_{15}H_{25}OH$ mit Chlorzink auf 150—200° in guter Ausbeute und hat folgende Eigenschaften: Siedepunkt 210° unter 100mm. Bei gewöhnlichem Druck ist der Kohlenwasserstoff nicht unzersetzt flüchtig und der Siedepunkt daher nicht ganz constant. Er liegt um 290°, d_{20} = 0.939, n_D = 1.5065 bei 20°

Berechnet für $C_{15}H_{24}$ $\vdash$	Gefunden
M = 64.45	64.60

0.1804 gr gaben 0.5838 CO_2 und 0.1879 H_2O

Berechnet für $C_{15}H_{24}$	Gefunden
C – 88.16	88.26
H – 11.84	11.65.

Bei der Durchführung der vorstehenden experimentellen Arbeit bin ich durch Herrn Dr. Walther Ost aufs eifrigste und beste nterstützt worden.

II. Über Askaridol.

Das ätherische Öl aus Chenopodium ambrosioides L. var. anthelminticum ist in Schimmels wissenschaftlichem Laboratorium in Miltitz von Dr. O. Hüthig einer Untersuchung unterworfen

worden, die zu den folgenden sehr interessanten Feststellungen geführt hat [1]). Das Öl enthält (neben Cineol) eine mit dem Namen Askaridol belegte Substanz von merkwürdigen Eigenschaften. Das Askaridol besitzt einen unangenehmen Geruch, siedet unter 4—5^{mm} zwischen 80—84°, d_{15} = 1.0079, n_D = 1.4743 bei 20°.

Auf Grund der Analyse kommt dem Askaridol die Formel $C_{10}H_{16}O_2$ zu. Die Verbindung ist ungesättigt und zersetzt sich beim Erwärmen unter gewöhnlichem Druck bei einer Temperatur von 130—150° mit explosionsartiger Heftigkeit, wobei die Temperatur plötzlich auf etwa 250° steigt. Manchmal tritt dabei Entzündung ein. Die Zersetzung erfolgt unter Entbindung eines gasförmigen Kohlenwasserstoffs (Äthan oder Propan). Bei vorsichtigem Zusammenbringen mit concentrierter Ameisensäure liefert das Askaridol Cymol, bei der Reduction mit Essigsäure und Zink neben Cymol ein Keton (Carvenon?). Ferner wurde beobachtet, daß das Askaridol sich bei den geschilderten Umsetzungen zunächst zu isomerisieren scheint und zwar zu einer optisch inactiven Verbindung vom Siedepunkt 98,3—99,5 unter 4—5^{mm}, d_{15} = 1.0266, n_D = 1.46545 bei 20°.

Der Freundlichkeit der Firma Schimmel verdanke ich einige hundert Gramm Askaridol, die zu den nachfolgenden Versuchen benutzt wurden.

Um die Kohlenstoff-Configuration im Molekül feststellen zu können, mußte, bei der großen Empfindlichkeit des Präparats, die Anwendung chemischer Reagentien zunächst ausgeschaltet werden. Als besonders geeignet erwies sich gerade in diesem Fall wieder das Paalsche Reductionsverfahren.

Bei Gegenwart von colloïdalem Palladium nimmt das in Wasser suspendierte Askaridol mit beispielloser Schnelligkeit Wasserstoff auf, so daß man, um die bei der Reduction eintretende Erwärmung nicht zu stark werden zu lassen, die Wasserstoffzufuhr genügend regulieren muß.

Ein quantitativer, in methylalkoholischer Lösung ausgeführter Versuch zeigte, daß das angewandte Präparat 4 Wasserstoffatome aufnahm.

Bei der Reduction entstehen zwei ziemlich leicht zu trennende Producte. Ein mit Wasserdampf ziemlich leicht flüchtiges Öl (I) und ein viel schwerer übergehender, schön krystallinischer Körper (II), den man, nachdem die Hauptmenge des leicht flüchtigen Öls übergegangen ist, am besten durch Extrahieren des Rückstands

---

1) Berichte von Schimmel & Co. **1908**, April. S. 108.

mit Chloroform gewinnt. Das Chloroform wird dann abdestilliert, die zurückbleibende krystallinische Masse mit kaltem Äther etwas nachgewaschen und dann durch Umkrystallisieren weiter gereinigt.

Das flüssige Product (I) scheint man als ein sekundäres Product auffassen zu dürfen, das durch Wasserabspaltung aus II während der Reduction, vielleicht unter dem Einfluß des Palladiums, entsteht. Das krystallisierte Product, das seinem Verhalten nach als ein neues 1.4 Terpin (Terpinenterpin) angesprochen werden muß, und das außerdem das Hauptproduct der Reaction darstellt, soll daher zuerst besprochen werden.

Neues Terpin, $C_{10}H_{20}O_2$, Schmelzp. 116—117°

HO / OH

CH_3 / C_3H_7

Die Verbindung ist schwer löslich in kaltem, reichlich löslich in heißem Wasser und mit Wasserdämpfen flüchtig. In Chloroform, Essigester, Methylalkohol löst sie sich leicht, in Äther schwer. Beim Umkrystallisieren aus verdünntem Methylalkohol (1 Alkohol : 2 Wasser) erhält man sie in glasglänzenden, großen bei 116—117° schmelzenden Prismen.

0.2000 gr gaben 0.5090 CO_2 und 0.2080 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O_2$	Gefunden
C – 69.70	69.41
H – 11.64	11.64.

Die Verbindung ist optisch inaktiv. Wenn der Schmelzpunkt des neuen Terpins auch mit dem des längst bekannten 1.8-Terpinhydrats zusammenfällt, so sind beide Verbindungen doch durch die Krystallform leicht zu unterscheiden und dadurch daß das neue Terpin ohne Gasentwicklung schmilzt, namentlich aber durch das Verhalten gegen Halogenwasserstoffsäuren. Denn das neue Terpin gibt, mit diesen umgesetzt, keine Dipentenderivate, sondern Verbindungen der Terpinen-Reihe.

Beim Erwärmen mit Oxalsäure verhält sich das neue Glycol genau wie das schon bekannte bei 137° schmelzende 1.4-Terpin. Es entsteht dabei sehr wenig ungesättigter Kohlenwasserstoff, etwas ungesättigter Alkohol und als Hauptproduct das

1.4 Cineol.

Diese Verbindung ist gegen Permanganat so beständig, daß sie sich durch Schütteln mit starken Permanganatlösungen von den beigemengten ungesättigten Anteilen gut befreien läßt. Bei

seiner geringen Löslichkeit in Wasser läßt sich dies mit Wasserdampf leicht flüchtige Oxyd aus dem Oxydationsgemisch quantitativ gewinnen. Die Eigenschaften der gereinigten Verbindung stimmen ganz mit den früher [1]) für 1.4 Cineol ermittelten überein. Gefunden wurde:

Siedepunkt 172°, $d_{18} = 0.9010$, $n_D = 1.4479$ bei 18°

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
M 45.61	45.75.

0.1474 gr geben 0.4241 CO_2 und 0.1528 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
C – 77.85	78.40
H – 11.76	11.60.

Daß wirklich 1.4 Cineol vorlag, ergab sich aus dem Verhalten der Verbindung gegen Eisessighalogenwasserstoff.

Mischt man das Cineol mit der etwa 5 fachen Menge Eisessigbromwasserstoff und läßt es einige Stunden stehen, so fällt nach dem Verdünnen mit Wasser ein schweres Öl, das beim Abkühlen zum Teil erstarrt und aus einem Gemenge von festem und flüssigem Dibromhydrat besteht. Bei günstiger Concentration krystallisiert aus der ursprünglichen essigsauren Lösung das feste Dibromhydrat direkt in langen Nadeln aus. Das abgesaugte feste Produkt schmilzt nach dem Umkrystallisieren aus Eisessig bei 58—59° und gibt keine Schmelzpunktdepression beim Vermischen mit Terpinendibromhydrat.

Der analog unter Anwendung von Eisessigchlorwasserstoff ausgeführte Versuch führt zu einem bei 52° schmelzenden Dichlorhydrat, das sich als mit Terpinendichlorhydrat identisch erwies.

Damit ist wohl sichergestellt, daß das Cineol den Sauerstoff in 1.4-Stellung trägt.

Von Permanganat wird das Cineol ganz außerordentlich schwer angegriffen: Bei dauerndem Erwärmen damit auf dem Wasserbad tritt jedoch Oxydation ein. Dabei wurde aber bisher nicht eine der Cineolsäure entsprechende Säure erhalten, sondern eine schwerlösliche, bei 157° schmelzende Säure von geringerem Sauerstoffgehalt, die noch nicht eingehender untersucht werden konnte.

Bei der Zerlegung des bei 116° schmelzenden Terpins mit Oxalsäure entsteht, neben viel von dem Oxyd $C_{10}H_{18}O$ eine kleine Menge eines ungesättigten Alkohols. Diese Verbindung läßt sich in reinem Zustand nicht isolieren, da sie sich aus den verfügbaren,

1) Diese Annal. 356, 204 (1907).

relativ geringen Mengen Substanz durch fractionierte Destillation trotz ihres höheren Siedepunktes von beigemengtem Cineol nicht ganz trennen läßt. Dagegen ist es gelungen des Oxydationsproducts des Alkohols habhaft zu werden und ihn mit ziemlicher Sicherheit als Δ^3-Menthenol (1) [Terpinenol — 1]

CH_3
|
COH
H_2C CH_2
H_2C CH
C
|
$CH(CH_3)_2$

zu identificieren, wobei allerdings dahingestellt bleiben muß, ob der Verbindung nicht auch Δ'-Menthenol (4) [Terpinenol-4] beigemengt ist.

Um zu den gewünschten Producten zu gelangen wurde das mit Wassendampf abdestillierte Spaltungsprodukt des Terpins (mit Oxalsäure) mit 1 %iger Lösung von Permanganat bei 0° oxydiert bis die Farbe bestehen blieb, das vorhandene 1,4 Cineol dann mit Wasserdampf abgeblasen, der vom Braustein abfiltrierte Rückstand unter Einleiten von Kohlendioxyd eingedampft und mit Chloroform extrahiert. In das Chloroform geht ein Glycerol, das beim Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure unter Bildung eines bei 175° siedenden, in der Kälte gegen Permanganat beständigen Kohlenwasserstoffs (Cymol) und eines Ketons von Menthonartigem Geruch zerfiel. Dies Keton lieferte ein sehr schwer lösliches Semicarbazon vom Schmelzpunkt 225—226°. Die Analyse ergab:

0.1742 gr gaben 0.4015 CO_2 und 0.1414 H_2O

berechnet für $C_{10}H_{16}N.NHCONH_2$	Gefunden
C—63.07	62.85
H— 9.15	9.08.

Es lag also ein Menthenon vor und zwar Δ'-Menthenon-3, denn das charakteristische schwer lösliche Semicarbazon dieses Ketons gab mit dem bei der eben beschriebenen Operation erhaltenen keine Schmelzpunktsdepression.

Damit ist aber auch die ursprüngliche Anwesenheit von Δ^3-Menthenol-1 nachgewiesen, das bei der Oxydation 1. 3. 4 Trioxy-

terpan liefert welches seinerseits mit Säuren unter Bildung von Cymol und Δ'-Menthenon zerfällt[1]).

Da nun nach meinen früheren Feststellungen[2]) die beiden existenzmöglichen Terpinenole bei weitergehender Oxydation $\alpha\alpha'$-bioxy-α methyl-α'-isopropyl-Adipinsäure liefern, die durch Ueberführung in ein Dilacton leicht nachzuweisen ist, so wurden die Oxydationslaugen in entsprechender Weise verarbeitet. In der Tat gelang es beim Erhitzen der entstandenen Säuren mit Salzsäure das bei 72° schmelzende inactive Dilacton $C_{10}H_{14}O_4$, wenn auch nur in sehr geringfügiger Ausbeute zu isolieren.

Damit ist das Vorhandensein eines Terpinenols in dem mit Oxalsäure aus dem angewandten Terpin erhaltenen Reactionsproduct sicher gestellt und das Terpin als eine Verbindung der Terpinen-Reihe charakterisiert.

Wie eingangs bemerkt, entsteht bei der Reduktion des Askaridols neben dem krystallisierten Terpin ein Oel (I). Dies Product ist nicht ganz einheitlich. Es enthält gesättigte neben ungesättigten Anteilen. Nachdem die Natur des festen Terpins erkannt war, lag die Annahme am nächsten, daß dies Terpin unter Wasserverlust in ein Terpinenol übergegangen sei, das sich dann weiter partiell zu einem Menthanol aufgesättigt habe. Um ein möglichst einheitliches Präparat zur Untersuchung zu bringen, wurde das rohe Oel I zunächst weiter mit Wasserstoff bei Gegenwart von Palladium reduciert und die letzten Reste ungesättigter Substanz dann mit Permanganat entfernt.

Das so erhaltene Präparat zeigte folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 207—208°, $d_{19} = 0.9080$, $n_D = 1.4656$

berechnet für $C_{10}H_{19}OH$	Gefunden
M = 47.55	47.55

0.1846 gr gaben 0.5190 CO_2 und 0.2114 H_2O

berechnet für $C_{10}H_{20}O$	Gefunden
C – 76.85	76.68
H – 12.91	12.81

Beim Erwärmen mit Chlorzink verliert der Alkohol leicht Wasser. Der entstandene Kohlenwasserstoff hatte folgende Eigenschaften:

1) Dies. Annal. 362, 271. 272 (1908).

2) O. Wallach, Terpene und Campher S. 480.

Siedepunkt 173,5—175,5, $d_{19} = 0.821$, $n_D = 1.4558$ bei 19°

berechnet für $C_{10}H_{18}$	Gefunden
M = 45.63	45.67

Diese Zahlen stimmen also gut mit den für ein Menthen zu erwartenden. Wahrscheinlich liegt aber ein Gemenge vor. Denn die Ausbeute an Nitrosochlorid aus dem Kohlenwasserstoff war nur gering, ein Teil war mit Wasserdampf flüchtig. Carvomenthen, das glatt aus Menthanol (1) entsteht[1]), lag keinenfalls in reinem Zustand vor.

Die mitgeteilten Beobachtungen rechtfertigen die Annahme, daß Askaridol $C_{10}H_{16}O_2$ unter Aufnahme von 4 Wasserstoffatomen ein 1.4-Terpin $C_{10}H_{20}O_2$ liefert.

1.4 Terpin CH_3, HO, HO, C_3H_7

ist in zwei sterisch isomeren Modificationen möglich. Die eine bei 137° schmelzende ist von mir schon vor einigen Jahren aufgefunden worden[2]). In dem oben beschriebenen bei 116—117° schmelzenden Product würde also die zweite Modification vorliegen. Dabei fällt die Aehnlichkeit des Verhaltens der beiden Isomeren gegen Wasser abspaltende Mittel auf; denn aus beiden entsteht unter Verlust von 1 Mol. Wasser ganz überwiegend Oxyd, während man erwarten sollte, daß die trans-Modification — ebenso wie 1.8-Terpin — vorwiegend ungesättigten Alkohol und Kohlenwasserstoff liefern würde. Auch, daß nach den beiden so verschiedenen Methoden, die zur Bildung des 1.4 Terpins führen, immer nur die eine Modification (wenigstens in jedenfalls in ganz überwiegender Menge) auftritt, ist bemerkenswert, findet aber beim 1.8-Terpin seine Analogie.

Was für Rückschlüsse auf die Constitution des Askaridols kann man nun aus dem mitgeteilten Befund ziehen?

Falls bei der Reduktion des Askaridols zu 1.4-Terpin keine Umlagerung eingetreten ist[3]) ergibt sich für Askaridol ungezwungen Formel I.

1) Dies. Annal. **381**, 58 (1911).

2) Annal. s. Chem. **356**, 200 (1907); Ber. **40**, 577 (1907).

3) Wenn ich bei einer früheren Gelegenheit (Annal. **384**, 53 (1911)), als das Anwendungsgebiet der Paal'schen Reductionsmethode auf alicyclische Verbindungen an einer Reihe von Beispielen erläutert wurde, bemerkt habe, daß man bei Anwendung dieses Verfahrens ungesättigte Verbindungen unter Bedingungen mit Wasserstoff beladen kann, unter denen „jede Umlagerung ausgeschlossen ist“,

```
I        CH3                                CH3       II
          |                                  |
          C                                  C
   H2C/   |  \CH                      H2C/   |  \CH2
     |    O   ||                        |    OH   |
     |    |   ||           →            |         |
   H2C\   O   /CH                     H2C\   OH  /CH2
          |                                  |
          C                                  C
          |                                  |
       CH(CH3)2                           CH(CH3)2
```

Eine Verbindung von der Zusammensetzung I wird durch Wasserstoffaufnahme direct in II, d. h. in 1.4 Terpin übergehen können. Auch die Labilität des Askaridol-Moleküls fände bei Annahme von Formel I ihre Erklärung.

Als die oben mitgeteilten Tatsachen in der Hauptsache schon festgestellt waren, wurde eine interessante Untersuchung von E. K. Nelson bekannt[1]), die sich auch auf das Askaridol bezieht und gelegentlich derer Askaridol zu ganz anderen als den erst beschriebenen Verbindungen abgewandelt wurde. Nelson erhielt bei Behandlung von Askaridol mit Ferrosulfat ein Glycol $C_{10}H_{18}O_3$ vom Schmelzpunkt 62,5—64°, das durch ein bei 136—137° schmelzendes Monobenzoat und ein bei 116,5—117,5° schmelzendes Dibenzoat näher characterisiert wurde.

Bei der Oxydation dieses Glycols wurde eine bei 116—117° schmelzende Säure $C_{10}H_{16}O_5$ neben geringen Mengen einer bei 186—187° schmelzenden Säure $C_{10}H_{16}O_6$ erhalten. Was die letzte Säure anbelangt, so scheint es mir (auch nach der vorliegenden Analyse) nicht ausgeschlossen, daß ihr vielmehr die Formel $C_{10}H_{18}O_6$ zukommt und daß sie identisch ist mit inactiver *αα'* Methyl-isopropyl *α, α'* Dioxy-adipinsäure[2]).

Nelson formuliert Askaridol (I) und das daraus erhaltene Glycol (II) folgendermaßen:

---

so bezieht sich das dem Zusammenhang gemäß natürlich nur darauf, daß die Umlagerungen ausgeschlossen sind, die als Folge der Anwendung der üblichen sauren oder alkalischen Reduktionsmittel eingeleitet werden. Wo schon Umlagerung durch Wasser allein in neutraler Flüssigkeit eintreten kann, schützt selbstverständlich auch das Paalsche Verfahren nicht vor dem Eintreten von Verschiebungen.

1) Chem. Centralbl. **1911**. II. 891.

2) s. dies. Annal. **356**, 211 (1907).

I: CH_3 — CH — HC, CH — O — O — H_2C, C — CH — $CH(CH_3)_2$

II: CH_3 — CH — HC, CHOH — O — H_2C, COH — CH — CH (CH_3)

Diese Formeln sind nach dem erst Mitgeteilten sehr unwahrscheinlich. Gibt man dem Askaridol aber die weiter oben vorgeschlagene Formel, so erhielte man für das Glycol und die daraus gewonnenen Säuren die Formeln:

CH_3 — C — H_2C, CHOH — O — H_2C, CHOH — C — $CH(CH_3)_2$ → CH_3 — C — H_2C, COOH — O — H_2C, COOH — C — $CH(CH_3)_2$ → CH_3 — C, OH — H_2C, COOH — H_2C, COOH — C, OH — $CH(CH_3)_2$

Glycol $C_{10}H_{18}O_3$ $\qquad$ $C_{10}H_{16}O_5$ $\qquad$ $C_{10}H_{18}O_6$

Mit dieser Formulierung stimmt vorläufig aber nicht, daß man die isomere Cineolsäure $C_{10}H_{16}O_5$ auch aus dem 1.4 Cineol sollte erhalten können, während die bei der Oxydation dieses Cineols erhaltene Säure vom Schmelzpunkt 157° andere Zusammensetzung und andere Eigenschaften besitzt als die von Nelson erhaltene Säure. Die Verhältnisse bedürfen also noch weiterer Klärung. Bei der Ausführung dieser Arbeit habe ich mich der Hülfe des Herrn Dr. Rantscheff zu erfreuen gehabt.

III. Ueber Δ^4-Menthenon-3

(Mitbearbeitet von Rud. Müller und Fr. Henjes).

Gelegentlich von Untersuchungen, die zum Zweck hatten festzustellen, in welchem Sinne die physikalischen Eigenschaften der ungesättigten cyklischen Ketone einerseits durch die Stellung des Sauerstoffatoms, andererseits durch die Lage der Aethylenbindung bedingt werden und auf die anderen Orts näher einzugehen sein wird, stellte es sich als notwendig heraus, die physikalischen Konstanten des Δ^4-Menthenon-3 genau zu ermitteln. Für diese, von mir früher aus Menthen synthetisch dargestellte Verbindung, habe ich s. Z. den Siedepunkt 212° gefunden, dagegen für das isomere Δ'-Menthenon-3

den Siedepunkt 235—237°.

Das ist also eine Differenz von 22—24° und um so auffallender, als zwischen den beiden einigermaßen analog gebauten Verbindungen Carvenon mit dem Siedepunkt 232—233° und Carvotanceton mit dem Siedepunkt 228—229

Carvenon

Carvotanaceton

nur die geringe Siedepunktsdifferenz von 4° besteht. Aus der

Reihe der 4 Isomeren fällt also, was ich früher schon hervorhob [1]), das Δ^4-Menthenon mit seinem niedrigen Siedepunkt ganz heraus. Man konnte also wohl Zweifel hegen, ob nicht entweder bezüglich der angegebenen Eigenschaften oder bezüglich der Konstitutionsannahme des Δ^4-Menthenons ein Irrtum obwalte. Diesbezügliche Zweifel hat vor einiger Zeit Auwers [2]) auch geäußert. Die nachstehend mitgeteilten Ermittelungen führen den Nachweis, daß sie ungerechtfertigt sind.

Zunächst wurde bei der Synthese von käuflichem von Schimmel & Co. bezogenen Menthen $C_{10}H_{18}$ ausgegangen, das um 170° siedete und schwach rechts drehend war. Das Präparat lieferte nur eine geringe Ausbeute an Menthennitrosochlorid $C_{10}H_{18}NOCl$, das, nicht umkrystallisiert bei 127°, nach dem Umkrystallisieren aus Chloroform und Ligroïn bei 142—143° schmolz. Das letztere Präparat war in 5%ger Chloroformlösung inactiv und gab bei der Umsetzung mit Natriummethylat bei 66° schmelzendes, inactives Menthenonoxim $C_{10}H_{16}:NOH$. Das nicht umkristallisierte Nitrosochlorid lieferte ein schwach rechtsdrehendes Oxim. Damit war ersichtlich, daß man vom käuflichen Menthen ausgehend nicht zu unbedingt einheitlichen Präparaten kam. Daher wurden nun Versuchsreihen in Angriff genommen, bei denen einerseits von einem absolut inactiven Menthen, anderseits von einem stark activen Menthen ausgegangen wurde.

Inactives Menthen wurde nach der früher von mir benutzten Methode [3]) aus 1.4-Cyklohexanon synthetisch aufgebaut. Zunächst erhält man wesentlich $\Delta^{4(8)}$-Menthen

$$CH_3-\langle\;\rangle=C\begin{matrix}\diagup CH_3\\ \diagdown CH_3\end{matrix}$$

das durch Inversion mit alkoholischer Schwefelsäure in i-Δ^4-Menthen überführbar ist.

Das Nitrosochlorid dieses Menthens wurde mit 50% Ausbeute und aus Chloroform-Ligroin in schönen bei 143° schmelzenden Prismen erhalten. Das daraus dargestellte i-Δ^4-Menthenonoxim schmolz bei 66°. Aus diesem Oxim wurde das Keton in Freiheit gesetzt und an Semicarbazon gebunden. Das erhaltene Semicarbazon schmolz bei 142°. Die physikalischen Eigen-

1) Wallach, Terpene und Campher 413.
2) Ber. **41**, 1801 (1908); **42**, 2408 (1909).
3) Annal. d. Chem. **360**, 70 (1908).

schaften der aus diesem ganz inactiven Ausgangsmaterial (I) gewonnenen und aus käuflichem Menthen (II) dargestellten Ketone stimmten völlig überein.

Gefunden wurde für Δ^4-Menthenon:

I) Siedepunkt 212—213°, $d_{20} = 0.9165$, $n_D = 1.4726$

II) Siedepunkt 211—213°, $d_{18} = 0.9170$, $n_D = 1.4729$

berechnet für $C_{10}H_{16}O$ ⌈=	gefunden	
	I	II
M. 45.82	46.49	46.49

Diese Zahlen stimmen auch mit den früher gefundenen sehr gut. Der Siedepunkt ergab sich sogar noch ein wenig niedriger als s. Z. angegeben ist.

Nunmehr wurde nach der vortrefflichen Methode von Tschugaëff[1]) d-Menthen aus Menthol bereitet. Das zur Verwendung kommende Präparat zeigte den Siedepunkt 166—168° und $[\alpha]_D = +116,38$ in ätherischer Lösung. Das daraus dargestellte Nitrosochlorid war stark rechtsdrehend $[\alpha]_D = +187,64°$ in Chloroform. Das Präparat schmolz, nicht umkrystallisiert, bei 127°, nach dem Umkrystallisieren bei 140°. Das durch Salzsäureabspaltung daraus gewonnene Δ^4-Menthenonoxim schmolz bei 62°.

Das aus dem Oxim regenerierte Δ^4-Menthenon stellte eine gelb gefärbte Flüssigkeit von folgenden Eigenschaften vor:

Siedepunkt 211—212°, $d_{18} = 0.919$, $n_D = 1.4729$, M = 46, 39.

S = 1.0688; L (Methylalkohol) = 6,2400; p = 14,62 %; t = 18°
d = 0.8110, l = 1 dm, $\alpha - 8°$

$$[\alpha]_D = -67,46.$$

Die physikalischen Konstanten dieses stark aktiven Präparats stimmen also gleichfalls gut mit den für das inaktive gefundenen. Zur näheren Charakterisierung des aktiven Ketons wurde noch dargestellt:

Das Semicarbazon vom Schmelzpunkt 170—171°, ferner die Dibenzylidenverbindung[2]). Diese bildet, aus Alkohol umkrystallisiert, hellgelbe Nadeln vom Schmelzpunkt 140—141′ und ist linksdrehend:

S = 0.3388, L (Chloroform) = 11.265, p = 2,92, t = 20°
d = 1.4660, l = 1 dm, $\alpha = -2°30'$

$$[\alpha]_D = -58,41$$

---

1) Ber. **32**, 3333 (1899).

2) Ueber die Art der Gewinnung der Dibenzylidenverbindung s. Annal. d. Ch. **305**, 273 (1899).

Zur bequemeren Orientierung über die Unterschiede, die bezüglich der Verbindungen aus aktivem und inaktivem Δ^4-Menthenon bestehen, sei folgende Übersicht gegeben:

Schmelzpunkte	inaktiv	aktiv
Oxim	66°	62°
Semicarbazon	142°	170—171°
Dibenzyliden-Verbindung	129—130°	140—141°

Um Gewißheit darüber zu erhalten, ob das beschriebene zwischen 211—213° siedende Keton $C_{10}H_{16}O$ wirklich ein Menthenon sei, oder ob es nicht vielleicht einen ganz anderen Bau besitze (etwa zu den pentacyclischen Verbindungen gehöre), wurde die aktive Modification nach Paal reduciert und das dabei leicht entstehende gesättigte Keton (nach Behandlung mit Permanganat bis zum Bestehenbleiben der Farbe) oximiert. Es wurde ein leicht erstarrendes, im Aussehen und Geruch vom gewöhnlichen 1-Menthonoxim gar nicht zu unterscheidendes Oxim erhalten, das aus verdünntem Methylalkohol gut umzukrystallisieren war, aber einen etwas niedrigeren Schmelzpunkt als das Oxim aus natürlichem Menthon aufwies, nämlich 54—56° (statt 59°). Auch die Drehungsintensität war geringer, nämlich (bestimmt in ätherischer, etwa 12%ger Lösung) $[\alpha]_D = -17$.

Nun wurde aus dem Oxim das Keton regeneriert und daraus das Semicarbazon hergestellt. Der Schmelzpunkt wurde zu 185° gefunden, während der Schmelzpunkt des gewöhnlichen Menthon-Semicarbazons zu 184° angegeben wird. Das aus dem Semicarbazon abermals regenerierte Menthon wurde weiter in alkoholischer Lösung mit Natrium zu Menthol reduziert. Das erhaltene Präparat erstarrte nicht vollkommen, war also wohl nicht ganz einheitlich. Die abgesaugten festen Bestandteile schmolzen nach dem Abpressen bei 39—40°. Es lag demnach gewöhnliches Menthol vor.

Die vorstehend mitgeteilten Versuche lassen gar keinen Zweifel darüber, daß das aus Menthen aufgebaute bei 211—212° siedende Menthenon eine hexacyclische Verbindung ist, daß gelegentlich der bei der Darstellung benutzten Umformungen also weitgehende Atomverschiebungen nicht stattgefunden haben. Das Menthenon kann demnach auch keine andere Constitution besitzen, als ich ihm von Anbeginn zugeschrieben habe, d. h. es muß Δ^4-p-Menthenon-3 sein. Demnach muß der auffallend niedrige Siedepunkt des Ketons in seiner Configuration begründet sein. Diese ist nun, wie man leicht erkennt, dadurch

ausgezeichnet, daß das Isopropyl in tertiärer Stellung zwischen Carbonyl und einer Äthylenkohlenstoffbindung steht:

—C:C—C:O—
|
C_3H_7.

Diese Stellung scheint also die Siedepunktserniedrigung sehr zu begünstigen. Daß das wirklich zutrifft, dafür findet man ein Beispiel auch in der pentacyclischen Reihe beim

CH_3 ... =O ... $CH(CH_3)_2$ und CH_3 ... =O ... $(CH_3)_2CH$—

Pulegenon, Siedep. 189—190. Isothujon, Siedep. 231—232°.

Pulegenon und Isothujon unterscheiden sich im Bau ganz ähnlich wie Δ^4-Menthenon-3 und Δ^5-Menthenon-2 (Carvotanaceton) (s. oben) und auch die isomeren pentacyclischen Ketone weisen eine bedeutende Siedepunktsdifferenz auf.

Auch die s. Z. unerwartete Tatsache, daß Δ^4-Menthenon-3 eine Dibenzylidenverbindung liefert, findet im Bau des Moleküls eine ausreichende Erklärung. Die Doppelbindung Δ^4 aktiviert die Wasserstoffatome, die an C_6 stehen, offenbar in ähnlicher Weise, wie die Carbonyl-Gruppe die Wasserstoffatome an C_2. Der Dibenzylidenverbindung wird man also die Formel

CH_3
|
CH
$C_6H_5CH:C$ $C:CHC_6H_5$
HC CO
C
|
$CH(CH_3)_2$

zuschreiben dürfen. Ist diese Auffassung aber richtig, so müssen ungesättigte Ketone von ähnlicher Constitution, wie sie Δ^4-Menthenon-3 aufweist, auch Dibenzylidenverbindungen liefern können. Eine experimentelle Prüfung dieser Frage ist bereits in Angriff genommen.

Schließlich mag noch auf eine Tatsache hingewiesen werden, die bei anderer Gelegenheit eingehender besprochen werden soll,

auf die nämlich, daß sich Δ^4-Menthenon-3 nicht zu Thymol oxydiert, wenn man es mit Ferrichlorid in Eisessiglösung kocht, während Δ'-Menthenon-3 dabei leicht 2 Wasserstoffatome verliert, um in Thymol überzugehen. Schreibt man Δ'-Menthenon-3 in der Enolform, so sieht man den Grund für das verschiedene Verhalten leicht ein und erkennt, warum z. B. auch α-Terpinen viel leichter in Cymol überführbar ist, als es bei isomeren Terpenen der Fall ist.

IV. Über die Constitution des s. g. „Isocamphers" $C_{10}H_{16}O$ und seines Reductionsprodukts $C_{10}H_{18}O$.

(Mitbearbeitet von Hans Schlubach.)

Vor kurzem[1]) habe ich über die in der Überschrift genannten Verbindungen eine Untersuchung veröffentlicht, die wesentlich zum Zweck hatte, die physikalischen Eigenschaften jener Substanzen möglichst genau festzustellen, die man auf Grund der Arbeiten von Angeli und Rimini als der hydrierten Metacymol-Reihe zugehörige Ketone betrachtete und die mit den analog gebauten Para-Verbindungen zu vergleichen Interesse hatte[2]).

Bei einer Fortsetzung dieser Versuche hat sich nun aber herausgestellt, daß die von Angeli und Rimini bezüglich der Constitution des Isocamphers und seines Reductionsproducts gemachten Annahmen nicht zutreffend sind, daß jenen Verbindungen vielmehr ein völlig anderer Bau zukommt als bisher angenommen worden ist.

Es sei zunächst daran erinnert, daß sich „Isocampher", $C_{10}H_{16}O$, bildet, wenn die durch Einwirkung von salpetriger Säure auf Fenchonoxim oder auf Campheroxim entstehenden Nitrimine, $C_{10}H_{16}N_2O_2$, in concentrierte Schwefelsäure eingetragen werden und dann die entstandene Lösung mit Wasser zersetzt wird. Das dabei entstehende Keton, der „Isocampher" ist sehr schwer in reinem Zustand zu erhalten, da die Substanz sich als sehr empfindlich gegen Sauerstoff, Alkali, erhöhte Temperatur u. s. w. erweist. Angeli und Rimini[3]) haben festgestellt, daß bei der Oxydation des Ketons mit Permanganat α-Isopropylglutarsäure auftritt und kamen — von der allerdings nächstliegenden Annahme ausgehend, daß die Verbindung einen Sechsring enthalte — zu der

1) Annal. d. Chem. 379, 215 (1911).
2) Annal. d. Chem. 379, 222. 226 (1911).
3) Gazz. chim. ital. 26. II. 44. 518. (1896).

Auffassung, daß die umgesättigte Verbindung $C_{10}H_{16}O$ ein Δ^6-Methyl(1)-isopropyl(5)-cyklohexenon(2) (I)

```
              CH3                                CH3
               |                                  |
               C                                  CH
           CH//  \C:O                        CH2/    \C:O
             |  I  |                            |  II  |
(CH3)2CH.CH \    /CH2          (CH3)2CH.CH \      /CH2
               CH2                                CH2
```

und also die gesättigte $C_{10}H_{18}O$ das zugehörige Cyklohexanon (II) vorstelle. Die letztere Verbindung haben die genannten Autoren allerdings nur in ganz geringen, für eine Untersuchung nicht ausreichenden Mengen in Händen gehabt, während es mir gelang die physikalischen Eigenschaften des gesättigten Ketons genau festzustellen. Dabei fiel mir bereits auf [1]), daß das Keton einen Geruch besitzt, der an Amylacetat und an die gesättigten cyclischen Ketone erinnert, welche Acetyl in der Seitenkette tragen.

Bald nach Publication dieser Beobachtungen lernte ich gelegentlich einer ganz anderen Untersuchung das Dihydropinolon kennen und stellte dessen Constitution als die eines Acetyl(1)-isopropyl(3)pentans

```
            COCH3
              |
              CH
         CH2/    \CH2
           |      |
         CH2 ---- CH—CH(CH3)2
```

mit Sicherheit fest [2]). Die physikalischen Eigenschaften des Dihydropinolons ähnelten nun in hohem Grade denen, die für Dihydroisocampher ermittelt waren. Die Darstellung des letzteren war nach der zuerst befolgten Methode umständlich und sehr unausgibig gewesen. Der gegen Alkali empfindliche „Isocampher“ wurde mit Natrium zum gesättigten Alkohol reduciert und dieser dann zum Keton oxydiert. Die Paalsche Reductionsmethode erlaubt den Weg erheblich abzukürzen und ergab bei viel besserer Ausbeute ein leicht von ungesättigten Anteilen zu befreiendes Product. Ein nach diesem Verfahren dargestelltes und außerdem durch das Semicarbazon hindurch gereinigtes Präparat zeigte nun Eigen-

1) l. c. S. 224.
2) Annal. d. Chem. 384, 201 (1911).

schaften, die mit den früher schon ermittelten übereinstimmten und mit den für Dihydropinolon festgestellten zusammenfielen, wie die folgende Übersichtstabelle deutlich hervortreten läßt:

Keton $C_{10}H_{18}O$ gewonnen durch Reduction von

	Pinolon	Isocampher
Siedepunkt	211°	211°
d_{20}	0.8885	0.8885
n_D	1.4466	1.4466
Schmelzpunkt des Semicarbazons	164—165°	164°

Ebenso stimmte der aus Dihydroisocamper durch Reduction gewinnbare Alkohol $C_{10}H_{19}OH$ in seinen Eigenschaften vollständig mit den für Dihydropinolol ermittelten[1]) überein. Gefunden wurde nämlich für den gesättigten Alkohol aus Isocampher Siedepunkt 215—216°, $d_{21} = 0.8890$, $n_D = 1.4563$.

Um jeden Zweifel an der Identität von Dihydroisocampher mit Dihydropinolon zu beheben, wurde die erstere Verbindung unter denselben Bedingungen wie früher Dihydropinolon mit Hypobromit oxydiert[2]). Die Oxydation verlief unter reichlicher Bildung von Bromoform in entsprechender Weise. Die entstehende flüssige Säure wurde in das Ammoniumsalz und dieses durch Erhitzen auf 180—200° im Einschmelzrohr in das Amid verwandelt. Das durch Destillation im Vakuum und Umkrystallisieren aus Alkohol gereinigte Amid schmolz bei 164° und gab mit dem durch Dihydropinolon hindurch erhaltenen, ebenso schmelzenden, keine Schmelzpunktsdepression.

Nachdem die Constitution des Dihydro-isocamphers in so überraschender Weise Aufklärung gefunden hatte, war nun die Frage: was ist Isocampher selbst? Mit Pinolon ist Isocampher gewiß nicht identisch. Beide Verbindungen sieden zwar bei derselben Temperatur, unterscheiden sich aber schon sehr deutlich durch den Geruch. Ferner: Das Semicarbazon des Pinolons schmilzt bei 158°, das des Isocamphers bei 214°, das Oxim des Pinolons ist flüssig, das des Isocamphers schmilzt bei 105°. Eher könnte der Isocampher mit dem von mir neulich synthetisch aus Isopropylpentanon gewonnenen isomeren Pinolon[3]) identisch sein, dem wahrscheinlich die Formel

1) Annal. d. Chem. 384, 206 (1911).
2) Annal. d. Chem. 384, 202 (1911).
3) Annal. 384, 207 (1911).

$COCH_3$

—$CH(CH_3)_2$

zukommt. Dies Keton muß nämlich bei der Oxydation in α-*Isopropylglutarsäure* übergehen können, die ja tatsächlich bei der Oxydation von Isocampher entsteht [1]). Nun schmilzt das Semicarbazon jenes isomeren (inactiven) *Pinolons* allerdings schon bei 182—183°. Es ist aber zu berücksichtigen, daß Isocampher optisch *aktiv* ist, seine Verbindungen also gegenüber den inaktiven Modificationen abweichende Eigenschaften aufweisen können.

Um der Lösung der hier vorliegenden Probleme näher zu kommen, wurde zunächst von dem gut krystallisierenden *Oxim des Isocamphers* (dargestellt aus Fenchonnitrimin) vom Schmelzpunkt 105° ausgegangen und dies der Reduction unterworfen.

Warum das *Oxim* für die Versuche herangezogen wurde, hat zwei Gründe. Erstens ist diese Verbindung sehr gut characterisiert und wegen ihrer verhältnißmäßigen Schwerlöslichkeit in Alkohol leicht rein herzustellen, was für das freie Keton nicht zutrifft. Ferner mußte aber in Betracht gezogen werden, daß bei der Reduction des Isocamphers eine Umlagerung eintreten könne. Isocampher könnte nämlich immerhin die Constitution besitzen, die *Angeli* und *Rimini* ihm zugeschrieben haben, aber — namentlich unter dem Einfluß alkalischer Reductionsmittel — sich in eine Acetylpenten-Verbindung verwandeln. Die *Möglichkeit* eines solchen Vorgangs erläutern die nachstehenden Formeln:

CH_3 | C; CH⫽ \C:O; C_3H_7 CH\ /CH_2; CH_2 + H_2O = CH_3 | C(OH); CH_2/ \CO; C_3H_7 CH\ /CH_2; CH_2

Isocampher (nach Angeli).

= H_2O + CH_3 | COH; C═C; C_3H_7 CH\ /CH_2; CH_2 + H_2O = CH_3 | C(OH)(OH); CH═C; C_3H_7 CH\ /CH_2; CH_2

1) Annal. 379, 220 (1911).

```
                        CH3                          CH3
                         |                            |
                         CO                           CO
                         |                            |
= H2O +         CH=======C    + H2 =         CH2------CH
                |        |                    |        |
         C3H7 CH\        /CH2         C3H7 CH \        / CH2
                  \    /                        \    /
                   CH2                           CH2
                                            Dihydropinolon.
```

Die Tatsache, daß nicht nur bei der Reduction mit Natrium und Alkohol, also in stark alkalischer Lösung (d. h. unter Condensationsvorgänge befördernden Bedingungen), Isocampher in Dihydropinolon übergeht, sondern auch bei der Reduction nach *Paal*, hatten das Eintreten einer derartigen Atomverschiebung allerdings schon unwahrscheinlich gemacht. Wenn man das für den Vorgang unbedingt erforderliche freie Carbonyl aber durch Oximierung festlegte, war ein Reactionsverlauf, wie der eben skizzierte, überhaupt nicht mehr in Betracht zu ziehen. Entstand bei der Reduction des Oxims nach *Paal* also auch ein Dihydropinolon-Derivat, so war mit Sicherheit anzunehmen, daß schon im Isocampher ein Fünfring vorhanden ist und daß er nicht erst beim Übergang der ungesättigten in die gesättigte Verbindung entsteht.

Das bei 105° schmelzende Isocampheroxim wurde daher direct in alkoholischer Lösung der Reduction nach *Paal* unterworfen. Der Wasserstoff wird gut aufgenommen und es macht sich nach beendeter Reduction durch den Geruch die Anwesenheit von etwas *Base* bemerklich. Um die basischen Producte zu binden und gleichzeitig das vorhandene reducierte Oxim zu zerlegen, wurde mit Schwefelsäure angesäuert und mit Wasserdampf destilliert. Es ging ein *gesättigtes*, wie Amylacetat riechendes Keton über, das mit *Dihydropinolon identifiziert werden konnte.* Nun wurde die bei der Reduction des Isocampheroxims entstandene *Base*, die sich gleichfalls als gesättigt erwies, zu näherer Characterisierung durch Umsetzung mit Kaliumcyanat in den Harnstoff verwandelt. Die schwer lösliche Verbindung schmolz nach dem Umkrystallisieren aus verdünntem Alkohol bei 186° und erwies sich als völlig identisch mit dem auf entsprechendem Wege gewonnenen Harnstoff aus *Dihydropinolylamin*, das seinerseits durch directe Reduction von Dihydropinolonoxim in alkoholischer Lösung mit Natrium dargestellt war. Die oben aufgeworfene Frage ist damit erledigt: schon „*Isocampher*“ *enthält einen Fünfring.* Die weitere Frage aber, welchem Re-

actionsmechanismus das Δ'-Acetyl(1)-isopropyl(3)-cyklopenten seine Entstehung aus Fenchon- und Campher-Oxim (durch die Nitrimine $C_{10}H_{16}O_2N_2$ hindurch) verdankt, läßt sich auf Grund experimenteller Tatsachen noch nicht beantworten. Nur das habe ich neulich schon nachgewiesen [1]), daß die Reaction durch eine Schwefelsäureverbindung als Zwischenproduct hindurchgeht. Auf dem Papier kann man die Umwandlungsmöglichkeiten natürlich leicht construieren, was ohne experimentelle Grundlage ja aber wenig Wert hat. Die Abwandlung des Campher-Moleküls in Acetylisopropylcyklopenten kann man z. B. durch folgende, ganz einfache Reactionsfolge erklären:

```
CH2—C(CH3)—CO  + OH                 CH2—C(CH3)—CO
|   ·· |··     |   H                |     |       |
|      |  CH3  |                    |     OH      |
|      C<      |          →         |     OH      |
|      |  CH3  |                    |     |       |
CH2—CH———:———CH2 + OHH              CH2—CH        CH3
                                          |
      Campher.                            CH(CH3)2
```

```
          CH2—C—COCH3
          |   |
          |   CH
   →      |   ||            + 2 H2O
          CH2—CH
              |
              CH(CH3)2
```

Isopinolon (= Isocampher).

Der ganze Vorgang der Isopinolonbildung aus Campher und aus Fenchon ist ein neuer Beleg dafür, in wie labilem Gleichgewicht die Atomconfiguration in diesen Ketonen sich befindet. Auf der anderen Seite ist bemerkenswert, daß das Entstehen von Acetylcyklopenten-Verbindungen nun schon bei mehreren unerwarteten Umformungen beobachtet ist. So entsteht Acetylcyklopenten bei der Oxydation von Cyklohexen und von Cyklohexenessigsäure mit Permanganat [2]), Acetyl-isopropyl-cyklopenten (Pinolon) ist aus Pinoltribromid [3]) aus Camphernitrim und aus Fenchonnitrimin erhältlich.

---

1) Annal. **379**, 217.
2) Annal. **359**, 308 (1908); **365**, 275 (1909); Ber. **42**, 145 (1909).
3) Annal. **384**, 196 (1911).

V. Ueber die Condensationsprodukte cyclischer Ketone mit Aceton.

(Mitbearbeitet von Wolfgang von Rechenberg.)

Schon vor längerer Zeit ist gezeigt worden[1]), daß sich cyclische Ketone mit Aceton condensieren lassen. Als erstes Beispiel wurde die Condensation von 1.3-Methylcyklohexanon mit Aceton und das dabei entstehende isomere Pulegon $C_{10}H_{16}O$ beschrieben. Wie der Reactionsverlauf sich abspielt, ist s. Z. aber noch nicht sichergestellt worden. Für das synthetisch gewonnene Pulegon kamen zunächst drei Formeln in Betracht:

I. CH_3 … $:CHCOCH_3$

II. CH_3 … $:O$ … $\ddot{C}(CH_3)_2$

III. CH_3 … $:C(CH_3)_2$ … $:O$

von denen II auszuschließen war, da sie dem gewöhnlichen Pulegon zukommt und die synthetische Verbindung weder mit diesem, noch, wie gleich einzuschalten ist, mit dem später entdeckten Isopulegon identisch ist.

Da es s. Z. nicht gelingen wollte, das neue ungesättigte Keton $C_{10}H_{16}O$ vollständig zu reducieren und es geringe Neigung zur hydrolytischen Spaltung zeigte, ist dann noch eine vierte Formel in Rechnung gezogen[2]), nämlich

IV. CH_3 … $-C{\displaystyle\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow CH_2}{\searrow CH_3}}$ … $:O$

die aber keineswegs als sicher gestellt gelten konnte.

Es war daher geboten, die damaligen Versuche unter Benutzung der inzwischen reichlich gesammelten Erfahrungen und verbesserten Untersuchungsmethoden neu in Angriff zu nehmen und gleichzeitig durch Übertragung auf andere Verbindungstypen zu erweitern.

---

1) Ber. **29**, 1597, 2955 (1896); Annal. **300**, 268. (1898).

2) Annal. **300**, 275 (1898).

Als wichtigstes Resultat dieser Versuche mag das vorweg genommen werden, daß der einwandfreie Nachweis geführt werden konnte, daß bei der Condensation der Cyklohexanone mit Aceton die Condensationsreaction in dem Sinne verläuft, daß das Sauerstoffatom des cyclischen Ketons mit dem Wasserstoff des Acetons als Wasser austritt, daß also ungesättigte extracyclische Ketone sich bilden, die dann bei der Reduction in gesättigte extracyclische Ketone vom Typus $R-CH_2COCH_3$ [wo R = cyclisches Radical] überführbar sind.

Damit ist aber noch keineswegs erwiesen, daß die als erstes Condensationsproduct isolierten ungesättigten Ketone eine semicyclische Bindung enthalten, daß sie also (wie Formel I es ausdrückt) dem Typus ⬡$=CH\,CO\,CH_3$ zuzuzählen sind. Die erwähnte früher schon gemachte Beobachtung, daß die ungesättigte Verbindung $C_{10}H_{16}O$ sich schwer vollständig nach den damals üblichen Methoden reducieren ließ, daß sie sich schwer hydrolisiert, daß sie nicht die erwarteten Oxydationsproducte lieferte, machte diese Formel schon unwahrscheinlich. Dazu kommt, daß die für die betreffenden ungesättigten Ketone ermittelte Molekularrefraction kein, oder wenigstens nur ein sehr geringes Inkrement aufweist, während das von Ketonen obiger allgemeiner Formel zu erwarten wäre.

Aus diesen Gründen ist es viel wahrscheinlicher, daß die Äthylenbindung in den ursprünglich entstehenden Condensationsproducten zwischen cyclischen Ketonen und Aceton nicht semicyclisch, sondern im Ring steht, beziehungsweise daß Gemenge vorliegen, in denen die zweite Form die erste überwiegt. Da dem Condensationsvorgang ja eine Addition vorhergeht, muß das Additionsproduct zwischen cyclischem Keton und Aceton die Formel A besitzen und man sieht, daß eine Verbindung von solchem Bau ebenso leicht in B wie in C übergehen kann.

A. ⬡$<^{OH}_{CH_2\,CO\,CH_3}$

↙ ↘

B. ⬡$=CH\,CO\,CH_3$ C. ⬡$-CH_2\,CO\,CH_3$

Die Versuche, beide Formen getrennt zu isolieren, wie das ja für die entsprechend aus Oxysäuren analoger Formel entste-

henden ungesättigten Säuren gelungen ist[1]), sind noch nicht abgeschlossen. Aus den experimentellen Ergebnissen sei vorläufig nur Folgendes mitgeteilt.

1) 1.3-Methylcyklohexenaceton

[aus 1.3-Methylcyklohexanon und Aceton.]

Über die Bedingungen der Condensation und die Eigenschaften des aus den Componenten leicht zu erhaltenden ungesättigten Ketons $C_{10}H_{16}O$ ist dem früher Mitgeteilten nichts wesentlich Neues hinzuzufügen.

Mit Hülfe der Paal'schen Methode ließ sich das Keton leicht vollständig reducieren. Es entsteht dabei

1.3-Methylcyklohexylaceton

CH_3—⟨ring⟩—$CH_2\,CO\,CH_3$,

das durch Permanganat von allen ungesättigten Anteilen befreit und blos durch fractionierte Destillation gereinigt, folgende Eigenschaften aufwies:

Siedepunkt 211.5—212°, $d_{21,5} = 0.8915$, $n_D = 1.4496$.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
n = 46.22	46.39.

Die physikalischen Constanten der Verbindung liegen denen für Menthon ermittelten also ziemlich nahe, aber die Dichte ist etwas niedriger und während der Geruch des ungesättigten Ausgangsketons an Pulegon erinnert, riecht die gesättigte Verbindung nicht nach Menthon, sondern besitzt den Geruch anderer bekannter extracyclischer Ketone. Das Keton ist linksdrehend. Das Semicarbazon schmilzt bei 154°.

Bei der Oxydation mit Hypobromit liefert das gesättigte Keton in guter Ausbeute die flüssige, unter 30 mm bei ca. 152° siedende 1.3-Methylcyklohexylessigsäure

CH_3—⟨ring⟩—$CH_2\,COOH$,

2) 1.4-Methylcyklohexenaceton

CH_3—⟨ring⟩—$CH_2\,CO\,CH_3$ (?)

1) Annal. 365, 256ff. (1909).

Die Verbindung wird unter denselben Bedingungen wie die vorige aus 1.4-Methylcyklohexanon und Aceton erhalten und hat durch das Semicarbazon gereinigt folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 216—217°, $d_{21} = 0.916$, $n_D = 1.4672$.

Berechnet für $C_{10}H_{16}O$ ⌈=	Gefunden
M = 45.82	46.06.

Das ungesättigte Keton riecht etwas anisartig und ähnlich dem Δ^3-Tetrahydro-p-Acetyltoluol[1])

CH_3—⟨ring⟩—CO CH_3,

als dessen höheres Homologes es betrachtet werden darf.

Das Semicarbazon schmilzt bei 122—123°, das Oxim ist flüssig.

Bei der Reduction entsteht:

1.4-Methylcyklohexylaceton

CH_3—⟨ring⟩—CH_2COCH_3

von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 214—215°; $d_{21} = 0.8930$, $n_D = 1.4499$.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
M = 46.22	46.33.

Das Semicarbazon schmilzt bei 166°.

Mit Hypobromit behandelt liefert dies Keton glatt die bei 73—74° schmelzende 1.4-Methylcyklohexylessigsäure[2]).

Analyse des Silbersalzes: 0.2514 gaben 0.1034 Ag.

Berechnet für $C_9H_{15}AgO_2$	Gefunden
Ag — 41.03	41.13.

1) Annal. 360, 54 (1908).
2) Annal. 381, 95 (1911).

Das Zustandsdiagramm der Kohlensäure.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Februar 1912.

(Mit 5 Figuren im Text.)

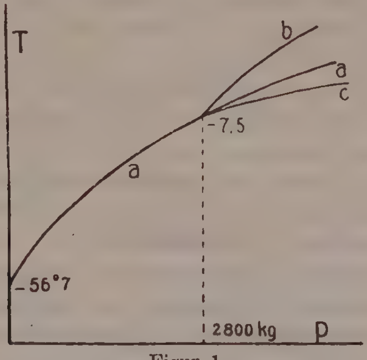
Es konnte früher[1]) gezeigt werden, daß, wenn der Temperaturkoeffizient der molekularen Oberflächenenergie, $-\frac{d\gamma\,(Mv)^{2/3}}{dt}$, größer als 2.0 ist, und die Temperaturabhängigkeit der molekularen Oberflächenenergie eine lineare ist, immer nur die Krystallformen einer Krystallgruppe aus dem flüssigen Zustande sich bilden. Diese Regel schien eine Ausnahme zu erleiden, denn obwohl der Temperaturkoeffizient der molekularen Oberflächenenergie für flüssige Kohlensäure −2.22 beträgt, und die molekulare Oberflächenenergie linear mit steigender Temperatur abnimmt, hatte ich früher[2]) auf Grund nicht einwandfreier Beobachtungen angenommen, daß von -56.7^0 und 5.1 Atm. bis zu -7.5^0 und 2800 kg pro 1 qcm eine andere Krystallart der CO_2 sich aus der flüssigen Kohlensäure ausscheidet als bei höheren Drucken. Bei diesen Versuchen war ein durch Zusammenpressen von CO_2-Schnee erhaltener durchscheinender Zylinder von 80 ccm, nachdem er von Schreibpapier umhüllt war, im druckfesten Gefäß von einer Mischung von Glyzerin und Wasser umgeben worden. Bei Drucken über 2800 kg bis zu 5000 kg waren die gefundenen Gleichgewichtsdrucke nicht unabhängig von dem Volumen. Durch die festgelegten Gleichgewichtsdrucke konnten drei Kurven gelegt werden, welche als die Schmelz-

---

1) Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen. 1911. S. 358.

2) Schmelzen und Krystallisieren. 1903. S. 294.

kurve der gewöhnlichen krystallisierten CO_2, *a*, als die Schmelzkurve einer neuen Krystallart, *b*, und die Umwandlungskurve dieser beiden Krystallarten, *c*, angesprochen wurden.



Figur 1.

Diese Resultate lassen aber auch eine andere Deutung zu. Wenn nämlich auch nur ein Teil der Kohlensäure sich mit der Glyzerin-Wasser-Lösung gemischt hatte, so wird dadurch der Gleichgewichtsdruck des Systems, wenn die Menge der geschmolzenen CO_2 nicht sehr erheblich ist, mit abnehmendem Volumen, also mit abnehmender Menge der flüssigen CO_2, stark anwachsen können. Dadurch erhält man dann eine Reihe von Gleichgewichtsdrucken, die nicht mehr auf einer Kurve sondern auf einem Flächenstreifen der p-T-Ebene liegen, und da bei Drucken über 3000 kg die früheren Bestimmungen der Gleichgewichtsdrucke für sehr verschiedene Mengen flüssiger CO_2 ausgeführt wurden, so können hierdurch verschiedene Gleichgewichtskurven vorgetäuscht worden sein.

Aus diesen Gründen war es erwünscht, die Bestimmung der Koordinaten der Schmelzkurve der CO_2 zu wiederholen, und zwar in einer Weise, die nicht mehr die letzte Möglichkeit zuläßt. Ferner empfahl sich als Methode nicht die frühere der Bestimmung des Gleichgewichtsdrucks bei konstanter Temperatur, sondern die Festlegung einiger p-T-Kurven bei fast konstantem Volumen. Beim Erwärmen eines krystallisierten Stoffes in einem druckfesten Gefäß ändert sich der Druck viel schneller während der Schmelzung als vor und nach der Schmelzung. Wird bei der Erwärmung eine Umwandlungskurve und die Schmelzkurve des Stoffes überschritten, so tritt sowohl während der Umwandlung als auch während der Schmelzung die schnellere Änderung des Druckes ein, man kann also durch Aufnahme von p-T-Kurven die Frage nach

der Existenz der Umwandlungskurve *c* Fig. 1 viel sicherer entscheiden als durch Bestimmungen des Gleichgewichtsdruckes bei konstanter Temperatur. Um den CO_2-Schnee vor der Berührung des den Druck übertragenden Rizinusöls zu schützen, wurde zwischen die Stahlbombe, in der sich der in einem Glasröhrchen zusammengepreßte CO_2-Schnee befand, und den Druckapparat ein *U*-förmiges Stahlrohr, gefüllt mit Quecksilber, geschaltet. Da die Schmelzkurve des Quecksilbers bei 3000 kg etwa 20° tiefer liegt als bei der CO_2, so konnten auf den *p-T*-Kurven die Schmelzeffekte der CO_2 und des *Hg* leicht unterschieden werden.

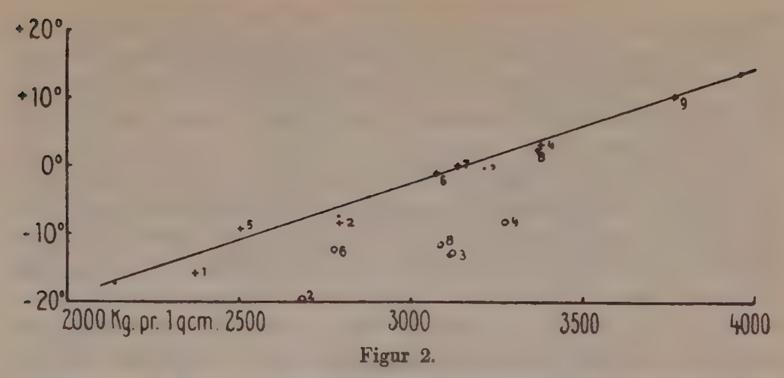
Auf den *p-T*-Kurven der CO_2 zwischen 2500—3500 kg war immer nur ein einziges Temperaturintervall, in dem der Druck beschleunigt ansteigt, zu beobachten, so daß man mit Sicherheit behaupten darf, daß ein Tripelpunkt bei −7.5° und 2800 kg nicht existiert und ebenso auch nicht die Gleichgewichtskurven *b* und *c* Fig. 1.

Koordinaten der Schmelzkurve der Kohlensäure.

Nr. des Versuches	Beginn der Schmelzung t^0	p	Ende der Schmelzung t^0	p	Δp
1*	−20.°5	2318	−16.°0	2370	
2*	−20.°0	2675	− 8.°5	2790	
3*	−13.°0	3108	− 0.°5	3220	
4*	− 8.°2	3265	+ 3.°0	3370	
5	—	—	9.°3	2500	244
6	−12.°2	2775	− 1.°0	3068	298
7	—	—	0.°0	3130	300
8	−11.°5	3075	+ 2.°6	3365	257
9	—	—	+10.°0	3760	> 229

* Die Versuche Nr. 1—4 waren mit 1.5 ccm CO_2-Schnee, die übrigen mit 6.0 ccm CO_2-Schnee angestellt worden.

Vergleicht man die früher von mir bei konstanter Temperatur bestimmten Gleichgewichtsdrucke, in Fig. 2 mit Punkten bezeichnet, mit den Temperaturen des Endes der Schmelzung auf den *p-T*-Kurven, mit Kreuzen bezeichnet, so bemerkt man, daß die Kurve der früheren Bestimmungen zwischen die Punkte der neuen Bestimmungen fällt. Die Punkte 1 2 3 und 4 wurden in einer kleinen Bombe mit 1.5 ccm CO_2-Schnee, die anderen Punkte in einer größeren Bombe mit 6.0 ccm CO_2-Schnee erhalten. Das zur Temperaturbeobachtung dienende Thermoelement war nicht in die CO_2 selbst eingeführt, sondern nur durch eine Asbestbewickelung an die Bombe angepreßt. Daher liegen bei tieferen Tempe-



Figur 2.

raturen, bei denen die Erwärmungsgeschwindigkeit der Bombe größer war als bei höheren Temperaturen, die mit der größeren Bombe erhaltenen Schmelzpunkte bei etwas höheren Temperaturen als die mit der kleineren Bombe bestimmten Schmelzpunkte. Die durch Kreise kenntlich gemachten Zustandspunkte des Beginns der Schmelzung liegen bei bedeutend tieferen Temperaturen, etwa 10° tiefer, als die Zustandspunkte des Endes der Schmelzung. Hieraus folgt, daß der aus komprimierter CO_2 hergestellte CO_2-Schnee eine nicht unerhebliche Menge einer Beimengung enthalten muß. Diese Beimengung ist wohl das aus der Luft auf dem kalten Schnee kondensierte Wasser, welches sich in merklicher Menge in der flüssigen CO_2 lösen muß. Da sich auf kleineren Mengen CO_2-Schnee relativ mehr Wasserdampf kondensieren wird, so liegen die Temperaturen des Beginns der Schmelzung bei den Versuchen 1 2 3 4 mit 1.5 ccm CO_2-Schnee noch um etwa 4° tiefer als die mit 6.0 ccm CO_2-Schnee ausgeführten Versuche. Würde man einen Stoff ohne Beimengungen sehr langsam erwärmen, so würde das Stück der p-T-Kurve, welches der Schmelzperiode entspricht, mit der Schmelzkurve zusammenfallen. Der Zustandspunkt des Beginns der Schmelzung und der des Endes der Schmelzung würden dann beide auf die Schmelzkurve fallen. Enthält aber der untersuchte Stoff Beimengungen, so fällt der Zustandspunkt des Beginns der Schmelzung in das Zustandsfeld der Krystalle, bei zu schneller Erwärmung kann der Zustandspunkt des Endes der Schmelzung in das Zustandsfeld der Flüssigkeit fallen. Aus diesem Grunde liegt der Zustandspunkt 5 des Endes der Schmelzung etwas zu hoch.

Die Wiederholung der Koordinaten-Bestimmung der Schmelzkurve der CO_2 zwischen 2800 und 3800 kg hat also ergeben, daß von 1 kg bis zu diesen Drucken nur eine Krystallform der CO_2

stabil ist, was für die CO_2 als nicht assoziierte Flüssigkeit zu erwarten war. Durch diese Feststellung wird dem Satz, daß eine bei gewöhnlichem Druck nicht assoziierte Flüssigkeit nur in Formen einer Krystallgruppe krystallisieren kann, die einzige Ausnahme genommen.

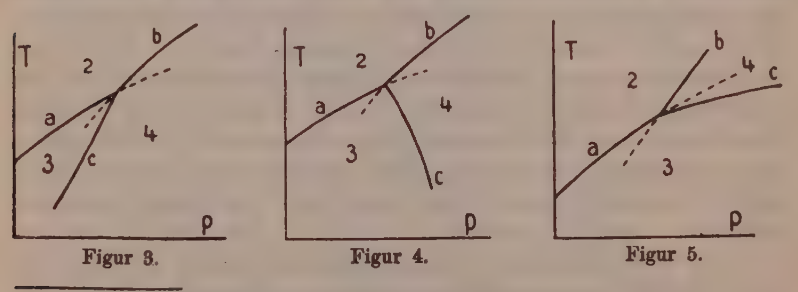
Betrachten wir das frühere Diagramm Fig. 1 von $p = 2800$ bis 5000 kg vom Standpunkt der reinen Thermodynamik und vom Standpunkt der Atomistik, so kommen wir zum Schluß, daß die Thermodynamik solche Zustandsdiagramme zuläßt, daß aber die Atomistik gewichtige Gründe gegen das Vorkommen eines solchen Zustandsdiagrammes vorzubringen hat. Für die Anwendung der Atomistik auf die Gleichgewichtslehre ist also von größter Bedeutung, was die Erfahrung über das Vorkommen jener Art von Diagrammen aussagt. Sollte ein Diagramm jener Art auch nur für einen Stoff festgestellt werden können, so müßte man die Anwendung der Atomistik zur Erläuterung der Zustandsdiagramme aufgeben. Wir wollen, nur die stabilen Krystallformen berücksichtigend, drei Fälle betreffs der Lage der Umwandlungskurve c zu den beiden Schmelzkurven a und b, die in normaler Weise mit wachsendem Druck zu höheren Temperaturen steigen mögen, unterscheiden.

1. Die Umwandlungskurve c mag, in dem auf ihr mit wachsendem Druck die Gleichgewichtstemperatur steigt, in den Schnittpunkt der beiden Schmelzkurven a und b treffen, Fig. 3.

2. Die Umwandlungskurve c mag in diesen Punkt treffen, indem auf ihr bei abnehmendem Druck die Temperatur steigt, Fig. 4 und

3. mag die Umwandlungskurve, indem auf ihr mit abnehmendem Druck die Temperatur fällt, zum Tripelpunkt gehen, Fig. 5.

Thermodynamisch betrachtet sind auf Grund eines früher[1]) abgeleiteten Satzes alle Lagen der Umwandlungskurve c zwischen



Figur 3. Figur 4. Figur 5.

1) Annalen der Physik. Bd. 6. S. 65. 1901.

den Verlängerungen der Schmelzkurven *a* und *b* im Zustandsfeld der beiden Krystallarten 3 und 4 möglich. Gegen den Fall 3 ist also vom Standpunkt dieses Satzes nichts einzuwenden, und ebenso wenig kann etwas gegen diesen Fall eingewandt werden, wenn man denselben mit Hülfe der Flächen des thermodynamischen Potentials ableitet. Berücksichtigt man aber, daß bei konstanter Temperatur für die drei Fälle folgende Beziehungen der spezifischen Volumen der drei Phasen: 2, flüssig, 3 und 4, krystallisiert, gelten müssen:

1. $v_2 > v_2 > v_4$,
2. $v_2 > v_3 > v_4$ und
3. $v_2 > v_4 > v_3$,

so ersieht man, daß in den Fällen 1 und 2 aus der Flüssigkeit bei höheren Drucken die Form mit kleinerem Volumen krystallisieren wird, während im Falle 3 bei höheren Drucken die Form 4, deren Volumen größer ist, als das der Form 3, krystallisieren sollte. Es müßte also in diesem Falle die Molekülart größeren Molekularvolumens sich bei höheren Drucken krystallbildend betätigen. Da aber die Konzentration dieser Molekülart, wie thermodynamisch gezeigt werden kann, mit wachsendem Druck abnimmt, darf sie nicht erst bei höheren Drucken zur Krystallbildung gelangen, sondern müßte sich schon bei kleineren Drucken in dieser Richtung betätigen.

Wenn bei einem Stoff ein Zustandsdiagramm entsprechend dem der Figur 5, in dem die Umwandlungskurve sich über die durch den Tripelpunkt gelegte Parallele zur *p*-Achse erhebt, gefunden werden sollte, so würde diese Tatsache mit dem Satze, daß der Vorgang der Krystallisation eine Polymerisation der Moleküle nicht bedingt, daß also an der Raumgitter-Besetzung nur eine der in der Flüssigkeit schon vorhandenen Molekülarten sich beteiligt, nicht verträglich sein.

Man müßte, wenn bei einem Stoffe das Zustandsdiagramm, Fig. 5, wirklich festgestellt werden sollte, nicht nur jenen Satz aufgeben, sondern auch einen Grund angeben können, der hinreicht, um die Tatsache zu verstehen, daß sich bei kleinen Drucken die Moleküle größeren Volumens nicht ausscheiden, während sie doch bei höheren Drucken sich krystallbildend betätigen. Das einzige Zustandsdiagramm, in dem für die Volumen der drei Phasen die Beziehung 3) gilt, war das der CO_2; nachdem nunmehr erwiesen worden ist, daß ein Tripelpunkt auf der Schmelzkurve der CO_2

nicht vorkommt, ist kein einziges Zustandsdiagramm bekannt, welches gegen den Satz, daß nur solche Moleküle, welche in der Flüssigkeit schon vorhanden sind, sich an der Krystallbildung beteiligen, spricht. Außerdem ist durch die Revision des Zustandsdiagrammes der Kohlensäure die Regel, daß nicht assoziierten Flüssigkeiten nur eine stabile Krystallart entspricht, die einzige Ausnahme genommen worden.

Gruppen zweiseitiger Kollineationen.

Von

E. Study in Bonn.

Vorgelegt in der Sitzung am 2. März von D. Hilbert.

In der Theorie der Abel'schen Funktionen treten Gruppen von Kollineationen auf, die, abgesehen von der identischen Kollineation, alle involutorisch und folglich paarweise vertauschbar sind. Dahin gehören die sogenannte Vierergruppe des binären Gebietes und jene vielfach betrachtete Gruppe, die als *Kollineationsgruppe der Kummerschen Konfiguration* bekannt ist. Die merkwürdigen Eigenschaften dieser letzten Gruppe und ihrer von Herrn Wirtinger untersuchten Analoga[1]) haben die Entstehung der vorliegenden Arbeit veranlaßt. Wir fassen die identische Transformation mit den involutorischen unter dem Namen *zweiseitiger* Transformationen zusammen[2]), und stellen die beiden Aufgaben:

I. *Man soll alle Maximalgruppen zweiseitiger Kollineationen finden.*

II. *Man soll alle Maximalgruppen zweiseitiger reeller Kollineationen finden.*

Das heißt wir verlangen alle Gruppen complexer wie reeller zweiseitiger Kollineationen zu bestimmen, die nicht in umfassenderen Gruppen derselben Art enthalten sind. Daß wir nur nach diesen offenbar interessantesten Maximalgruppen fragen, ist übrigens eine nebensächliche und leicht aufzuhebende Einschränkung. Beide Aufgaben werden hier mit einfachen Mitteln vollständig erledigt.

---

1) Monatshefte für Mathematik, Bd. I, 1890.

2) Wegen der Terminologie siehe H. Weber, Algebra (2. Auflage), I, S. 433, II, S. 58.

(§§ 1, 2, 3). Es zeigt sich, daß die zuvor genannten speziellen Gruppen solche Maximalgruppen sind, und unter allen möglichen eine Sonderstellung einnehmen (§ 4). Zugleich werden wir nachweisen, daß unter diesen Gruppen die der Kummer'schen Konfiguration eine *isolierte* Stellung einnimmt; was mit der Unterscheidung zusammenhängt, die wir durch die Worte *links* und *rechts* auszudrücken pflegen (*Satz 16*). Außerdem findet sich, daß auch noch das nächste Analogon der Kummer'schen Gruppe solche *singuläre* Eigenschaften hat, die aber von ganz anderer Art sind (§ 5, *Satz 23*).

Zum Schluß bringen wir auch einige Anwendungen des Vorgetragenen auf andere, Nicht-Abel'sche und zwar *einfache* Gruppen, darunter auch solche auf gewisse *kontinuierliche* Gruppen (§ 5). Hier werden wir uns sehr kurz fassen, und auf Beweise verzichten müssen. Es würde schon eine recht umfangreiche Darlegung nötig sein, um einen Begriff zu geben von dem Reichtum der Zusammenhänge, die unseren anscheinend so eng begrenzten Stoff mit den verschiedenartigsten Theorien verbinden. Bemerkt sei noch, daß die angewandte Methode den einfachsten Fall einer solchen vorstellt, die in der allgemeinen Theorie der Abel'schen Kollineationsgruppen mit ähnlichem Erfolg wird verwendet werden können.

§ 1. Definitionen und vorbereitende Sätze.

Wir betrachten ein Kontinuum, *Gebiet n ter Stufe* genannt und weiterhin als $\mathfrak{R}_n$ bezeichnet, dessen einzelne Stelle durch irgend ein Wertsystem von n ($\geqq 2$) homogenen komplexen Veränderlichen bezeichnet wird, das also, nach der zweckmäßigen Terminologie des Herrn Segre, ein spezieller Raum (R_{n-1}) von $n-1$ „komplexen Dimensionen" ist[1]). In diesem Gebiet werden, wenn $n > 2$ ist, *Kollineationen* und *Korrelationen* wie üblich erklärt, und von uns unter dem Namen *projektiver Zuordnungen* oder *Projektivitäten* zusammengefaßt. Für den Fall $n = 2$ geben wir eine besondere Erklärung. Wir denken uns dann alle Projektivitäten doppelt gesetzt, ihre ganze Mannigfaltigkeit mit zwei *Schichten* bedeckt. Projektivitäten der einen Schicht heißen Kollineationen, die der anderen Korrelationen. Das Produkt zweier Kollineationen oder zweier Korrelationen fassen wir als eine Kollineation auf, das Produkt einer Kollineation und einer Korrelation oder einer Korrelation

1) Wo es sich um lineare Mannigfaltigkeiten handelt, ist es fast immer einfacher, die *Stufenzahlen* zur Erscheinung zu bringen, was leider oft verkannt wird. Wir ziehen also die Bezeichnung $\mathfrak{R}_n$ der anderen R_m ($= \mathfrak{R}_{n-1}$) vor.

und einer Kollineation als eine Korrelation. Außerdem erstrecken wir den Begriff der *Kollineation* auch auf den nachträglich noch hinzuzunehmenden Fall $n = 1$, wo er dann die Zuordnung eines einzigen Punktes zu sich selbst bedeuten soll. Diese Festsetzungen dienen der Einfachheit und Kürze; wir ersparen uns dadurch die sonst nötige Unterscheidung mehrerer Fälle. Aus dem gleichen Grunde wird es sich als zweckmäßig erweisen, ein „*Gebiet* $\mathfrak{R}_0$“ zu fingieren, das gar keinen Punkt enthält, und also auch mit keinem anderen Gebiet einen Punkt gemein hat.

Unmittelbar sieht man, daß eine Gruppe zweiseitiger Kollineationen (wie jede Gruppe periodischer Kollineationen) nur eine endliche Zahl N von Transformationen umfassen kann, ferner, daß sie zur Familie der Abel'schen oder *kommutativen* Gruppen gehört, und daß also die Zahl N, die *Ordnung* der Gruppe, immer eine Potenz von zwei ist ($2^0 = 1$ im Falle der identischen Kollineation). Man wird nun so zu Werke gehen können, daß man zunächst eine involutorische Kollineation nach Belieben annimmt — die dann mit der identischen Kollineation notwendig eine Gruppe bildet —, hierauf eine zweite involutorische Kollineation und das Produkt der ersten und zweiten Kollineation hineinfügt, so daß wieder eine Gruppe — eine sogenannte *Vierergruppe* — entsteht, und so lange mit diesem Erweiterungsprozeß fortfährt, bis er von selbst ein Ende erreicht. Gleichzeitig wird man die dem Koordinatensystem anhaftende Willkür dazu verwenden, die nach einander konstruierten Gruppen von 2, 4, 8, ... Kollineationen auf möglichst einfache Weise durch Formeln darzustellen. Je nachdem man es mit unserer ersten oder zweiten Aufgabe zu tun hat, wird man dabei die Ecken des Koordinatenpolytops und den zugehörigen Einheitspunkt im komplexen oder nur im reellen Gebiet variieren lassen. Wir behandeln zunächst die Aufgabe I, die die einfachere von beiden ist.

Zunächst bringen wir die gegenüber der Gruppe aller Kollineationen invarianten Eigenschaften der zweiseitigen Kollineationen in Erinnerung. Man stelle die Stufenzahl n irgendwie als Summe von zwei *nicht negativen* ganzen Zahlen dar, $n = l + m$. Ist dann $l > 0$, $m > 0$, so nehme man in $\mathfrak{R}_n$ zwei Gebiete $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_m$ übrigens beliebig, doch so an, daß sie keinen Punkt gemein haben und folglich in keinem Gebiet $n-1$ ter Stufe, in keinem $\mathfrak{R}_{n-1}$ liegen. Diese beiden Gebiete sind dann, wie wir sagen wollen, *die Inzidenzgebiete* einer durch sie bestimmten involutorischen Kollineation. Irgend zwei durch die Kollineation gepaarte Punkte fallen entweder zusammen, und liegen dann in $\mathfrak{R}_l$ oder in $\mathfrak{R}_m$, oder sie

liegen auf einer durch einen der Punkte schon bestimmten Geraden, die $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_m$ trifft, und werden durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_m$ harmonisch getrennt. Ist $l = 0$ oder $m = 0$, so kann man das für diesen Fall fingierte Gebiet $\mathfrak{R}_0$ (siehe oben) zusammen mit $\mathfrak{R}_n$ als das Paar der „Inzidenzgebiete" der identischen Kollineation E auffassen. Jedem Paar „ganz getrennt liegender" Gebiete $\mathfrak{R}_l$, $\mathfrak{R}_m$, wie wir sie hiermit erklärt haben, entspricht dann eine zweiseitige Kollineation, und alle gegenüber komplexen Kollineationen invarianten Eigenschaften dieser Kollineation sind durch die gewählte Zerlegung $n = l + m$ bestimmt. Verteilt man die Ecken der Koordinatenpolytops auf $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_m$, so wird die Kollineation durch l oder m Vorzeichenwechsel der Koordinaten dargestellt, oder sie kann doch so dargestellt werden. Sind die Inzidenzgebiete einer involutorischen Kollineation bekannt, so hat man damit auch alle linearen Punktmannigfaltigkeiten (Teilgebiete von $\mathfrak{R}_n$), die bei der Kollineation in Ruhe bleiben. Diese müssen nämlich entweder punktweise in Ruhe bleiben und dann in $\mathfrak{R}_l$ oder $\mathfrak{R}_m$ enthalten sein; oder ihre Punkte werden involutorisch gepaart, und dann sind sie die kleinsten verbindenden Gebiete von zwei auf $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_m$ verteilten Gebieten.

Es seien nun S, T zwei mit einander vertauschbare aber von einander verschiedene zweiseitige Kollineationen ($n > 1$). Dann sind zwei Fälle denkbar:

S und T können zunächst, wie wir sagen wollen, *syzygetisch* sein, d. h. es kann etwa T die Incidenzgebiete von S einzeln in Ruhe lassen. Dies tritt notwendig ein, wenn S oder T die identische Kollineation E ist. Sind S und T involutorisch, so reduziert sich T für jedes Inzidenzgebiet von S auf die identische Kollineation oder wieder auf eine involutorische Kollineation. Auf diese ist das zuvor Gesagte anwendbar. Es folgt also, daß man das Koordinatenpolytop so legen kann, daß S und T *gleichzeitig* durch Vorzeichenwechsel der Koordinaten ausgedrückt werden. S läßt auch die Inzidenzgebiete von T einzeln in Ruhe. Die von S und T erzeugte Gruppe — eine *syzygetische Vierergruppe* — (E, S, T, ST) kann sofort konstruiert werden. Man nehme in $\mathfrak{R}_n$ vier Gebiete $\mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{R}_\beta$, $\mathfrak{R}_\gamma$, $\mathfrak{R}_\delta$ an, deren *eines* auch ein $\mathfrak{R}_0$ sein darf (siehe oben), und zwar derart, daß die Summe der Stufenzahlen $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$ ist, und daß alle zusammen in keinem $\mathfrak{R}_{n-1}$ liegen. Man suche dann die kleinsten verbindenden Gebiete $\mathfrak{R}_{\alpha+\beta}$ u. s. w. Aus diesen lassen sich drei Paare bilden, und jedes von diesen ist das Paar der Inzidenzgebiete von einer der drei involutorischen Kollineationen S, T, ST.

Die zweite der angedeuteten Möglichkeiten besteht darin, daß die Inzidenzgebiete von S durch T, und dann, nach dem Gesagten, auch die von T durch S miteinander vertauscht werden. Alle vier Gebiete müssen dann dieselbe Stufenzahl m haben, die Stufenzahl n ist hier notwendig gerade, $= 2m$. Wir nennen S und T in diesem Falle *azygetisch.* Ist $n = 2$, so sind S und T zwei Involutionen, deren Inzidenzgebiete (hier sogenannte Doppelpunkte) einander harmonisch trennen.

Ist $n > 2$, so liegen die Inzidenzgebiete von S und T ebenfalls völlig getrennt, es gibt keinen gemeinsamen Punkt zweier von ihnen. Von jedem Punkt eines unter ihnen geht sodann eine gemeinsame Sekante aller vier Gebiete aus, eine gerade Linie, die sie alle trifft, und auf jeder dieser Geraden werden durch die zwei Paare von Inzidenzgebieten zwei Paare einander harmonisch trennender Punkte ausgeschnitten. Vervollständigt man die Figur, indem man auf jeder Sekante ein drittes die beiden genannten harmonisch trennendes Paar von Punkten hinzufügt, so erhält man als Ort aller dieser Punkte die beiden Inzidenzgebiete von ST. Die involutorischen Kollineationen S, T und ST sind also *paarweise* azygetisch, die von S und T erzeugte Gruppe (E, S, T, ST) ist, wie wir sagen wollen, *eine azygetische Vierergruppe.* Die Ecken des Koordinatenpolytops können auf die Inzidenzgebiete von S, oder auf die von T, oder endlich auf die von ST verteilt werden. Die Transformationen der Vierergruppe, die wir nun besser durch das Symbol (E, S_1, S_2, S_3) bezeichnen $(S_1 S_2 S_3 = E)$, werden mithin dargestellt oder können doch dargestellt werden durch die linearen, und zwar, wie wir gleich bemerken wollen, *eigentlich-orthogonalen* Transformationen

(1)

	E	S_1	S_2	S_3
$x_1' =$	x_1	x_2	x_1	x_2
$x_2' =$	x_2	x_1	$-x_2$	$-x_1$
$x_3' =$	x_3	x_4	x_3	x_4
$x_4' =$	x_4	x_3	$-x_4$	$-x_3$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die Paare von Inzidenzgebieten von S_1, S_2, S_3, deren analytische Darstellung man den Gleichungen (1) entnimmt, trennen einander, wie wir sagen dürfen, harmonisch.

Wir bemerken nunmehr, daß die syzygetischen und azygeti-

schen Paare S, T von zweiseitigen Kollineationen sich auch algebraisch auf sehr einfache Weise unterscheiden lassen. Gehen wir nämlich von der Darstellung der betrachteten Kollineationen durch lineare Transformationen über zu ihrer Darstellung durch bilineare Formen Σ, T, so daß z. B. der Kollineation S_1 die bilineare Form

$$\Sigma_1 = x_2 u_1 + x_1 u_2 + x_4 u_3 + x_3 u_4 + \cdots$$

zugeordnet wird, so sehen wir, daß im syzygetischen Falle auch diese Formen noch vertauschbar sind, es wird

$$\Sigma T - T\Sigma = 0, \tag{2}$$

während bei der anderen Annahme das nicht zutrifft, vielmehr an Stelle von (2) die Beziehung

$$\Sigma T + T\Sigma = 0 \tag{3}$$

tritt[1]).

Die gefundene Unterscheidung ist natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und ebenso von der Willkür, die man bei der Zuordnung von Kollineationen und bilinearen Formen hat.

Wir ziehen aus dem Gesagten nunmehr einige Schlüsse, die der Leser leicht bestätigen wird.

1. *Jede Gruppe Γ zweiseitiger Kollineationen enthält eine eindeutig bestimmte (nämlich möglichst umfassende) Gruppe γ, deren sämtliche Kollineationen zu allen Kollineationen von Γ syzygetisch sind.*

γ kann sich ebensowohl auf die identische Kollineation reduzieren als auch mit Γ selbst zusammenfallen. Wir nennen γ den *Kern* von Γ.

2. *Jede Gruppe zweiseitiger und paarweise syzygetischer Kollineationen des Gebietes $\mathfrak{R}_n$ ist (bei passender Koordinatenwahl) enthalten in der Gruppe*

$$x'_\varkappa = \pm x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \ldots n), \tag{4}$$

die 2^{n-1} Kollineationen umfaßt. Diese ist eine Maximalgruppe zweiseitiger Kollineationen, sobald n größer ist als 2.

---

1) Allgemein, sind in $\mathfrak{R}_n$ die Kollineationen S und T vertauschbar, und sind Σ und T zugeordnete bilineare Formen, so ist $T\Sigma = \varrho\Sigma T$. Der Faktor ϱ ist eine $n$te Einheitswurzel, und, wenn S und T periodisch sind und zu den primitiven Periodenzahlen μ und ν gehören ($S^\mu = E$, $S^\nu = E$; μ, ν möglichst kleine ganze Zahlen) auch eine μte und νte Einheitswurzel. Ist $\varrho = 1$, so nennen wir die Kollineationen syzygetisch.

Wir wollen diesen mit ihren Kernen identischen Gruppen, die nur als Bausteine der Theorie ein gewisses Interesse zu haben scheinen, das Beiwort *trivial* anhängen.

3. *Ist S eine Kollineation von Γ, die nicht dem Kern angehört (siehe Satz 1), so gibt es in Γ ebensoviele Kollineationen, die zu S syzygetisch sind wie solche die zu S azygetisch sind.*

Insbesondere folgt

4. *Die azygetischen Vierergruppen sind die einzigen Gruppen Γ, deren involutorische Kollineationen paarweise azygetisch sind.*

Es kann sein, daß zwei Untergruppen Γ_1 und Γ_2 von Γ die Eigenschaft haben, daß jede Kollineation von Γ_1 zu jeder Kollineation von Γ_2 syzygetisch ist. Nennen wir dann diese Gruppen *zu einander syzygetisch*, so gilt der Satz:

5. *Zu jeder azygetischen Vierergruppe Γ_1 in Γ gehört eine völlig bestimmte Darstellung von Γ als Produkt (syzygetisches Produkt) von zwei zu einander syzygetischen Gruppen, $\Gamma = \Gamma_1 . \Gamma_2$. Die zweite dieser Gruppen enthält den Kern von Γ.*

Zum Beweise gehe man aus von irgend einer Zerlegung $\Gamma = \Gamma_1 . \Gamma_2^*$. Γ_1 sei $= (E, S_1, S_2, S_3)$, und Γ_2^* sei durch eine sogenannte *Basis* dargestellt. Ersetzt man dann irgend eine Transformation T^* dieser Basis durch eines der drei Produkte $T_\varkappa = S_\varkappa T^*$, so ändert sich Γ_2^*, nicht aber das Produkt $\Gamma_1 . \Gamma_2^*$. Ist nun T^* syzygetisch oder azygetisch zu zweien unter den drei Kollineationen S_1, S_2, S_3, etwa zu S_2, S_3, so ist sie *syzygetisch* zur dritten, also zu S_1, und umgekehrt. Im zweiten Falle ist $T = S_1 T^*$ zu S_1, S_2 und S_3 syzygetisch. Setzt man also, je nach Umständen, $T = T^*$, oder $T = S_\varkappa T^*$ ($\varkappa = 1, 2$ oder 3), und verfährt man so mit allen involutorischen Kollineationen der Basis, so erhält man schließlich, an Stelle von Γ_2^*, die eindeutig bestimmte Gruppe Γ_2 als Produkt aller gefundenen Transformationen T.

§ 2. Maximalgruppen zweiseitiger Kollineationen.

Es bleiben jetzt noch die Maximalgruppen G zweiseitiger Kollineationen zu finden, in denen azygetische Vierergruppen vorkommen ($n = 2m$). Der Fall $n = 2$, in dem die azygetischen Vierergruppen selbst schon Maximalgruppen sind, kann dabei als erledigt angesehen werden.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, daß in dem betrachteten Gebiet $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_m$ $(m > 1)$ eine Mannigfaltigkeit M_m von $1 + (m-1)$ komplexen Dimensionen liegt, die bei einer gegebenen unter den vorausgesetzten Vierergruppen in Ruhe bleibt, alle zuvor beschrie-

benen Sekanten enthält, außerdem aber auch als Ort von Gebieten $m$ter Stufe angesehen werden kann, die sämtlich durch jene Geraden kollinear auf einander bezogen sind, und sie wiederum kollinear (projektiv) auf einander beziehen. Hierdurch aber und durch die weitere (evidente) Eigenschaft, in keinem $\mathfrak{R}_{n-1}$ zu liegen, ist das Gebilde M_m — eine rationale sogenannte *Normalmannigfaltigkeit* — bis auf Kollineationen bestimmt. Jede dieser Mannigfaltigkeiten ist also zu jeder anderen kollinear, jede kann durch zwei Systeme homogener komplexer Parameter

$$(5)\qquad \xi_1 : \xi_2, \quad \varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_m \qquad (m \geqq 2)$$

erschöpfend dargestellt werden, und zwar, bei passender Koordinatenwahl, mit Hülfe der Formeln

$$(6)\qquad x_1 = \xi_1 \varphi_1, \quad x_2 = \xi_2 \varphi_1, \quad x_3 = \xi_1 \varphi_2, \ldots \quad x_n = \xi_2 \varphi_m.$$

Die zu suchende Maximalgruppe G kann jetzt als Produkt zweier ihrer Untergruppen G_1, G_2 dargestellt werden, denen folgende Eigenschaften zukommen:

a) G_1 läßt alle Geraden $\varphi_i : \varphi_k =$ konst. einzeln in Ruhe und vertauscht das gemeinsame binäre Gebiet $\xi_1 : \xi_2$ dieser geraden Linien durch eine Vierergruppe g_1. Diese kann in der Form

(7)

	e	s_1	s_2	s_3
$\xi_1' =$	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
$\xi_2' =$	ξ_2	ξ_1	$-\xi_2$	$-\xi_1$

angenommen werden.

b) G_2 läßt umgekehrt die Gebiete $m$ter Stufe $\xi_1 : \xi_2 =$ konst. einzeln in Ruhe, und vertauscht ihre Punkte vermöge einer gewissen Gruppe g_2 von Kollineationen, die durch lineare Transformationen der Verhältnisgrößen $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_n$ dargestellt werden.

c) Die Gruppen G_1 und g_1, und ebenso die Gruppen G_2 und g_2 sind holomorph. Kennt man g_1 und g_2, so hat man damit auch G_1 und G_2.

Das Letzte folgt daraus, daß die Produkte (6) linear-unabhängig sind. Man kann daher z. B. die Transformationen von G_1 hinschreiben, wenn die von g_1 gegeben sind. So entstehen aus den Formeln (7) die Formeln (1). Dasselbe aber gilt von G_2 und g_2.

d) Die Gruppen G_1 und G_2 sind zu einander syzygetisch.

e) g_2 ist eine Maximalgruppe zweiseitiger Kollineationen, da andernfalls G keine solche sein könnte.

Hiermit ist die Bestimmung der nichttrivialen Maximalgruppen G in $\mathfrak{R}_{2m}$ zurückgeführt auf die Bestimmung aller (trivialen und nichttrivialen) Maximalgruppen in $\mathfrak{R}_m$. Ist m ungerade, so hat der so begonnene Reduktionsprozeß schon sein Ende erreicht, g_2 ist notwendig eine triviale Maximalgruppe. Ist m gerade, so kann die gleiche Schlußweise wiederholt werden. Man kann dann, wenn g_2 nicht trivial ist, $n = 4l$ setzen, und die Gruppe G als syzygetisches Produkt von dreien ihrer Untergruppen darstellen mit Hülfe der nach Analogie von (6) gebildeten Formeln

$$(8) \qquad \begin{matrix} x_1 = \xi_1 \eta_1 \psi_1, \; x_3 = \xi_1 \eta_2 \psi_1, \\ x_2 = \xi_2 \eta_1 \psi_1, \; x_4 = \xi_2 \eta_2 \psi_1, \end{matrix} \quad \text{etc.}$$
$$(x_5 = \xi_1 \eta_1 \psi_2 \ldots \quad x_n = \xi_2 \eta_2 \psi_l).$$

Es ist bewiesen:

6. *Ist $n > 2$, und ist 2^p die höchste Potenz von 2, durch die n teilbar ist ($n = 2^p . q$) so gibt es im Gebiete n ter Stufe $p+1$ wesentlich-verschiedene Maximalgruppen zweiseitiger Kollineationen. Jede von diesen entspricht einer Zerlegung der Stufenzahl n in zwei Faktoren der Form 2^μ und $2^{p-\mu} . q$. Irgend eine dieser Maximalgruppen G kann als syzygetisches Produkt von μ azygetischen Vierergruppen und ihrer Kerngruppe g dargestellt werden, die*

$$2^{(2^{p-\mu} \cdot q - 1)}$$

Kollineationen umfaßt.

Als nicht wesentlich-verschieden betrachten wir hier natürlich solche Gruppen, die zueinander *kollinear* sind[1]).

Die zuletzt genannte Produktdarstellung von G ist nicht eindeutig bestimmt, außer im trivialen Falle $\mu = 0$. Wohl aber ist, wie unser Beweis zeigt, jede solche Zerlegung zu jeder anderen kollinear. Die Zahl der vorhandenen azygetischen Vierergruppen, mit deren jeder eine Zerlegung beginnen kann, findet sich, wenn die Ordnung von G gleich N gesetzt wird, gleich

$$\frac{(2^\mu - 1)(2^\mu + 1)}{3} \left(\frac{N}{2^{\mu+1}}\right)^2 \quad \left\{N = 2^{(2^{p-\mu} q + 2\mu - 1)}\right\}.$$

---

1) Dies scheint uns der angemessene Terminus für Aequivalenz irgend welcher Figuren, auch Gruppen, gegenüber der Gruppe aller Kollineationen zu sein; üblich sind jedoch die weniger bezeichnenden und besonderer Erklärungen bedürftigen Worte ähnlich, gleichberechtigt, konjugiert, und äquivalent schlechthin.

Ferner sieht man, daß der Kern von G durch ein System von $2^{p-\mu}.q$ Gebieten der Stufe 2^{μ} bestimmt wird. Jedes von diesen bestimmt zusammen mit dem kleinsten verbindenden Gebiet der übrigen eine involutorische Kollineation, und diese Kollineationen erzeugen zusammen die Kerngruppe. Die passend gewählten Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ lassen sich also zu 2^{μ} auf Systeme so verteilen, daß folgende Beziehungen stattfinden:

A. Die Kerngruppe g wird dargestellt durch Vorzeichenwechsel, die alle Koordinaten desselben Systems in gleicher Weise betreffen, und sie wird durch diese Vorzeichenwechsel erschöpft (wobei ein Wechsel der Vorzeichen aller Koordinaten gleichgültig ist).

B. Die Gruppe G erscheint als (natürlich syzygetisches) Produkt von g und einer Gruppe G/g, die 2^{μ} Kollineationen umfaßt, und als syzygetisches Produkt von μ azygetischen Vierergruppen dargestellt werden kann. Bei dieser zweiten Gruppe (die nicht eindeutig bestimmt ist, wenn $\mu < p$) werden die 2^{μ} Veränderlichen eines jeden der bezeichneten Systeme nur unter einander transformiert, und zwar in gleicher Weise für alle $2^{-\mu}.n$ Systeme.

Indem wir uns einer von Herrn Loewy eingeführten Terminologie[1]) bedienen, heben wir aus diesem Tatbestand das Folgende hervor:

7. *Die Maximalgruppen G sind („vollständig") reduzibel, mit Ausnahme derer, die den Annahmen $n = 2^p$, $\mu = p$ entsprechen. Aus Gruppen dieser besonderen Art und trivialen Gruppen lassen sich alle nichttrivialen Maximalgruppen G aufbauen.*

Daß die genannten Ausnahmefälle wirklich solche sind, ergibt sich später (Satz 10).

Die Betrachtung, die uns zu diesen Sätzen geführt hat, liefert außer der analytischen Darstellung auch lineare Konstruktionen für alle Gruppen G. Da die Beschreibung dieser Konstruktionen nicht ganz kurz ausfallen kann, so begnügen wir uns mit einem *Beispiel* ($n = 6$, $\mu = 1$):

$$n = 2.3, \quad N = 4.4.$$

Man nehme drei gerade Linien A, B, C an, deren kleinstes verbindendes Gebiet die sechste Stufe hat. Jede dieser Geraden bestimmt zusammen mit dem kleinsten verbindenden Gebiet (einem $\mathfrak{R}_4$ oder R_3) der beiden übrigen eine involutorische Kollineation. Die drei so gefundenen Kollineationen bilden zusammen mit der

1) Siehe etwa Pascal's Repertorium, 2. Aufl. S. 234, 223—224.

identischen Kollineation den *Kern* der zu konstruierenden Gruppe Ferner nehme man auf jeder der drei Geraden zwei Paare von Punkten an, die einander harmonisch trennen, und so bezeichnet werden mögen:

$$a_1\, a_2 \,|\, a_1'\, a_2'; \quad b_1\, b_2 \,|\, b_1'\, b_2'; \quad c_1\, c_2 \,|\, c_1'\, c_2'.$$

Die Punktepaare a_1, a_2 und a_1', a_2' bestimmen dann auf der ersten Geraden zwei Involutionen, und deren Produkt liefert eine dritte Involution, deren (durch quadratische Konstruktion zu ermittelnde) Doppelpunkte in irgend einer Reihenfolge a_1'', a_2'' genannt werden sollen. Die drei Geraden werden nun durch die vier Ebenen $(a_1\, b_1\, c_1)$, $(a_2\, b_2\, c_2)$, $(a_1'\, b_1'\, c_1')$, $(a_2'\, b_2'\, c_2')$ projektiv auf einander bezogen. Den Punkten a_1'', a_2'' werden dabei der Reihe nach bestimmte Punkte b_1'', b_2'' und c_1'', c_2'' zugeordnet, so daß z. B. b_1'', b_2'' sowohl zu b_1, b_2 als auch zu b_1', b_2' harmonisch liegen. Die fünfzehn involutorischen Transformationen von G können nun so bezeichnet werden:

$$T_1 : (A|BC), \quad T_2 : (B|CA), \quad T_3 : (C|AB);$$

$$\begin{aligned}
S_1 &: (a_1\, b_1\, c_1 \,|\, a_2\, b_2\, c_2), & S_1\, T_1 &: (a_2\, b_1\, c_1 \,|\, a_1\, b_2\, c_2),\\
S_2 &: (a_1'\, b_1'\, c_1' \,|\, a_2'\, b_2'\, c_2'), & S_2\, T_1 &: (a_2'\, b_1'\, c_1' \,|\, a_1'\, b_1'\, c_2'),\\
S_3 &: (a_1''\, b_1''\, c_1'' \,|\, a_2''\, b_2''\, c_2''), & S_3\, T_1 &: (a_2''\, b_1''\, c_1'' \,|\, a_1''\, b_2''\, c_2''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1\, T_2 &: (a_1\, b_2\, c_1 \,|\, a_2\, b_1\, c_2), & S_1\, T_3 &: (a_1\, b_1\, c_2 \,|\, a_2\, b_2\, c_1),\\
S_2\, T_2 &: (a_1'\, b_2'\, c_1' \,|\, a_2'\, b_1'\, c_2'), & S_2\, T_3 &: (a_1'\, b_1'\, c_2' \,|\, a_2'\, b_2'\, c_1'),\\
S_3\, T_2 &: (a_1''\, b_2''\, c_1'' \,|\, a_2''\, b_1''\, c_2''), & S_3\, T_3 &: (a_1''\, b_1'\, c_2'' \,|\, a_2''\, b_2''\, c_1'').
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$S_1\, S_2\, S_3 = E, \quad T_1\, T_2\, T_3 = E.$$

T_1, T_2, T_3 liegen im Kern. Die zwölf letzten Kollineationen haben Ebenenpaare als Inzidenzgebiete, S_1 zum Beispiel die beiden Ebenen $(a_1\, b_1\, c_1)$ und $(a_2\, b_2\, c_2)$. Um alle Transformationen der Gruppe zu finden, braucht man nur etwa S_1, S_2 und T_1, T_2 zu kennen, hat also nicht nötig, irrationale Konstruktionen auszuführen. Jeder der sechzehn azygetischen Vierergruppen, die in G enthalten sind, entspricht eine der beschriebenen Zerlegungen von G.

§ 3. Maximalgruppen reeller zweiseitiger Kollineationen.

Wir kommen nun zu unserer Aufgabe II, deren Behandlung wir wieder einige einleitende Bemerkungen vorausschicken wollen.

Selbstverständlich ist zunächst, daß nur bei gerader Stufenzahl reelle involutorische Kollineationen mit (konjugiert-)imaginären Inzidenzgebieten möglich sind.

Wir behaupten nun:

8. *In jeder syzygetischen Vierergruppe reeller Kollineationen ist die Zahl der Kollineationen mit imaginären Inzidenzgebieten gerade, und in jeder azygetischen Vierergruppe ist sie ungerade. Ist sie gleich drei, so ist die Stufenzahl n durch vier teilbar.*

Eines ausgeführten Beweises bedarf wohl nur der letzte Teil des Satzes 8.

Es seien also S und T zwei reelle azygetische involutorische Kollineationen, und es möge S zunächst reelle Inzidenzgebiete haben. Dann sind die Geraden der zuvor betrachteten Schaar, die von reellen Punkten der Inzidenzgebiete von S ausgehen, ebenfalls reell, und es hat folglich von den beiden Kollineationen S und ST eine reelle und eine konjugiert-imaginäre Inzidenzgebiete. Wenn also zweitens S und T keine reellen Inzidenzgebiete haben, so kann auch das Produkt ST solche nicht haben. Es bleibt aber noch festzustellen, ob und unter welchen Bedingungen dieser Fall möglich ist.

Wir denken uns zu irgend einem reellen Punkte von $\mathfrak{R}_n$ die ihm in S, T und ST zugeordneten Punkte konstruiert. Diese vier Punkte können dann durch ein reelles Gebiet $\mathfrak{R}_4$ verbunden werden, das bei der betrachteten Vierergruppe in Ruhe bleibt, sie liegen aber nicht in einem Gebiet $\mathfrak{R}_3$. Ein außerhalb $\mathfrak{R}_4$ angenommener Punkt führt zu einem neuen Gebiet $\mathfrak{R}_4'$, das mit $\mathfrak{R}_4$ keinen reellen und folglich überhaupt keinen Punkt gemein hat, und daher mit $\mathfrak{R}_4$ zusammen ein reelles Gebiet $\mathfrak{R}_8$ bestimmt. Fährt man auf diese Art fort, so erkennt man, daß n durch vier teilbar sein muß, $n = 4 \, . \, l$. Die reellen Ecken eines Koordinatenpolytops können dann auf l solche Gebiete vierter Stufe verteilt werden. Ist das geschehen, so werden je vier zusammengehörige Koordinaten, wie x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Kollineationen der Vierergruppe nur unter einander vertauscht. In irgend einem der nunmehr betrachteten Gebiete $\mathfrak{R}_4$ gehören zu den involutorischen Kollineationen der Vierergruppe drei Paare konjugiert-imaginärer Oerter von Inzidenzpunkten, nämlich drei Paare gerader Linien, diese Kollineationen sind also durch drei Paare von konjugiert-imaginären Geraden bestimmt, die derselben Schaar von Erzeugenden einer M_2, nunmehr einer Fläche 2. Ordnung angehören und einander harmonisch trennen. Solche Figuren gibt es wirklich, und sie sind alle zu einander reell-kollinear. Die Fläche 2. Ordnung ist notwendig reell, d. h. mit paarweise konjugiert-imaginären Punkten ausgestattet. Reelle Punkte hat sie aber nicht. Daher darf ihre Gleichung in der Form

(9) $$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$

angenommen werden. Die gesuchte Gruppe aber kann bei passender Koordinatenwahl nunmehr so geschrieben werden:

(10 l)

	E	S_1	S_2	S_3
$x_1' =$	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_2' =$	x_2	$-x_1$	x_4	$-x_3$
$x_3' =$	x_3	x_4	$-x_1$	x_2
$x_4' =$	x_4	$-x_3$	$-x_2$	$-x_1$

(Ebensolche Transformationsformeln erhält man für das nächste System von vier Koordinaten x_5, x_6, x_7, x_8, u. s. w.).

Wir erhalten nun jedenfalls gewisse Lösungen des Problems II aus denen des Problems I, wenn wir dem benutzten Koordinatensystem die Einschränkung auferlegen, daß seine Ecken samt dem zugehörigen Einheitspunkt reell sein sollen. Wir behaupten, daß damit schon *alle* wesentlich-verschiedenen Lösungen des Problems II gefunden sind.

Wir stellen also folgenden Lehrsatz auf, dessen erster Teil durch das Vorhergehende schon erwiesen ist:

9. *In jeder der verschiedenen Klassen zueinander kollinearer Maximalgruppen G finden sich solche Gruppen, deren sämtliche Kollineationen reell sind. Alle diese zur selben Klasse gehörigen Gruppen sind zu einander reell-kollinear, und sie erschöpfen die wesentlich-verschiedenen Maximalgruppen reeller zweiseitiger Kollineationen.*

Zwei Gruppen *reeller* Kollineationen gelten uns natürlich nur dann als wesentlich-verschieden, wenn sie nicht zu einander reell-kollinear sind.

Beschränken wir uns also nunmehr auf reelle Kollineationen, und suchen wir zunächst wieder solche Maximalgruppen G, die mit ihren Kernen zusammenfallen. Ist G eine solche Gruppe, so liegt entweder von vorn herein der durch die Gleichungen (4) dargestellte triviale Fall vor, oder es müssen in G Kollineationen auftreten, deren Inzidenzgebiete (paarweise konjugiert-) imaginär sind. Wir zeigen, daß die zweite Annahme zu einem Widerspruch führt, daß nämlich G dann nicht Maximalgruppe sein kann. Sind zwei solche Kollineationen S und T vorhanden, so hat das Produkt ST reelle Inzidenzgebiete (Satz 8). G kann daher als Produkt der Gruppe $G_1 = (E, S)$ und einer Gruppe G_2 aufgefaßt werden, deren involutorische Kollineationen sämtlich reelle Inzidenzgebiete

haben. (Vergleiche den Beweis zu Satz 5). Jedes von diesen letzten Gebieten ist dann das kleinste verbindende Gebiet von zwei konjugiert-imaginären Gebieten, die auf die Inzidenzgebiete von S verteilt sind. Daher haben die zu G_2 gehörigen Inzidenzgebiete alle gerade Stufenzahlen. Jede solche Gruppe G_2 ist aber notwendig in einer Gruppe G^* enthalten, die so konstruiert wird: Man nehme in $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{2m}$ m reelle gerade Linien an, deren kleinstes verbindendes Gebiet $\mathfrak{R}_n$ selbst ist. Jede dieser Geraden bestimmt zusammen mit dem kleinsten verbindenden Gebiet der übrigen eine involutorische Kollineation, und diese Kollineationen erzeugen zusammengenommen die Gruppe G^*. S ist nun entweder sicher nicht Maximalgruppe, oder G_2 ist selbst schon eine solche Gruppe G^*. In diesem zweiten Falle muß dann G 2^m Kollineationen umfassen; G kann durch einfache Vorzeichenwechsel dargestellt werden, wenn man ein Koordinatenpolytop mit paarweise konjugiert-imaginären auf die m Geraden verteilten Ecken benutzt.

Die gefundenen Gruppen G sind nun wirklich Maximalgruppen zweiseitiger reeller *paarweise syzygetischer* Kollineationen. Aber Maximalgruppen zweiseitiger reeller Kollineationen schlechthin sind sie nicht. Nimmt man nämlich auf jeder der m Geraden einen reellen Punkt an, so bestimmt das kleinste verbindende Gebiet aller dieser Punkte zusammen mit dem ihm durch S zugeordneten Gebiet eine reelle involutorische Kollineation T. Diese ist, nach Konstruktion, syzygetisch zu allen Kollineationen von G^*, und azygetisch zu S. Sie ist also, nach Voraussetzung, nicht in G enthalten. Daher erzeugt sie mit G zusammen eine umfassendere Gruppe, während G eine Maximalgruppe sein sollte.

Es bleiben also jetzt noch die Maximalgruppen G zu suchen, in denen azygetische Vierergruppen vorkommen. Dann wird nur noch zu zeigen sein, daß immer auch solche azygetische Vierergruppen in G vorkommen, von deren involutorischen Kollineationen nur *eine* imaginäre Inzidenzgebiete hat. Wenn das nämlich bewiesen sein wird, so kommen wir auf die zuvor angestellte auf die Gleichungen (6) bezügliche Ueberlegung zurück.

Wir setzen also jetzt voraus, daß die zu suchende Maximalgruppe G eine azygetische Vierergruppe (E, S_1, S_2, S_3) enthält, deren involutorische Transformationen sämtlich *imaginäre* Inzidenzgebiete haben. G wird dann darstellbar sein als Produkt von zwei Gruppen G_1 und G_2, deren eine G_1 alle zuvor konstruierten ∞^{l-1} Gebiete vierter Stufe einzeln in Ruhe läßt und *alle* in G enthaltenen Transformationen derart umfaßt. G_1 enthält dann die Gruppe (E, S_1, S_2, S_3).

Es sei nun zunächst $n = 4$. Dann ist G_2 die identische Transformation, und $G_1 = G$ läßt sich explizite herstellen. Da nämlich die imaginären Inzidenzgebiete von S_1, S_2, S_3 Erzeugende, und zwar aus derselben („linken") Schar entnommene Erzeugende der Fläche (9) sind, so muß auch G_1 diese Fläche in Ruhe lassen. G_1 wird dann auch die Erzeugenden der zweiten („rechten") Schar dieser Fläche in bestimmter Weise transformieren, und wenn man weiß wie, so ist G_1 schon gefunden. G_1 kann aber nur das syzygetische Produkt von (E, S_1, S_2, S_3) mit einer zweiten Vierergruppe (E, T_1, T_2, T_3) sein, die zur ersten reell-kollinear ist, und ihre imaginären Inzidenzgebiete in der anderen (rechten) Schar von Erzeugenden der Fläche (9) hat. Aber alle diese von je 16 Kollineationen gebildeten Gruppen sind zueinander reell-kollinear. Man kann unter den Gruppen (E, T_1, T_2, T_3) irgend eine auswählen, z. B. die, die aus (E, S_1, S_2, S_3) durch die involutorische Kollineation

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad x_4' = -x_4$$

hervorgeht, also die Gruppe

(10r)

	E	T_1	T_2	T_3
$x_1' =$	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_2' =$	x_2	x_1	$-x_4$	x_3
$x_3' =$	x_3	x_4	x_1	$-x_2$
$x_4' =$	x_4	$-x_3$	x_2	x_1.

Die hiermit gefundene als „Kollineationsgruppe der Kummerschen Konfiguration" bekannte Gruppe läßt nun aber nicht nur die Fläche (9) in Ruhe, sondern ein System von zehn reellen Flächen 2. Ordnung. Neun von diesen haben reelle Punkte und Erzeugende[1]). Daraus folgt nunmehr, daß noch andere Zerlegungen unserer Gruppe in azygetische Vierergruppen möglich sind, und zwar in solche, von deren drei involutorischen Kollineationen immer nur eine imaginäre Inzidenzgebiete hat[2]).

---

1) Bildet man aus den Verhältnisgrößen $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ als Eulerschen Parametern die zehn homogenen Koeffizienten einer ternären orthogonalen Substitution, und setzt man diese Ausdrücke gleich Null, so erhält man die zehn Flächen. Vgl. Leipz. Ber. 1892, S. 134, 135.

2) Z. B. entspricht der Fläche $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ die Zerlegung von $G = G_1$ in die beiden azygetischen Vierergruppen

$$(E, S_3 T_3, S_2, S_1 T_3), \quad (E, S_2 T_2, S_2 T_1, T_3).$$

Siehe die vorige Anmerkung.

Ist zweitens $n = 4l$ und $l > 1$, so ergibt sich ein entsprechendes Resultat. G_2 kann dann, da G Maximalgruppe sein soll, nicht nur aus der identischen Transformation bestehen. Außerdem darf man annehmen, das G_2 zur Vierergruppe (E, S_1, S_2, S_3) syzygetisch ist (Satz 5). Ist dann T eine involutorische Transformation von G_2, so kann man, ohne die Darstellungsart (9) der Gruppe (E, S_1, S_2, S_3) zu stören, die Koordinaten so wählen, daß T die Form

$$\begin{array}{llll} x_1' = x_5, & x_2' = x_6, & x_3' = x_7, & x_4' = x_8, \\ x_5' = x_1, & x_6' = x_2, & x_7' = x_3, & x_8' = x_4, \quad \text{(u. s. w.)} \end{array}$$

oder die Form

$$\begin{array}{llll} x_1' = x_5, & x_2' = x_6, & x_3' = x_7, & x_4' = x_8, \\ x_5' = -x_1, & x_6' = -x_2, & x_7' = -x_3, & x_8' = -x_4 \quad \text{(u. s. w.)} \end{array}$$

annimmt, je nachdem die Inzidenzgebiete von T reell sind oder nicht. In beiden Fällen kann das syzygetische Gruppenprodukt

$$(E, S_1, S_2, S_3) . (E, T)$$

durch Hinzunahme der Gruppe (E, T_1, T_2, T_3) erweitert werden. Da dies für alle in G_2 enthaltenen Transformationen T gilt, so kann G nicht Maximalgruppe sein, wenn nicht G_1 von vornherein das Produkt

$$(S, S_1, S_2, S_3) . (E, T_1, T_2, T_3)$$

oder ein dazu reell-kollineares Produkt von zwei azygetischen Vierergruppen war. Das Weitere ergibt sich wie zuvor.

Der Satz 9 ist hiermit vollständig erwiesen, und damit ist auch unsere Aufgabe II gelöst.

§ 4. Die Gruppen G^p.

Auf eine genauere Untersuchung der gefundenen Gruppen, die schon eine recht umfangreiche Aufgabe sein würde, können wir uns nicht einlassen. Die interessantesten unter den Maximalgruppen G sind aber unzweifelhaft die in Satz 7 genannten. Es sind das die schon erwähnten aus der Theorie der Abelschen Funktionen bekannten Gruppen. Für sie wenigstens wollen wir unsere Überlegungen noch etwas weiter führen.

Fernerhin ist also nur noch von solchen Maximalgruppen zweiseitiger Kollineationen die Rede, die den Annahmen

$$n = 2^p, \quad N = 2^{2p}$$

entsprechen, und die daher als syzygetische Produkte von p azygetischen Vierergruppen darstellbar sind.

Irgend eine dieser Gruppen werde als eine Gruppe G^p bezeichnet, und es soll angenommen werden, daß sie aus lauter reellen Kollineationen besteht, die auf die beschriebene Art dargestellt sind.

Wir heben zunächst einige Sätze hervor, die die Sonderstellung dieser Gruppen G^p bekunden sollen.

10. *Die Gruppen G^p haben u. A. die folgenden Eigenschaften, und sie werden durch jede einzelne von diesen unter allen Maximalgruppen zweiseitiger Kollineationen charakterisiert:*

a) *Die in G^p enthaltenen Kollineationen sind linear-unabhängig (und bilden daher ein vollständiges System von n^2 linear-unabhängigen Kollineationen in $\mathfrak{R}_n$).*

b) *Die Gruppen G^p sind irreduzibel.*

c) *Die Gruppen G^p sind vollkommene Gruppen vertauschbarer Kollineationen, d. h. überhaupt jede mit allen Kollineationen einer G^p vertauschbare Kollineation ist in G^p selbst enthalten.*

d) *Jede Gruppe G^p ist in einer einzigen durch sie bestimmten Gruppe von $2N$ zweiseitigen Projektivitäten (Kollineationen und Korrelationen) enthalten* [1].

e) *Es gibt keine infinitesimale Kollineation, die eine G^p in Ruhe ließe.*

Der Satz a) sagt, daß die zur Darstellung der Kollineationen von G^p dienenden bilinearen Formen linear-unabhängig sind. Wäre das nicht richtig, so würde die Einheitsform

$$\mathrm{E} = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

als lineares Aggregat der übrigen (involutorischen Kollineationen entsprechenden) $n^2 - 1$ bilinearen Formen Σ_k darstellbar sein. Diese aber sind im Falle einer Gruppe G^p sämtlich sogenannte Normalformen, d. h. sie genügen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1 \partial u_1} + \cdots + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_n \partial u_n} = 0,$$

während E dieser Gleichung nicht genügt. Daß die anderen Maximalgruppen G die unter a) genannte Eigenschaft nicht haben, ist klar, da die trivialen Maximalgruppen und daher auch alle Kerngruppen der Gruppen G sie nicht haben. Die Gruppen G, die nicht Gruppen G^p sind, enthalten immer weniger als n^2 linear-unabhängige Kollineationen.

b) folgt aus a). Vgl. Satz 7.

Der Satz c) ist richtig für $p = 2$, und daraus ergibt er sich allgemein, wenn man G^p als syzygetisches Produkt von p azyge-

---

1) Wegen des Falles $p = 1$ siehe die Erklärung des Begriffs Korrelation für $n = 2$ in § 1.

tischen Vierergruppen darstellt. Wie nämlich aus dem Dargelegten hervorgeht, ist mit jeder solchen Darstellung eine Normalmannigfaltigkeit M^p invariant verbunden, die von p Scharen von je ∞^{p-1} (im komplexen Gebiet ∞^{2p-2}) geraden Linien beschrieben werden kann. Ist T eine Kollineation, die mit jeder Kollineation von G^p vertauschbar ist, so muß T auch M^p in Ruhe lassen, und zwar so, daß jede der p Scharen von Geraden einzeln in Ruhe bleibt: Dann aber kann T auf eine einzige Weise in ein Produkt von vertauschbaren und paarweise syzygetischen Kollineationen zerlegt werden, deren jede alle Geraden von *einer* der genannten Scharen *einzeln* in Ruhe läßt, $T = T_1 . T_2 \ldots T_p$. T_1 z. B. muß dann die Eigenschaft haben, das in (5) eingeführte binäre Gebiet $\xi_1 : \xi_2$ projektiv zu transformieren, und zwar so, daß alle Projektivitäten (Kollineationen) in Ruhe bleiben, die in der Formel (7) zusammengestellt sind, während die übrigen binären Gebiete $\eta_1 : \eta_2$ (vgl. Nr. 8), $\zeta_1 : \zeta_2$ u. s. f. ganz in Ruhe gelassen werden. Daraus folgt, daß T_1 mit einer der Kollineationen der ersten in der Zerlegung von G^p auftretenden Vierergruppe $(1, S_1, S_2, S_3)$ identisch ist. Entsprechendes gilt für $T_2 \ldots T_p$.

Im Falle der übrigen Gruppen G gibt es, wie man leicht erkennt, sogar kontinuierliche Gruppen, deren sämtliche Kollineationen mit allen Kollineationen von G und außerdem unter einander vertauschbar sind.

Satz d). Daß G^p so wie gesagt erweitert werden kann, ergibt sich, wenn man bemerkt, daß G^p das Polarsystem

$$(11) \qquad \Sigma x_k y_k = 0, \quad \Sigma u_k v_k = 0 \qquad (k = 1 \ldots n)$$

in Ruhe läßt. Daß diese Erweiterung eindeutig bestimmt ist, folgt dann aus c). In den anderen Fällen läßt sich eine solche Erweiterung ebenfalls vornehmen, aber, wiederum nach c), nicht nur auf eine Weise.

Der Satz e) endlich sagt aus, daß die umfassendste Kollineationsgruppe, in der G^p als invariante Untergruppe steckt, keine kontinuierliche (invariante) Untergruppe hat. Der Beweis wird ähnlich geführt, wie der des Satzes c). Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück (Satz 17). Daß für die übrigen Maximalgruppen G ein Gleiches nicht gilt, haben wir soeben schon bei Gelegenheit des Satzes c) bemerkt.

Beachtenswert scheinen uns auch einige Eigenschaften der gefundenen analytischen Darstellung unserer Gruppen zu sein. Wenn eine Maximalgruppe G nicht zu den trivialen gehört, so kann sie offenbar nicht zu einer Gruppe von N linearen Transformationen

oder bilinearen Formen (oder Matrices) holomorph sein (Gleichung (3)). Es hat sich aber gefunden, daß jede solche Gruppe zu einer Gruppe von $2N$ *eigentlichen orthogonalen Transformationen* in n (nicht-homogenen) Veränderlichen meromorph ist. Die Koeffizienten dieser orthogonalen Transformationen sind ausschließlich aus den Zahlen $1, 0, -1$ gebildet. Für die Gruppen G^p gilt insbesondere noch der leicht zu begründende Satz:

11. *Jede Kollineation von G^p wird dargestellt durch zwei reelle eigentlich-orthogonale Transformationen in $R_n (n = 2^p)$. Diese unterscheiden sich von einander durch die Spiegelung am Anfangspunkt der Koordinaten (durch einen Vorzeichenwechsel aller Koordinaten). Jeder in G^p enthaltenen involutorischen Kollineation mit reellen Inzidenzgebieten entsprechen so zwei ebenfalls involutorische Transformationen, jeder Kollineation mit imaginären Inzidenzgebieten aber entsprechen zwei einander entgegengesetzte orthogonale Transformationen von der Periode vier.*

Ebenfalls nicht schwer zu begründen sind die folgenden Sätze:

12. *Die Inzidenzgebiete der involutorischen Kollineationen einer G^p haben alle dieselbe Stufenzahl 2^{p-1}. Es gibt darunter $2^{p-1}(2^p-1)$ Paare konjugiert-imaginärer Gebiete und also $2^{p-1}(2^p+1)$ Paare, deren Bestandteile reell sind.*

13. *Die $n^2 = 2^{2p}$ reellen zweiseitigen Korrelationen, die mit G^p zusammen eine Gruppe bilden, sind linear-unabhängig*[1]. *$2^{p-1}(2^p-1)$ unter ihnen sind (folglich) Nullsysteme und $2^{p-1}(2^p+1)$ sind Polarsysteme, gehören also zu gewissen quadratischen Mannigfaltigkeiten M^2*[2]. *Geeignete $2p+1$ unter diesen paarweise vertauschbaren Korrelationen erzeugen die ganze Gruppe.*

14. *Von den Mannigfaltigkeiten M^2, die zu den genannten Polarsystemen gehören, hat eine*

$$\Sigma x_i^2 = 0, \quad \Sigma u_i^2 = 0 \tag{12}$$

keine reellen Punkte. Die übrigen $(2^{p-1}+1)(2^p-1)$ enthalten reelle lineare Gebiete der höchsten überhaupt möglichen Stufe 2^{p-1}, sie sind durch gleich Null gesetzte Summen von gleichvielen positiven und negativen Quadraten darstellbar. Ihre Polarsysteme werden gefunden, wenn

---

1) Einerlei, ob sie durch bilineare Formen in Punktkoordinaten oder durch solche in $\mathfrak{R}_{n-1}$-Koordinaten dargestellt werden. Vgl. Formel (11).

2) M^2 bedeutet in der vorliegenden Untersuchung überall eine *doppelpunktfreie* quadratische Mannigfaltigkeit.

Im Falle $p = 1$ erhält man ein „Nullsystem" und drei Polarsysteme. Was das Nullsystem zu bedeuten hat, wird der Leser sich sehr leicht selbst klarmachen. Vgl. § 1, S. 2.

man die zu (12) *gehörige Korrelation* (11) *zusammensetzt mit den involutorischen Kollineationen von* G^p, *deren Inzidenzgebiete reell sind. Setzt man dieselbe polare Korrelation zusammen mit den involutorischen Kollineationen von* G^p, *die konjugiert-imaginäre Inzidenzgebiete haben, so entstehen die* $2^{p-1}(2^p-1)$ *Nullsysteme.*

15. *Die Inzidenzgebiete irgend einer involutorischen Kollineation von* G^p *sind auf* 2^{2p-2} *der genannten* M^2 *enthalten, und jede von diesen trägt* $2^{p-1}(2^p-1)$ *solche Paare von Inzidenzgebieten. Die entsprechenden Kollineationen werden gefunden, wenn man das Polarsystem der* M^2 *mit den* $2^{p-1}(2^p-1)$ *Nullsystemen zusammensetzt.*

Auf der reell-ausgezeichneten Mannigfaltigkeit (12) *zum Beispiel liegen sämtliche imaginären Inzidenzgebiete involutorischer Kollineationen von* G^p.

Nach Analogie des Falles $p = 2$ [1]) wird man vielleicht erwarten, daß die Inzidenzgebiete auf irgend einer der M^2 sich allgemein auf die beiden Scharen von linearen Mannigfaltigkeiten der Stufe 2^{p-1} verteilen, die auf der M^2 liegen. So verhält es sich aber nicht. Sind nämlich zwei der involutorischen Kollineationen azygetisch, so schneiden sich ihre Inzidenzgebiete überhaupt nicht, sind sie syzygetisch, so durchdringen sie sich paarweise in Gebieten der Stufe 2^{p-2}. Diese Zahl ist gerade, wenn $p > 2$ ist. Hieraus folgt [2]):

16. *Wenn* $p > 2$ *ist, so gehören die auf einer der* $2^{p-1}(2^p+1)$ *quadratischen Mannigfaltigkeiten gelegenen Inzidenzgebiete involutorischer Kollineationen von* G^p *sämtlich derselben Schar linearer Gebiete höchster Stufe an.* (*Sie sind, wie wir sagen wollen, alle* l i n k s s e i t i g e *Gebiete.*)

Statt auf weitere Einzelheiten einzugehen, wollen wir lieber noch darauf hinweisen, daß eine Theorie vorliegt, die nur in eine andere Sprache übersetzt zu werden braucht, um außer *einigen* der hier entwickelten auch eine Fülle neuer Sätze zu liefern: Die sogenannte Charakteristikentheorie der Thetafunktionen [3]). Diese

---

1) Siehe etwa den Enzyklopädieartikel von Steinitz (Bd. III, S. 481), Nr. 11.

2) In Gebieten der Stufe $4l$ schneiden sich zwei gleichartige lineare Gebiete der Stufe $2l$ auf einer M^2 stets in einem Gebiet gerader Stufenzahl $(0, 2, \dots 2l-2)$, ungleichartige in einem Gebiet ungerader Stufenzahl $(1, 3, \dots 2l-1)$. In Gebieten der Stufe $4l+2$ schneiden sich auf einer M^2 zwei gleichartige Gebiete der Stufe $2l+1$ immer in einem Gebiet ungerader Stufenzahl $(1, 3, \dots 2l-1)$, und ungleichartige in einem Gebiet gerader Stufenzahl $(0, 2, \dots 2l)$.

3) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903), S. 242—305. Dort findet sich auch, außer vielen Literaturnachweisen, ein Referat über die erwähnte Arbeit von Wirtinger (S. 368).

Theorie kann auch mit den hier benutzten algebraisch-geometrischen Hülfsmitteln begründet werden.

Das kann sogar seine Vorteile haben. Jedenfalls drängt sich die Unterscheidung zweier Arten von Charakteristiken, die Schwierigkeiten geboten hat und oft verkannt worden ist, der geometrischen Betrachtung von vornherein auf.

Wir gehen aus von einer Zerlegung von G^p in p solche azygetische Vierergruppen, deren jede zwei involutorische Kollineationen mit reellen Inzidenzgebieten enthält. Diese Kollineationen seien, in irgend einer Folge, $S_1, S_2; T_1, T_2; \ldots$. Sie liefern uns dann eine Darstellung von G^p durch eine sogenannte *Basis:* Jede Kollineation von G^p kann auf eine einzige Weise in die Form

$$S_1^\alpha S_2^\beta . T_1^\gamma T_2^\delta \ldots$$

gesetzt werden. Die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, 2p$ an der Zahl, haben irgend welche Zahlenwerte 0, 1. Der bezeichneten Kollineation ordnen wir dann die aus p solchen Zahlenpaaren gebildete sogenannte „Periodencharakteristik", oder, wie wir in unserem Zusammenhang besser sagen werden, *Kollineationscharakteristik*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \ldots \\ \beta & \delta & \ldots \end{pmatrix}$$

zu, und der korrelativen Transformation (11) die „Thetacharakteristik", hier besser *Korrelationscharakteristik*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}.$$

Rechnet man dann mit diesen Charakteristiken in der üblichen Weise, so findet sich z. B., daß ungerade Charakteristiken (ε) und $[\eta]$ Kollineationen mit imaginären Inzidenzgebieten und Nullsysteme, den geraden aber Kollineationen mit reellen Inzidenzgebieten und Polarsysteme entsprechen[1]). Zwei Kollineationen von G^p sind sy-

1) Nimmt man keine Rücksicht auf die reelle Darstellung von G^p — die nur eine unter $2^{p-1}(2^p+1)$ gleichberechtigten ist — so verliert die Charakteristik [0] ihre Sonderstellung unter den geraden Theta- oder Korrelationscharakteristiken, und die Unterscheidung von geraden und ungeraden Perioden- und Kollineationscharakteristiken wird nur eine (die formell einfachste) unter $2^{p-1}(2^p+1)$ gleichberechtigten. Die Bezeichnung und die Wahl der Basis aber läßt sich immer so ändern, daß eine nach Belieben ausgezeichnete gerade Charakteristik $[\eta]$ in die Charakteristik [0] und die entsprechende Unterscheidung von Periodencharakteristiken in die Unterscheidung gerade-ungerade übergeht. Vgl. Lehrsatz 15.

Übrigens läßt sich die ganze Charakteristikenbezeichnung noch vereinfachen, nach dem Muster des in den Fällen $p = 2, 3$ Üblichen; man muß dann aber verschiedene Fälle unterscheiden, je nach dem Rest, dem p bei Division mit 4 läßt.

zygetisch oder azygetisch, je nachdem der aus ihren Charakteristiken abgeleitete Ausdruck

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma' + \cdots$$

gerade oder ungerade ist, je nachdem also ihre Charakteristiken syzygetisch oder azygetisch sind[1]). Eine Kollineation (ε) von G^p ist als Produkt von zweien der zugefügten Korrelationen $[\eta]$, $[\zeta]$ darstellbar, wenn

$$[\eta] + [\zeta] \equiv (\varepsilon)$$

ist, u. s. w.

§ 5. Anwendungen. Besonderheiten des Falles $p = 3$.

Der Zusammenhang, über den wir hier nur Andeutungen machen konnten, reicht noch weiter. Zunächst liefern die uns hier zur Verfügung stehenden Mittel einen weiteren Lehrsatz, der dem Satze **10** e) eine positive Wendung gibt.

Man findet ohne Mühe, daß G^p

$$\frac{(2^p+1)(2^p-1)}{3} \cdot 2^{2p-2}$$

azygetische Vierergruppen enthält. Daher kann G^p auf

$$\frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\ldots(2^2-1)}{3^p \cdot p!} \cdot 2^{p(p-1)}$$

verschiedene Arten in der beschriebenen Weise als syzygetisches Produkt von p azygetischen Vierergruppen dargestellt werden. Diese Gruppen bleiben, da für $p = 1$ die Vierergruppe bei 24 Projektivitäten (Kollineationen), nämlich bei den Transformationen einer sogenannten Oktaedergruppe in Ruhe bleibt, einzeln bei 24^p Kollineationen in Ruhe. Hieraus folgt:

17. *Die Gruppe Γ^p aller (komplexen) Kollineationen, die G^p in Ruhe lassen, oder also die größte Kollineationsgruppe, die G^p als invariante Untergruppe enthält, umfaßt*

$$n^2 \cdot \Omega = 2^{2p} \cdot \Omega$$

Kollineationen, wo

$$(13) \qquad \Omega = (2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\ldots(2^2-1) \cdot 2^{p \cdot p}.$$

Ω ist die Ordnungszahl einer bekannten sogenannten Kongruenzgruppe, die ebenfalls in der Theorie der Thetafunktionen

1) Krazer, S. 244.

auftritt[1]), und in der Tat erweist sich die Gruppe Γ^p/G^p als zu dieser Kongruenzgruppe holomorph. Man kommt so zu dem weiteren Satze:

18. *Die Gruppe Γ^p/G^p ist einfach, sobald $p > 2$ ist. Für $p = 3$ umfaßt sie 36.8! Operationen und ist holomorph zur Galoisschen Gruppe des Doppeltangentenproblems der (sogenannten allgemeinen) ebenen Kurven 4. Ordnung.*

Hieraus läßt sich noch eine Folgerung ziehen, die nicht ohne Interesse zu sein scheint.

19. *Im Gebiet 7. Stufe kann zur Galoisschen Gruppe des Doppeltangentenproblems eine holomorphe Kollineationsgruppe hergestellt werden.*

Hierzu kommt man, wenn man die vom Verfasser am Beispiel G^3 dargelegten Grundsätze[2]) passend anwendet. In $\mathfrak{R}_8$ gibt es ein lineares Gebiet 70. Stufe von Figuren, die in Analogie gesetzt werden können zu den linearen Linienkomplexen Plückers, die in $\mathfrak{R}_4$ ein Gebiet 6. Stufe bilden. Diese Figuren werden dargestellt durch gleich Null gesetzte *alternierende quadrilineare Formen.* Sie können etwa *lineare $\mathfrak{R}_4$- (oder R_3-) Komplexe* genannt werden. In dem genannten Gebiet $\mathfrak{R}_{70}$ gibt es nun 64 ganz auseinanderliegende Teilgebiete, derart, daß die ihren Stellen entsprechenden quadrilinearen Formen sämmtlich *Invarianten* der Gruppe G^3 sind. Diese Teilgebiete gliedern sich nach dem Schema $1 + 63$. 63 von ihnen enthalten nur je eine quadrilineare Form, das noch übrige Gebiet aber deren *sieben.* Dieses Gebiet ist mithin durch die Gruppe G^3 eindeutig bestimmt, und folglich gegenüber Γ^3 invariant. Es wird bei Ausführung der Transformationen von Γ^3 durch eine Kollineationsgruppe transformiert, die mit Γ^3/G^3 holomorph ist. Damit hat man den behaupteten Satz. Daß die Stufenzahl sieben nicht weiter hinabgedrückt werden kann, ergibt sich aus einem bekannten Satze von Wiman, wonach schon zur alternierenden Gruppe von $\frac{1}{2}\cdot 8!$ Operationen eine holomorphe Kollineationsgruppe in einem Gebiet von geringerer als 7. Stufe nicht hergestellt werden kann.

Das genannte Gebiet 7. Stufe wird, wenn die Plückerschen Linienkoordinaten analogen Graßmannschen Koordinaten eines $\mathfrak{R}_4$ in $\mathfrak{R}_8$ durch Symbole $\mathfrak{X}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathfrak{X}_{\beta\alpha\gamma\delta}$ u. s. w. bezeichnet werden, dargestellt durch die Gleichung

---

1) S. C. Jordan, Traité des substitutions (Paris 1870) p. 178. Krazer, S. 276—283. Loewy in Pascals Repertorium (2. Auflage) II, S. 248, 249.

2) Siehe die zitierte Abhandlung über die Kummersche Konfiguration.

$$(14)\quad \begin{aligned} & Y_1\{\mathfrak{X}_{1234}+\mathfrak{X}_{5678}\}+Y_2\{\mathfrak{X}_{1256}+\mathfrak{X}_{3478}\}+Y_3\{\mathfrak{X}_{1278}+\mathfrak{X}_{3456}\}+\\ & +Y_4\{\mathfrak{X}_{1357}+\mathfrak{X}_{2468}\}+Y_5\{\mathfrak{X}_{1363}+\mathfrak{X}_{2457}\}+Y_6\{\mathfrak{X}_{1458}+\mathfrak{X}_{2367}\}+\\ & +Y_7\{\mathfrak{X}_{1467}+\mathfrak{X}_{2358}\}=0, \end{aligned}$$

worin die Verhältnisgrößen $Y_1:Y_2:\cdots:Y_7$ irgend welche Konstanten bedeuten. Durch eine Kollineationsgruppe im Gebiete dieser sieben homogenen Koordinaten also kann die Galoissche Gruppe des Doppeltangentenproblems rein dargestellt werden. Zugleich ergibt sich noch ohne Schwierigkeit eine Ergänzung zu zu dem Satze **19.** Erinnern wir uns der in Satz **17** eingeführten Terminologie, so können wir uns so ausdrücken:

20. *Das genannte Gebiet 7. Stufe $\mathfrak{R}_7$ wird gebildet von linearen $\mathfrak{R}_4$-Komplexen. Jeder von diesen enthält alle rechtseitigen linearen $\mathfrak{R}_4$, die auf den bei $p=3$ vorhandenen $2^{3-1}(2^3+1)=36$ Mannigfaltigkeiten M^2 liegen, und umgekehrt sind alle linearen $\mathfrak{R}_4$-Komplexe dieser Art in $\mathfrak{R}_7$ enthalten.*

Wir betrachten nun die beiden Mannigfaltigkeiten von Gebieten $\mathfrak{R}_4$ oder R_3, die auf einer M^2 in $\mathfrak{R}_8$ oder R_7 liegen, noch etwas näher.

Ein $\mathfrak{R}_4$ in $\mathfrak{R}_8$ hat $\binom{8}{4}=70$ Graßmannsche Koordinaten, die durch gewisse Relationen verbunden sind. Diese werden nun zu zweien einander gleich (entgegengesetzt gleich), wenn der $\mathfrak{R}_4$ der linken (rechten) Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}_4$ auf der M^2

$$(15)\qquad x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2-x_6^2+x_7^2-x_8^2=0$$

angehört. Damit reduziert sich die Zahl der zu den $\mathfrak{R}_4$ dieser linken Mannigfaltigkeit gehörigen Koordinaten auf 35. Die zwischen diesen bestehenden Relationen lassen sich nun auf sehr einfache Art identisch erfüllen, so daß man *alle* z. B. linksseitigen $\mathfrak{R}_4$ auf M^2, und jeden nur einmal erhält. Man denke sich nämlich die quadratischen Formen, die den 36 zu G^8 gehörigen quadratischen M^2 entsprechen, aufgeschrieben und passend bezeichnet und numeriert. Eine dieser Formen, am besten gerade die linke Seite von (15), setze man der Null gleich. *Die Werte der übrigen 35 quadratischen Formen liefern dann gerade die gesuchten 35 homogenen Größen* [1]). Es gilt also der Satz:

---

1) Wir können dies und Anderes hier nicht beweisen, und noch weniger haben wir Raum, die zugehörigen übrigens nicht unerfreulichen Formeln zu entwickeln; und ohne das könnten wir uns nicht wohl deutlicher ausdrücken. Vgl. jedoch des Verfassers Untersuchung über das Pascalsche Sechseck, Leipz. Ber., 1895, S. 532. Die Übertragung der dort angestellten Überlegung auf das Hessesche

21. *Das Kontinuum der z. B. linksseitigen $\mathfrak{R}_4$ auf einer M^2 in $\mathfrak{R}_8$ läßt sich eindeutig-umkehrbar (birational) und überall stetig auf das Kontinuum der Punkte eben dieser M^2 abbilden. Diese Abbildung ist reell für die reellen $\mathfrak{R}^4$ auf der M^2* (15).

Die weitere Entwickelung des hiermit ausgesprochenen Gedankens führt zu der Einsicht:

22. *In der Geometrie auf einer M^2 in $\mathfrak{R}_8$ existiert eine Gruppe, die sechs Transformationsscharen mit je 28 wesentlichen Parametern umfaßt, und die Figuren auf dieser M^2 untereinander vertauscht.*

Diese Gruppe führt z. B. gerade Linien auf M^2 wieder in solche über, insbesondere Gerade, die sich schneiden, wieder in Gerade, die sich schneiden, und sie ist dadurch definiert[1]).

Sie vertauscht ferner, und zwar in allgemeinster Weise, die drei Figuren

I. *Punktkontinuum auf M^2.*
II. *Linkes $\mathfrak{R}_4$-Kontinuum auf M^2.*
III. *Rechtes $\mathfrak{R}_4$-Kontinuum auf M^2.*

Die kontinuierliche invariante Untergruppe unserer Gruppe besteht aus den eigentlichen automorphen Kollineationen der M^2, ist also einfach. Die uneigentlichen automorphen Kollineationen entsprechen der Vertauschung (II, III). Die Transformationen der vier übrigen Scharen (III, I), (I, II) und (I, II, III), (I, III, II) nennen wir *semilinear*, da sie alle, zwei- oder dreimal hinter einander angewendet, kollineare Transformationen liefern, und wir brauchen das Wort auch, wenn es sich um die entsprechenden Zuordnungen zwischen zwei verschiedenen M^2 in $\mathfrak{R}_8$, $\mathfrak{R}'_8$ handelt[2]).

Die Sätze **21** und **22** enthalten den Keim einer besonderen Art von Geometrie, in der Punkte, linkseitige und rechtseitige $\mathfrak{R}_4$ (oder R_3) auf M^2 als *gleichberechtigte* Raumelemente auftreten[3]).

Achteck (die *passend präzisierte* Figur der acht Schnittpunkte dreier M^2 in $\mathfrak{R}_4$) liefert ebenfalls die 35 Größen des Textes, die demnach *drittens* auch aus der Theorie der quaternären orthogonalen Substitutionen abgeleitet werden können.

1) Die entsprechende Frage kann man bei jeder M^2 in $\mathfrak{R}_n$ stellen, sobald $n > 4$ ist. Es ergeben sich dann aber nur triviale, nämlich kollineare Transformationen, *außer in den Fällen* $n = 7,8$. Die Transformationen der im Texte genannten Gruppe werden vom Verfasser als *pseudokonforme Transformationen* zusammengefaßt.

2) Die semilinearen Transformationen sind nicht Berührungstransformationen. Doch nehmen sie, in beschränktem Umfang, an den für B. T. charakteristischen Eigenschaften teil.

3) Diese *Geometrie der pseudokonformen Transformationen* kann als ein Zweig der (noch vieles Andere umfassenden) *Kinematik* im gewöhnlichen, Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Raume aufgefaßt werden. Sie (jedoch nicht sie allein)

Es lassen sich von ihnen die mannigfachsten Anwendungen machen — vor allem auf die Theorie der Gruppe G^8 selbst, die uns ja auch die semilinearen Transformationen geliefert hat.

Wir finden zunächst, daß z. B. unter den Transformationen, die der Vertauschung (III, I) entsprechen, involutorische vorkommen, und daß diese, ganz ähnlich den Korrelationen der gewöhnlichen projektiven Geometrie, von zweierlei Beschaffenheit sein können. Wir unterscheiden sie demgemäß als (*linkseitige*) *semilineare Nullsysteme und Polarsysteme*, indem wir dem Leser zu erraten überlassen, welches die charakteristischen Eigenschaften beider sind. Es ergibt sich dann z. B.:

23. *Die Gruppe G^8, aufgefaßt als Gruppe von Vertauschungen von Figuren auf irgend einer der 36 zugehörigen M^2, kann auf eine einzige Weise durch 64 semilineare involutorische Transformationen erweitert werden, so daß wieder eine Gruppe (Maximalgruppe zweiseitiger Transformationen) entsteht. 8 von diesen Transformationen sind linkseitige Nullsysteme, und 56 sind linkseitige Polarsysteme.*

Es folgt hieraus zunächst, daß die $2^6.8!$ Kollineationen umfassende Untergruppe $\mathfrak{G}$ von Γ^8, auf die sich Γ^8 bei Festhaltung einer der M^2 reduziert, die acht semiprojektiven Nullsysteme unter einander vertauschen muß. Wir bemerken sodann, daß in $\mathfrak{R}_8$ noch eine andere Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der Ordnung $2^6.8!$ existiert, *die ein zweites Analogon zur Gruppe Γ^3 ist.* $\mathfrak{G}^*$ nämlich umfaßt alle eigentlichen automorphen Kollineationen einer M^2, die ein zugehöriges Poloktatop (mit lauter getrennten Ecken) in Ruhe lassen, gerade so, wie Γ^3, mit dem linearen Komplex als Raumelement, aus den eigentlichen automorphen Kollineationen einer M^2 in $\mathfrak{R}_6$ besteht, die ein zugehöriges Polhexatop in Ruhe lassen. Da nun durch semilineare Transformation zwischen zwei M^2 in $\mathfrak{R}_8$ deren Gruppen eigentlich-automorpher Kollineationen einander holomorph zugeordnet werden, so liegt der Satz nahe:

24. *Die Kollineationsgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ der Ordnung* $2^6.8!$ *des Gebietes 8. Stufe können durch semilineare Transformationen holomorph auf einander bezogen werden. Dabei werden die acht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen semilinearen Nullsysteme zugeordnet den Ecken (und $\mathfrak{R}_7$) des zu $\mathfrak{G}^*$ gehörigen Poloktatops.*

Wir schließen mit zwei Beispielen, die zu unserem eigentlichen Stoff nur noch eine entferntere Beziehung haben.

---

steht zur elementaren Kinematik in einer ähnlichen Beziehung, wie die projektive Geometrie zur Elementargeometrie. Siehe die allerdings knapp gehaltene Darlegung in des Verfassers Geometrie der Dynamen (Leipzig 1903), S. 580—584.

25. *Die beiden — nach Wiman*[1] *— in $\mathfrak{R}_8$ vorhandenen, zur alternierenden Gruppe von neun Elementen holomorphen Kollineationsgruppen werden ebenfalls durch semilineare Transformationen holomorph auf einander bezogen.*

26. *Werden auf einer M^2 in $\mathfrak{R}_8$ ein linkseitiges und ein rechtseitiges semilineares Nullsystem gleichzeitig festgehalten, so reduziert sich die Gruppe der automorphen eigentlichen Kollineationen der M^2 auf eine einfache Gruppe mit 14 wesentlichen Parametern.*

Diese läßt dann immer auch ein lineares Teilgebiet $\mathfrak{R}_7$ von $\mathfrak{R}_8$ (samt seinem Pol) in Ruhe, das die M^2 nicht berührt; in diesem $\mathfrak{R}_7$ entsteht mithin eine weitere zur genannten holomorphe Kollineationsgruppe.

Man hat damit eine neue Erzeugungsweise der von Fr. Engel aufgefundenen einfachen 14gliedrigen Kollineationsgruppe in $\mathfrak{R}_7$[2]), eine Definition, die sich übrigens noch auf verschiedene Art abändern läßt.

Eine vollständigere Behandlung der in § 5 skizzierten Theorie kann natürlich nicht sehr kurz ausfallen. Wir müssen sie, insbesondere auch die Darstellung der genannten Gruppe von 36.8! Kollineationen, einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. Übrigens erfordert die Lösung dieser letzten Aufgabe nur noch ziemlich mechanisch ausführbare Rechnungen.

---

1) S. Math. Ann., Bd. 32 (1899), S. 244.
2) Leipz. Ber., 1900, S. 63, 220.

Über die Veränderungen von Blattmetallen beim Erhitzen infolge von Oberflächenkräften.

Von

Hermann Schottky.

Vorgelegt durch Herrn G. Tammann in der Sitzung vom 2. März 1912.

Am unmittelbarsten werden sich nach G. Tammanns[1]) Ausführungen die Oberflächenerscheinungen kristallisierter Stoffe an außerordentlich dünnen Kristalllamellen studieren lassen. Von diesem Gesichtspunkte aus wurden die Blattmetalle, die sich bekanntlich in Dicken unter $^1/_{1000}$ mm herstellen lassen, untersucht. Die Blattmetalle bestehen aus Schichten von dünnen Kristalllamellen; denn durch Walzen und Aushämmern des Ausgangsmaterials, eines gegossenen Metallbarrens, hat eine Verschiebung der Lamellen der ursprünglichen Kristallite auf ihren Gleitflächen stattgefunden, etwa wie man mit einem aufgeschichteten Spiel Karten, wenn man es auseinander schiebt, eine große Fläche bedecken kann.

Bei Ausführung dieser Untersuchungen war es mir nicht bekannt, daß die Blattmetalle in England längst Gegenstand der Untersuchung gewesen sind. Erst bei der Redaktion der Versuche gelangte die hierher gehörige englische Literatur in meine Hände.

Die ersten Beobachtungen gehen auf Faraday[2]) zurück, der feststellte, daß auf Glas gelegte dünne Gold- und Silberschichten beim Erhitzen (auf 250—400°) für weißes Licht durchlässig werden. Dann sind es in den letzten Jahren vornehmlich drei Publikationen, die diesen Gegenstand behandeln.

Beilby[3]) hat sich eingehender mit der Änderung der Licht-

1) Tammann, Über die Abhängigkeit der Krystallform ... Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1912.

2) Phil. Trans. 1857, 145.

3) Roy. Soc. Proc. 72 [1904], 226.

durchlässigkeit, der mikroskopischen Struktur und der Leitfähigkeit von dünnen Gold- und Silberschichten beim Erhitzen beschäftigt. Diese Untersuchungen bilden einen Teil seiner Studien über Oberflächenschichten an festen Stoffen, auf welche er seine Theorie der mechanischen Härtung durch Bildung einer amorphen Phase aufbaute.

Turner[1]) hat besonders die Veränderungen des Blattsilbers untersucht und den Einfluß des Sauerstoffs auf diese Veränderungen aufgefunden.

Chapman und Porter[2]) trugen zur Aufklärung der Veränderungen am Blattgold bei, die sie der Wirkung einer Oberflächenspannung zuschrieben.

Den ersten Teil meiner Untersuchung, der zeigte, daß Erscheinungen von der erwarteten Art tatsächlich an Blattmetallen auftreten, gebe ich unter diesen Umständen in gedrängtester Form und unter Berücksichtigung der zitierten Arbeiten hier wieder.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß lose zusammengerollte Metallfolien in einem Porzellanschiffchen liegend in ein Verbrennungsrohr eingeführt und in einem Gasmuffelofen unter Kontrolle eines Thermoelements erhitzt wurden. Zu Versuchen oberhalb 500° wurde ein Platin-Widerstandsofen benutzt.

Blattgold von 0,087 μ Dicke mit 97 % Au und 3 % Cu wird in Luft wie in Wasserstoff bei 350—400° runzlig. Es beginnt allmählich eine Schrumpfung, die bei 440—500° schon stark fortgeschritten ist. Das erhitzte Blattgold bildet bei Betrachtung unter dem Mikroskop eine detaillose zusammenhängende Haut ohne Löcher. Die früheren Beobachtungen, nach denen auf Glas aufliegendes Blattgold nach dem Erhitzen weißes Licht hindurchläßt, werden von Chapman und Porter in sachgemäßer Weise darauf zurückgeführt, daß bei diesen Versuchen infolge Anhaftens am Glase beim Schrumpfen das Gold in viele kleine Teile zerrissen wurde. Diese Verfasser haben durch Beobachtung eines freihängenden schwach belasteten Goldblattstreifens gefunden, daß bis 170° Ausdehnung erfolgt, dann bis 340° die Länge konstant bleibt und daß ziemlich scharf von 340° an eine starke Kontraktion eintritt.

Noch viel merkwürdiger verhält sich Blattsilber, das bei Temperatursteigerung zunächst runzlig und matt wird und dann zu einem verfilzten weißen Pulver von geringem Volumen zusammenfällt. Beim dünnsten Blattsilber erfolgt die Veränderung schnell

1) Roy. Soc. Proc. ser. A, 81 [1908], 301.

2) Roy. Soc. Proc. ser. A, 83 [1910], 65.

und bei konstanter Temperatur, beim nächstdickeren langsam und in einem Temperaturintervall. Es liegen darüber folgende Versuche vor:

Tabelle 1.

Blattsilber aus Feinsilber.

Dicke des Blattsilbers in μ	0,19		0,7	2,9
Gasatmosphäre	Luft	Sauerstoff	Sauerstoff	Sauerstoff
Beobachtete Zerfallstemperaturen	327° 312°	285—300° 240°	Wird runzlig bei 380°, geht langsam in den Metallfilz über bei 440°.	Schwach runzlig bei 800°, kein Zerfall bis zum Schmelzpunkt.

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß im Übergangszustande zum Zerfall das Blattsilber ein vollkommen durchscheinendes Häutchen bildet, das aus einem Netzwerk mit Löchern besteht, die erst bei 180facher Vergrößerung sichtbar sind. Das Endprodukt, das weiße, filzige Pulver, besteht, bei dieser Vergrößerung betrachtet, aus zackigen, metallglänzenden Flitterchen.

Beachtenswert ist der Anstieg der Zerfallstemperatur und das schließliche Ausbleiben des Zerfalls mit steigender Schichtdicke.

Sehr bemerkenswert ist, daß in sauerstoff-freier Atmosphäre — untersucht wurden von mir Wasserstoff und Stickstoff — Blattsilber bis 500° ganz unverändert bleibt. Die Veränderungen oberhalb 500° zeigen zu Beginn denselben Charakter wie die in Sauerstoff, führen jedoch zu einem ganz anders beschaffenen Endzustand.

Tabelle 2.

Blattsilber aus Feinsilber.

In Wasserstoff.

Erhitzungstemperatur	0,19 μ	0,7 μ
550°	Löcherbildung	—
650°	Starke Schrumpfung	Geringe Schrumpfung
800°	Schrumpfung zu einem zähen Stäbchen von schwammartiger Struktur	—

Turner hat in größerem Umfange gewisse Seiten der Erscheinung studiert. Er stellte die Temperaturen des Durchsichtig-

werdens an Silberfolien von 0,22 μ, die zwischen zwei Glasplättchen gelegt waren, fest. An der photographischen Aufnahme im durchfallenden Licht besaß er ein empfindliches Prüfmittel auf Lichtdurchlässigkeit. Er fand die ersten schwachen Anzeichen des Durchsichtigwerdens in Luft bei 240°, Vollständigkeit der Veränderung bei 390°. Wenn er, anstatt die Temperatur dauernd ansteigen zu lassen, eine niedrigere Temperatur eingehalten hätte, würde er zweifellos schon bei 320° vollständiges Durchsichtigwerden beobachtet haben. — An Silber von 2,5 μ trat auch bei vielstündigem Erhitzen auf 500° keine Veränderung ein.

Turner fand wie ich, daß das veränderte Silber aus einzelnen kleinen Aggregaten besteht, die nach seinem Befund, dem ich mich nicht anschließen kann, amorph und im Zusammenhang mit dieser Zustandsänderung in gewissem Grade durchscheinend sind.

Er beobachtete ferner, daß in Sauerstoff von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$ und $\frac{1}{50}$ Atmosphäre die Veränderung wie in Luft vor sich geht, während im Vakuum und in Kohlenoxyd bis 500°, in Wasserstoff wenigstens bis 400° keine Veränderung erfolgt, daß aber in Wasserstoff beim Erhitzen bis 750° starke Schrumpfung eintritt: alles Beobachtungen, die mit den meinigen im Einklang stehen.

Entgegen seiner Erwartung findet Turner keine Gewichts- oder Gasvolumänderungen, die auf Bildung nennenswerter Mengen eines Oxydes schließen lassen, und er gelangt zu der nicht zu prüfenden und überflüssigen Annahme, daß die Strukturänderung durch Bildung und gleichzeitigen Zerfall von Ag_2O zustandekommt.

Blattkupfer von 0,5 μ Dicke verhielt sich nach meinen Beobachtungen in Wasserstoff und Stickstoff ganz ähnlich wie Silber, nur daß die Temperaturen gleicher Veränderung um etwa 100° höher liegen als bei letzteren.

Tabelle 3.

Blattkupfer 0,5 μ.

Erhitzungs-temperatur	In Stickstoff	In Wasserstoff
550°	In 2 Stunden unverändert	In 4 Stunden löcherig, Schrumpf. sehr gering
700°	In 30 Min. löcherig, Schrumpfung gering	In 30 Minuten löcherig, Schrumpfung gering
800°	In 30 Min. starke Schrumpfung	—
970°	In 30 Min. geschrumpft zu einem zähen Stäbchen mit netzartig genarbter Oberfläche	—

Blattaluminium von $0{,}7\,\mu$, mehrere Stunden in Stickstoff auf 550—570° oder in Wasserstoff 30 Minuten auf 600° erhitzt, ließ makroskopisch keine Veränderung, mikroskopisch ein geringes Rauherwerden der Oberfläche erkennen. Turner fand Aluminium von $0{,}43\,\mu$ nach einstündigem Erhitzen in Luft auf 500° unverändert.

Zu einer Erklärung für diese Veränderungen der Blattmetalle wie auch für die Rekristallisationserscheinungen im massiven Zustand gelangt man, wenn man den das Metall aufbauenden Kristallelementen Oberflächenkräfte zuschreibt, welche die Oberfläche der einzelnen Kristallelemente zu verkleinern streben. Dabei hat man die Kristalllamellen, die sich aus einem Kristalliten durch Verschiebung auf den Gleitflächen gebildet haben, als selbständige Kristallelemente anzusehen. Diesen Oberflächenkräften wirken die orientierenden und fixierenden Kräfte im Raumgitter entgegen.

Nimmt man weiter an, daß letztere Kräfte schneller mit steigender Temperatur abnehmen als die Oberflächenkräfte, so müssen diese schließlich obsiegen, und bei der Kontraktion der Kristalllamellen ist eine freiwillige Deformation sehr dünner Metallschichten zu erwarten.

Gold, welches bekanntlich das duktilste Metall ist, so daß sich Folien daraus in einer von anderen Metallen nicht erreichten Feinheit herstellen lassen, verdankt diese Eigenschaft neben einer hohen Fähigkeit zur Gleitflächenbildung zweifellos einem sehr großen Haftvermögen der Kristallelemente an einander an ihren Berührungsflächen, etwa wie zwei gut geschliffene Glasplatten ihrer gegenseitigen Verschiebung einen mäßigen Widerstand, dem Versuch sie auseinander zu reißen aber einen außerordentlich hohen Widerstand entgegensetzen. Daher beginnt Blattgold, sowie die Oberflächenkräfte größer werden als die Kraft, bei der eine dauernde Deformation eintritt, als Ganzes sich zu kontrahieren, ohne daß irgendwo der Zusammenhang der Oberfläche unterbrochen wird.

Anders Blattsilber, in dem vermutlich der Zusammenhang zwischen den einzelnen Kristalllamellen nicht so innig ist. Hier werden daher an den schwächeren Stellen sich Löcher bilden und das Material dieser Stellen wird die umgebenden Ränder verstärken. Faraday äußerte bereits die Vermutung, daß die Blattmetalle geschichtete Struktur haben und er gebrauchte das Bild, daß sich bei Bildung eines Loches gleichsam die Ränder einer Blende öffnen. Bei weiterem Fortschreiten des Prozesses verstärken sich dann die Knotenstellen des entstandenen durchsichtigen Gewebes auf Kosten

der Verbindungsstellen, und das Ganze zerfällt in kleine Silberaggregate.

Der Einfluß des Sauerstoffs ist so zu deuten, daß Sauerstoff sich im Silber löst und dessen Eigenschaften verändert, entweder die Festigkeit erniedrigt oder die Oberflächenspannung erhöht.

Die Oberflächenkräfte bewirken außer der Kontraktion der einzelnen Kristalllamellen auch ein Verschwinden von Oberflächen, ein Verschweißen der Kristallelemente untereinander. Naturgemäß erfolgt dies an verschiedenen Stellen verschieden leicht. Am leichtesten werden die Gleitflächen zwischen zwei gleich orientierten Lamellen verschwinden, und zwei Kristallite werden erst bei um so höherer Temperatur sich vereinigen, je verschiedener sie orientiert sind. Mithin wird sich die Strukturänderung über einen großen Temperaturbereich erstrecken. Durch das Verschwinden von Gleitflächen wird die Zahl der Kristallelemente außerordentlich vermindert, und im Zusammenhang damit erfolgt das Weichwerden der Metalle im massiven Zustande, die Annäherung ihrer unteren Elastizitätsgrenze an ihren niedrigsten Wert, schon 500° und mehr unter ihrem Schmelzpunkt (Anlassen!). Die mikroskopisch nachweisbare Bildung großer Kristallite jedoch tritt erst sehr viel näher am Schmelzpunkt ein.

Bei den Blattmetallen begegnet uns das Verschwinden von Oberflächen ebenfalls. Blattsilber, das in Stickstoff und Wasserstoff erst bei ca. 500° Veränderungen zu zeigen beginnt, zerfällt in diesen Gasen nicht in kleine Aggregate. Es tritt zwar anfänglich Löcherbildung ein, aber in dem stehenbleibenden Gerippe verschweißen sich an vielen Stellen die Kristallelemente untereinander, und so kommt es zu einer Kontraktion des Ganzen unter Verringerung der äußeren Oberfläche. Aus einer lose zusammengerollten Folie wird schließlich bei 800° ein kaum halb so langes dünnes Stäbchen mit netzartig genarbter Oberfläche. Analog ist wie erwähnt das Verhalten des Blattkupfers.

Fragen wir uns nun, ob es möglich ist, einen Anhalt für die Größe der ins Spiel tretenden Kräfte zu gewinnen. Da muß denn zunächst die sehr wesentliche Einschränkung gemacht werden, daß man, wie von G. Tammann[1]) ausgeführt, die Oberflächenspannung für eine einzelne Oberfläche nicht angeben kann, da die Zahl der Kristalllamellen in einer Blattmetallschicht nicht bekannt ist. Man vermag nur die Summe der Oberflächenkräfte anzugeben, die im Querschnitt eines Blattmetallstreifens angreifen. Die Möglich-

1) l. c.

keit hierzu ergibt sich aus der Gleichsetzung der Festigkeit oder der Kraft, die eine dauernde Deformation hervorruft, und der Oberflächenwirkung bei der Temperatur der beginnenden Deformation.

Da Festigkeitsmessungen für Silber bei erhöhter Temperatur nicht vorliegen, wurde eine Reißfestigkeits-Temperaturkurve zwischen 20° und 330° für 2,9 μ starkes Blattsilber, das durch Oberflächenkräfte nicht verändert wird, aufgenommen. Durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Dicken erhielt man so die Festigkeit des dünneren Blattsilbers und damit für dessen Zerfallstemperatur die Größe der dieser Festigkeit gleichen Oberflächenkräfte.

Hätte ich den Beginn der Schrumpfung des Blattgoldes scharf fassen können oder wären mir die Versuche von Chapman und Porter, denen dies gelungen ist, rechtzeitig bekannt geworden, so hätte ich auch Blattgold bei meinen Festigkeitsmessungen berücksichtigt.

Die Zerreißversuche wurden in der Weise ausgeführt, daß Blattsilberstreifen von gemessener Breite, die an beiden Enden mit Karton- oder Asbestpappestückchen beklebt waren, in einem Luftbade auf die Versuchstemperatur erhitzt wurden. Nach Erreichung derselben wurde in eine an dem Streifen hängende Tarierschale vorsichtig Schrot oder Sand gegeben, bis Zerreißen eintrat, darauf die Schale samt Inhalt gewogen. Als Luftbad diente ein starkwandiges elektrisch geheiztes Kupferrohr.

Wegen der Schwankungen der Einzelwerte wurden für jede Temperatur 10—20 Beobachtungen gemacht. Es ergab sich dann eine durchschnittliche Abweichung der Einzelbeobachtung vom Mittelwert um 10—18 % nach oben oder nach unten. Die folgende Tabelle 4 enthält diese Mittelwerte nebst Angabe der Anzahl der Beobachtungen. Festigkeitsmessungen für die beiden dünneren Blattsilbersorten sind in diese Tabelle mit aufgenommen.

Diese letzteren Zahlen zeigen, daß mit abnehmender Schichtdicke die auf die Querschnittseinheit umgerechnete gefundene Reißfestigkeit σ beschleunigt abnimmt. Dieser Einfluß der Schichtdicke könnte zum Teil darauf zurückgeführt werden, daß in den dünneren Folien Oberflächenkräfte im Sinne einer Verminderung der Festigkeit sich bereits bemerkbar machen. Er ist jedoch auch dadurch bedingt, daß Fehler des Materials wie Löcher und Stellen ungleicher Dicke im dünneren Blattsilber eine größe Rolle spielen als im dicken und daß es schwierig ist, den dünnen Streifen eine in ihrer ganzen Breite gleichmäßige Spannung zu erteilen.

Tabelle 4.

n = Zahl der Beobachtungen.
f = Reißlast in g für 1 cm Streifenbreite.
σ = Reißfestigkeit in kg aufs qmm.

Temperatur	2,9 μ			0,7 μ			0,19 μ		
	n	f	σ	n	f	σ	n	f	σ
20°	12	345	11,9	15	43,5	6,65	7	6,95	3,66
100°	9	254	8,8	13	30,1	4,35	10	4,15	2,18
180°	11	206	7,1	12	30,3	4,40	15	2,40	1,26
260°	19	162	5,6		—			—	
330°	10	150	5,2		—			—	

Wir interpolieren aus den f-Werten des dicksten Blattsilbers für t = 300°, welches wir als die Zerfallstemperatur des dünnsten Blattsilbers annehmen, den Wert 155 g, also ist

$$\frac{155 \cdot 0{,}19}{2{,}9} = 10 \text{ Grammgewicht}$$

die Summe der Oberflächenkräfte, welche an 1 cm Breite des 0,19 μ starken Blattsilbers bei 300° wirken.

Ebenso finden wir, wenn 400° als Schrumpfungstemperatur des Blattsilbers von 0,7 μ angesehen wird, durch Extrapolation der f-Kurve den Wert 137 g und somit

$$\frac{137 \cdot 0{,}7}{2{,}9} = 33 \text{ Grammgewicht}$$

als Summe der Oberflächenkräfte für 1 cm Breite des 0,7 μ starken Blattsilbers bei 400°. Hieraus ergibt sich für die dickere Lamelle ein viel größerer Wert der kontrahierenden Kräfte als für die dünnere Lamelle, was nur darauf zurückgeführt werden kann, daß die in der dickeren Lamelle vorhandene größere Anzahl von Gleitflächen eine stärker kontrahierende Wirkung auf die Lamelle ausübt als die in der dünneren Lamelle vorhandene kleinere Anzahl von Gleitflächen; gerade dieses Ergebnis weist deutlich auf die Ähnlichkeit der Wirkung von Gleitflächen und freien Oberflächen hin.

Wenn das Blattsilber von 0,19 μ n Lamellen stark ist, so beträgt der Wert der Oberflächenspannung in Sauerstoff, wenn man von der jedenfalls geringen Verschiedenheit nach Richtungen absieht,

$\alpha = \frac{10}{2n} \frac{g}{cm}$, wo n wahrscheinlich keine große Zahl ist, denn es ist nicht möglich, durch weitere Bearbeitung noch erheblich dünneres Blattsilber in zusammenhängender Form zu erhalten. Mit Sicherheit kann man nur sagen, daß $n < 1000$, somit $\alpha > 0{,}005$ sein muß, denn nach der Loschmidtschen Zahl enthält eine Silberschicht von $0{,}2\,\mu$ etwa 1000 Atomschichten, Zum Vergleich sei angeführt, daß die Oberflächenspannungen von flüssigem Quecksilber bei Zimmertemperatur 0,55, die von Wasser 0,075 und die von Äther 0,018 $\frac{g}{cm}$ bei derselben Temperatur betragen.

Welches aber auch die Zahl der Oberflächen sein mag, auf welche sich die oben berechneten Kräfte verteilen, so viel kann man wohl behaupten, daß in mechanisch deformierten Metallen Oberflächenkräfte konzentriert sind, die ihrer Größe nach geeignet erscheinen, die Rekristallisation hervorzurufen.

Herrn Professor Tammann möchte ich für die mancherlei Anregungen bei Ausführung dieser Arbeit meinen ergebensten Dank aussprechen.

Serienemission an festen Metallverbindungen durch Kanalstrahlen. Schwellenwert der erregenden Energie.

Von

J. Stark und G. Wendt.

Mit 3 Figuren im Text.

Vorgelegt von Herrn E. Riecke am 2. März 1912.

§ 1. **Methoden.** — Über die Lichtemission an festen Körpern infolge des Stoßes auftreffender Kanalstrahlen liegen bereits Beobachtungen von E. Goldstein[1]), W. Arnold[2]), W. Wien[3]), G. C. Schmidt[4]), J. Tafel[5]), J. Trowbridge[6]) und V. Carlheim-Gyllensköld[7]) vor. Um Ordnung in das dadurch gewonnene phänomenologische Material zu bringen und Gesichtspunkte für die weitere Analyse dieses Falles von Lichtemission zu gewinnen, haben wir auf Grund der Erkenntnis der prinzipiellen Verschiedenheit von Serien- und Bandenspektren[8]) den Fall der Serienemission an festen Körpern durch Kanalstrahlen geschieden von den Fällen der Bandenemission. Das Resultat der experimentellen Untersuchung unter dem Gesichtspunkt dieser zwei Arten von Lichtemission hat dies Vorgehen gerechtfertigt.

---

1) E. Goldstein, Berl. Ber. 1886, 677; Wied. Ann. 64, 45, 1898; Verh. d. D. Phys. Ges. 3, 209, 1901; 4, 11, 1902.

2) W. Arnold, Wied. Ann. 61, 326, 1897.

3) W. Wien, Wied. Ann. 65, 447, 1898; Phys. Zeitschr. 3, 440, 1901; Ann. d. Phys. 5, 432, 1901; 8, 252, 1902.

4) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 9, 703, 1902; 13, 622, 1904.

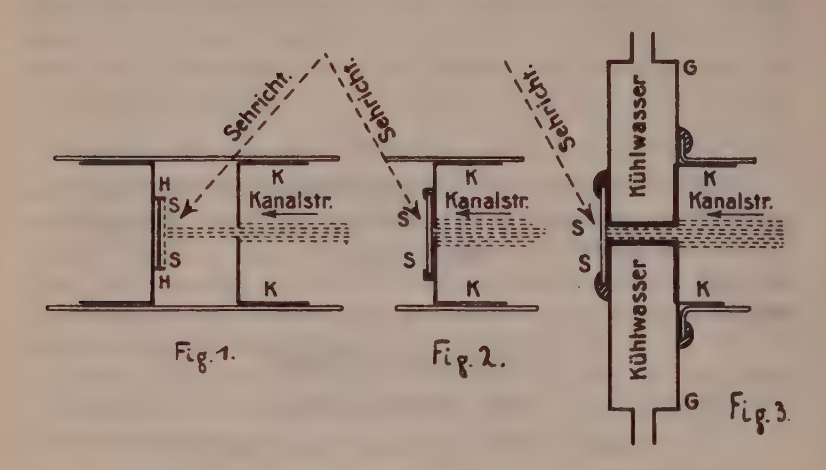
5) J. Tafel, Ann. d. Phys. 11, 613, 1903; 14, 206, 1904.

6) J. Trowbridge, Proc. Amer. Acad. 43, 401, 1908.

7) V. Carlheim-Gyllensköld, Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 4, No. 33, 1908.

8) Vergl. J. Stark, Die elementare Strahlung, S. 42. S. Hirzel, Leipzig 1911.

Zur Erregung der Serienemission an festen Metallverbindungen haben wir die drei aus den Figuren 1, 2 und 3 ersichtlichen Anordnungen gebraucht. *KK* ist eine Kathode aus Aluminiumblech, in ihrer Mitte ist ein 2 mm weites kreisförmiges Loch angebracht.



Durch dieses läuft ein Teil der Kanalstrahlen und trifft hinter ihm auf die feste Substanz *SS*. Bei der Anordnung 1 ist die Substanz *SS* entweder fein gepulvert oder als Metallstück in den tellerförmigen Halter *HH* gepreßt oder auch durch dünne Drähte auf *HH* befestigt, *HH* sitzt auf einem Messingblechzylinder, der metallisch mit der Kathode verbunden ist. Liegt die zu untersuchende Substanz in der Form einer durchsichtigen Kristallplatte *SS* vor, so kann man sie nach Anordnung 2 direkt auf die Kathode aufsetzen oder, um das emittierte Licht noch besser beobachten zu können, sie nach Anordnung 3 auf das Ende des Kathodenkanals außen aufkitten. Im Falle 3 hat man dann zur Vermeidung der Erwärmung der Kittstellen die Aluminiumkathode auf einem von Wasser durchströmten Messinggefäß *GG* zu befestigen.

In den meisten Fällen wurde die Serienemission mit Wasserstoffkanalstrahlen erregt, in einigen Fällen auch mit Stickstoff-, Sauerstoff- und Quecksilberkanalstrahlen. Bis zu 4500 Volt Kathodenfall wurden die Kanalstrahlen mit einer Hochspannungsdynamomaschine, darüber mit einem großen Induktorium (Quecksilberturbinen-Unterbrecher) erzeugt.

Das an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen emittierte Licht wurde in der aus den Figuren 1—3 ersichtlichen Richtung mit

Hilfe eines einfachen, aber lichtstarken Bunsenschen Spektroskops analysiert. Außer den Serien und Banden der von den Kanalstrahlen getroffenen Substanzen erschienen im Spektroskop aus dem Kanalstrahlenraum die Linien $H\alpha$, $H\beta$ und $H\gamma$, bei tiefen Drucken auch die Hg-Linie λ 546,1 $\mu\mu$.

§ 2. **Die beobachteten Serienspektra.** — Über die Serienemission durch Kanalstrahlen an festen Metallverbindungen haben wir in der Literatur folgende Angaben gefunden: E. Goldstein[1]) und H. Rau[2]) beobachteten an Natriumglas, das von Kanalstrahlen getroffen wird, die D-Linien; die gleiche Beobachtung machte bereits früher W. Arnold[3]) an Natriumsalzen und Natriumoxyd; J. Trowbridge[4]) beobachtete an einem von Kanalstrahlen getroffenen Lithiumsalz die roten Lithiumlinien, V. Carlheim-Gyllensköld[5]) an Lithiumsalzen die Linien λ 670, 610, 497, 460, an Natriumsalzen die Linien λ 616, 589, 568, 515, 498, an Jodkalium λ 576,9 und 530,0, an Magnesiumchlorid sehr schwach λ 517 $\mu\mu$. Bei Rubidium, Cäsium, Calcium, Strontium, Barium, Zink und Aluminium vermochte Carlheim-Gyllensköld, der eine eingehende Untersuchung über die Lichtemission fester Körper durch Kanalstrahlen angestellt hat, keine Serienemission nachzuweisen.

Eine Übersicht über die positiven Resultate unserer Untersuchungen über die Serienemission durch Kanalstrahlen an festen Metallverbindungen gibt die Tabelle I.

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß sämtliche Elemente der Gruppe der Alkalien und der alkalischen Erden an der Oberfläche von farblosen Verbindungen infolge des Stoßes auftreffender Kanalstrahlen sichtbare Serienlinien emittieren. Da diese Erscheinung außer bei diesen Metallen noch bei Thallium, Zink und Aluminium sich nachweisen läßt, so ist wahrscheinlich, daß alle Metalle an der Oberfläche fester farbloser Verbindungen infolge auftreffender Kanalstrahlen unter geeigneten Versuchsbedingungen ihre Serienlinien emittieren.

1) E. Goldstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 4, 11, 1902.
2) H. Rau, Phys. Zeitschr. 7, 421, 1906.
3) W. Arnold, Ann. d. Phys. 61, 326, 1899.
4) J. Trowbridge, Proc. Amer. Acad. 43, 401, 1908.
5) V. Carlheim-Gyllensköld, Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 4, No. 33, 1908.

Tabelle I.

Element	Verbindung	Absorpt.-Farbe	Leuchtfarbe	Linie $\mu\mu$	Okul. Intensität
Lithium	**Lithiumchlorid** (Li Cl) entwässert	farblos	rot	670,8	zieml. groß
				610,4	
	Lithiumoxyd (Li_2O) und **Lithiumhydroxyd** (Li OH) am Metall in Luft gebildet	farblos	rot	497,2	
				460.2	
Natrium	**Natriumchlorid** (Na Cl)	farblos	gelb	616,1 / 615,6 D	mäßig
				568,8 / 568,3 D	sehr groß
				515,4 / 514,9 D	klein
				498,3 / 497,7 D	klein
Kalium	**Kaliumchlorid** (K Cl)	farblos	unbestimmt	580,2 / 578,3 D	mäßig
	Kaliumoxyd (K_2O) und **Kaliumhydroxyd** am Metall in Luft gebildet	grau		536,0 / 534,0 D	klein
Rubidium	**Rubidiumsuboxyd** am Metall in Luft gebildet	graublau	unbestimmt	drei rote Linien	sehr klein
				572,4	mäßig
				565,4 / 564,8 D	klein
				420,2 / 421,5 D	sehr klein
Cäsium	**Cäsiumchlorid** (Cs Cl)	farblos	violett	584,5	klein
				566,4	groß
				459,3	klein
				455,5	klein
Magnesium	**Magnesiumchlorid** ($MgCl_2$) an Luft entwässert und wahrscheinlich zum Teil in Mg O verwandelt	farblos	unbestimmt	518,4 / 517,3 / 516,7 T	groß
Calcium	**Calciumfluorid** (CaF_2), Flußspatplatte	farblos	rotviolett	649,9	zieml. groß
				612,2	
	Calciumoxyd (Ca O) an Metall in Luft gebildet	farblos	rotviolett	560,3	
				534,9	mäßig
				487,8	
				445,4	
				430,2	
				422,7	groß
				396,7 / 393,3 D	klein
Strontium	**Strontiumchlorid** ($SrCl_2$) an Luft entwässert (Sr O?)	farblos	weißblau	640,8	zieml. groß
				638,7	
				550,4	
				548,6	
				523,8	
				496,2	groß
				460,7	mäßig
				421,5	
				407,8	

Element	Verbindung	Absorpt.-Farbe	Leuchtfarbe	Linie $\mu\mu$	Okul. Intensität
Barium	**Bariumchlorid** ($BaCl_2$) an Luft entwässert (BaO?)	farblos	unbestimmt	649,7 614,1 606,0	mäßig
				553,6	groß
				493,4 455,4	mäßig
Thallium	**Thalliumsulfat** an Luft entwässert, unter der Einwirkung der Kanalstrahlen wird es erst grau, dann schwarz, wahrscheinlich Bildung von **Thalliumoxyd**	farblos	unbestimmt	535,1	erst groß, dann immer kleiner
Aluminium	**Aluminiumoxyd** (Al_2O_3), bräunt sich etwas unter den Kanalstrahlen	farblos	unbestimmt	396,2 394,4 } D	klein
Zink	**Zinkoxyd** (ZnO), bräunt sich unter den Kanalstrahlen	farblos	violett	481,1 472,2 468,0 } T	erst mäßig, dann immer kleiner

Allein aus der Tatsache, daß die infolge des Stoßes von Kanalstrahlen auf feste Metallverbindungen emittierten Serienlinien, wenigstens bei geringer Dispersion (1 Å auf 0,1 mm), nicht verbreitert erscheinen, läßt sich folgern, daß der Ort der Emission nicht die von den Kanalstrahlen getroffene feste Oberflächenschicht, sondern die an diese unmittelbar angrenzende Schicht des Gasraumes ist. Diese Folgerung wird durch die nachstehende Beobachtung zur Gewißheit.

Bringt man bei der Anordnung der Figur 1 das Auge in die Ebene der festen Oberfläche, so daß man auf diese nicht mehr sehen kann, so erblickt man bei einer Lithiumverbindung, die von Kanalstrahlen getroffen wird, eine 0,2—1 mm dicke im Gasraum liegende Schicht, welche das rote Serienleuchten zeigt; die Intensität nimmt auf der Seite nach dem Gasraum zu rasch ab. Die Dicke dieser in Lithiumlinien leuchtenden Gasschicht wächst mit der Geschwindigkeit der das Leuchten erregenden Kanalstrahlen, auch wenn ihre gesamte Intensität infolge Abnahme der Kanalstrahlenmenge bei sinkendem Gasdruck abnimmt. Ebenso wie bei Lithium konnte bei Natrium bez. Calcium ein auf 0,5 mm bez. 0,8 mm in den Gasraum sich erstreckendes Serienleuchten vor der getroffenen festen Oberfläche beobachtet werden, dagegen besaß eine derartige serienleuchtende Gasschicht bei Cäsium und Barium nur eine sehr geringe, nicht mit Sicherheit festzustellende Dicke.

Erwähnt sei noch, was aus der obigen Tabelle hervorgeht und von uns noch durch besondere Beobachtungen bei Calcium (CaF_2, $CaCO_3$, $CaSO_4$, CaO) festgestellt und auch bereits von Carlheim-Gyllensköld für Lithium und Natrium gefunden wurde, daß die Serienemission eines Metalles durch Kanalstrahlen unabhängig von der chemischen Natur der Verbindung des Metalls ist.

Auch sei noch mitgeteilt, daß die Serienemission des Natriums und des Calciums wie für Wasserstoff-Kanalstrahlen, so auch für Sauerstoff-, Stickstoff- und Quecksilberkanalstrahlen erhalten wurde.

§ 3. **Negatives Resultat bei anderen Substanzen.** — Ähnlich wie die vorstehenden Metallverbindungen haben wir Metalle und gewisse vermutlich sich bildende Metallverbindungen nach der Anordnung der Figur 1 untersucht und zwar sowohl mit sehr raschen wie mit langsamen Wasserstoff-Kanalstrahlen, indes wie vorweg und für alle bemerkt sei, ohne positiven Erfolg.

Blei wurde von den auftreffenden Kanalstrahlen lediglich zerstäubt ohne Bildung einer farbigen Oberflächenschicht. Das gleiche war bei Wismut und Silber der Fall; diese Metalle zerstäubten unter den auftreffenden Kanalstrahlen so außerordentlich stark, daß die Röhrenwand bereits nach etwa 15 Minuten Bestrahlung mit einer undurchsichtigen Zerstäubungsschicht sich bedeckte, und zwar zerstäubte Wismut noch etwas stärker als Silber.

Zink färbte sich an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen bräunlich, ebenso Aluminium, und Kupfer nahm eine gelbliche Farbe an. Daß diese Färbung von sich absetzender Kohle herrührt, möchten wir nicht behaupten, obzwar infolge der Gegenwart von Kohlenwasserstoffen sich Kohlenstoffkanalstrahlen bilden konnten. Es ist indes auch möglich, daß sich an der Auftreffstelle gefärbte Hydride bildeten, zumal ja Zink- und Kupferwasserstoff als chemische Verbindungen nachgewiesen sind.

Wasserfreies Kupfersulfat färbte sich in kürzester Zeit unter der Wirkung der H-Kanalstrahlen an der Auftreffstelle dunkelrot bis schwarz (Bildung von Kupfer, Kupferoxyd oder Kupfersulfid?).

Magnesium wurde unter Petroleum blank gedreht und darauf mit Benzol gereinigt. Es färbte sich an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen ebenfalls braun. Wie bekannt ist, ließ sich spektralanalytisch die Bildung eines Magnesiumhydrids nachweisen.

Eine Kalium- und eine Natrium-Metallfläche, die an der Luft mit einer grauen matten Oxydhaut sich überzogen hatten, wurden unter der Wirkung auftreffender H-Kanalstrahlen ausgehend von der Auftreffstelle zunächst blank, dann dunkelblau und umgaben

sich nach außen hin mit Newtonschen Farbenringen. Es ist wahrscheinlich, daß das Oxyd zunächst reduziert wurde, und daß sich dann an der Oberfläche gefärbte Hydride bildeten. Daß es gefärbte Alkalihydride gibt, haben J. Elster und H. Geitel[1]) überzeugend nachgewiesen. Jene farbigen Überzüge schützten die Oberfläche des Natrium- und Kaliumpräparates, als sie aus der Vakuumröhre wieder an die Luft gebracht wurden, 15—20 Minuten vor der Oxydation.

Lithiummetall, das sich an Luft mit Oxyd überzogen hatte, lieferte zunächst die Serienemission, nach einiger Behandlung mit Wasserstoffstrahlen verschwand die Emission fast vollständig, kehrte aber in beträchtlicher Intensität wieder, als Luft in die Röhre gelassen wurde.

Auch sei hier darauf hingewiesen, daß nach Tabelle I das dunkelgraue Rubidium- und Thalliumoxyd nur eine schwache Serienemission liefern. Lithiumchlorid färbte sich unter auftreffenden reinen Wasserstoffkanalstrahlen allmählich dunkel (Reduktion zu metallischem Lithium), in gleichem Maße ging die Intensität seiner Serienemission zurück.

Wir sahen längere Zeit die Erklärung eines Teiles der vorstehenden negativen Resultate in der Bildung eines das Metall schützenden nicht leuchtenden Kohleüberzuges; gegenüber der Häufung der negativen Resultate unter den verschiedensten Umständen halten wir indes diese Erklärung für unrichtig.

Es ist bekannt[2]), daß sich im Kanalstrahlenlicht die intensivsten Serienlinien des Kathodenmetalls z. B. von Aluminium oder Zink spektrographisch bei genügend langer Belichtung nachweisen lassen; so erhielten wir mit Hilfe eines lichtstarken Spektrographen nach einstündiger Belichtung mit Hilfe der Anordnung der Figur 3 intensiv das Aluminium-Duplet λ 396,2 und 394,4 $\mu\mu$. Indes ist diese Serienemission erstens hinsichtlich ihrer sehr viel geringeren Intensität, zweitens insofern von der oben beschriebenen Serienemission fester farbloser Metallverbindungen verschieden, als sie sich nicht wie diese auf eine dünne Gasschicht unmittelbar an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen beschränkt, sondern überall da im Kanalstrahlenraum und auch in der negativen Glimmschicht auftritt, wohin die durch Zerstäubung in den Gasraum geschafften Metallatome gelangen können. Und sie wird offenbar dadurch

1) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 11, 255. 1910.

2) Vergl. J. Stark u. W. Hermann, Physik. Zeitschr. 7, 92, 1906; J. Stark, Ann. d. Phys. 26, 823, 1908.

angeregt, daß Kanalstrahlen oder Kathodenstrahlen, wenn sie auf diese Metallatome im Gasraum stoßen, ebenso wie an Gasatomen durch ihren Stoß die Emission von ruhenden Serienlinien veranlassen.

Beim Vergleich der Substanzen von positivem Resultat mit den Substanzen von negativem Resultat hinsichtlich der beschriebenen Serienemission fällt auf, daß jene sichtbares Licht wenig oder überhaupt nicht absorbieren, während diese im sichtbaren Spektrum alle mehr oder weniger Licht absorbieren. Ob freilich dieses Verhältnis nicht bloß zufällig ist, oder ob in der Tat zwischen der Lichtabsorption einer von Kanalstrahlen getroffenen Oberfläche und der Serienemission von Seite der Metallatome, welche bei der Zerstäubung aus der Oberfläche austreten, ein ursächlicher Zusammenhang besteht, darüber haben weitere Untersuchungen zu entscheiden.

§ 4. **Schwellenwert der erregenden Energie.** — Wie nunmehr feststeht erhalten die Kanalstrahlen dadurch ihre kinetische Energie, daß sie den Kathodenfall ganz oder zum Teil frei durchlaufen. Nun zeigte sich bei unseren Beobachtungen sehr bald, daß die beschriebene Serienemission an festen Metallverbindungen durch Kanalstrahlen unterhalb eines bestimmten Wertes des Kathodenfalles V (Volt), also der kinetischen Energie $e \frac{V}{300}$ einwertiger positiver Kanalstrahlen unmerklich, dagegen bei Überschreiten dieses Schwellenwertes rasch mit wachsendem Kathodenfall beträchtliche Intensität gewann. Zur Messung dieses Schwellenwertes wurde parallel zur Röhre ein Braunsches Elektrometer bei Betrieb mit Gleichspannung gelegt und die Elektrodenspannung in dem Moment abgelesen, in welchem die charakteristische Leuchtfarbe oder Serienemission oder bei deren Fehlen ihre stärkste Linie im Spektroskop sichtbar wurde. Nun setzt sich die Elektrodenspannung[1]) aus dem Kathodenfall, dem Anodenfall (30—50 Volt) und der auf der positiven Säule liegenden Spannung zusammen; da diese infolge des kleinen Abstandes der Anode von der Kathode gering war, so durften wir bis auf -100 Volt Genauigkeit den Kathodenfall gleich der Elektrodenspannung setzen. In der nachstehenden Tabelle II sind für die untersuchten Elemente die auf diese Weise erhaltenen Werte des Kathodenfalls $\left(\text{kinetische Energie } 4{,}7.10^{-10} \frac{V}{300}\right)$ für den

---

1) Vergl. J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, S. 193, J. A. Barth, Leipzig 1902.

Eintritt der Serienemission an den von H-Kanalstrahlen getroffenen Metallverbindungen zusammengestellt. Abgesehen von der eben gekennzeichneten Ungenauigkeit in der Bestimmung des Kathodenfalls ist dieser offenbar bei der spektroskopischen Beobachtung infolge der Unempfindlichkeit der Methode durchweg zu hoch gefunden. Gleichwohl ist die Tatsache als durchaus sichergestellt

Tabelle II.

Element	Verbindung	Beob. Farbe	Schwellenwert Volt	Stromstärke Milliampère
Lithium	Chlorid	Rote Leuchtfarbe	600	3,6
	Oxyd	„	600	
	„	λ 610	< 800	
Natrium	Chlorid	Gelbe Leuchtfarbe	750	4—15
Kalium	Chlorid u. Oxyd	λ 580	< 2400	2,5
Rubidium	Suboxyd	λ 572	< 3500	1,7
Cäsium	Chlorid	λ 566	> 4500	
Magnesium	Chlorid	λ 518	< 1200	3,6
Calcium	Fluorid (Flußspat)	Rotviolette Leuchtf.	1500	1—8
	Carbonat (Kalkspat)	„	1500	
	Sulfat (Marienglas)	„	1500	
	Oxyd	„	1400	
Strontium	Chlorid	λ 496	< 2500	3
Barium	Chlorid	λ 554—493	< 2500	3
Thallium	Sulfat?	λ 535	> 4500	
Aluminium	Oxyd	λ 396	> 4500	
Zink	Oxyd	λ 478	> 4500	

zu erachten, daß *die Serienemission an festen Metallverbindungen infolge des Stoßes auftreffender Kanalstrahlen nur oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes der kinetischen Energie der Kanalstrahlen möglich ist.*

Durch das vorstehende Resultat dürfte die Differenz unserer und *Carlheim-Gyllenskölds* Resultate für Rb, Cs, Ca, Sr, Ba, Al, Zn sich erklären. Da dieser Forscher wohl die Li-, Na- und K[1])-Emission beobachtete und die Mg-Linie λ 5176 nur in sehr geringer Intensität sah, so vermuten wir, daß er mit einem Kathodenfall arbeitete, welcher 1200 Volt nur wenig überstieg; die Serienemission der übrigen Elemente, welche einen Schwellenwert größer als 1200 Volt besitzt, konnte sich darum bei seinen Beobachtungen nicht einstellen.

1) Bei Kalium haben wir übrigens die von *Carlheim-Gyllensköld* angegebenen Linien, die auch sonst nicht bekannt sind, nicht beobachten können.

Der Schwellenwert der erregenden Energie ist, wie Tabelle II zeigt, innerhalb der Fehlergrenze unabhängig von der chemischen Verbindung des emittierenden Metalls, er ist auch im Bereich $1-10.10^{-3}$ Amp. unabhängig von der Stärke des Glimmstromes, welcher die Kanalstrahlen erzeugt. So wurde bei CaF_2 derselbe Schwellenwert (1500 Volt) für 1, 2 und 8 Milliampère, bei $NaCl$ (Steinsalzplatte) der Wert 750 Volt für 4 und 15 Milliampère gefunden.

Ein Vergleich der Schwellenwerte verschiedener Elemente unter dem Gesichtspunkt ihrer Stellung im periodischen System kann deswegen nicht mit quantitativer Sicherheit durchgeführt werden, weil die Schwellenwerte nicht an homologen Serienlinien gleicher Wellenlänge bestimmt werden können. Immerhin macht die Tabelle folgende Sätze wahrscheinlich. Die Gruppe der Alkalien besitzt kleinere Schwellenwerte der Energie für die Serienemission als die Gruppe der alkalischen Erden, diese wieder kleinere Schwellenwerte als die übrigen Metalle von kleinem Atomgewicht. Innerhalb derselben Gruppe scheint der Schwellenwert für die kleinen Atomgewichte kleiner als für die großen Atomgewichte zu sein.

Bemerkung bei der Korrektur. Es ist uns unterdeß gelungen, zwischen den drei denkbaren Möglichkeiten zur Erklärung der beobachteten Serienemission und ihres Fehlens bei absorbierenden Körpern experimentell zu entscheiden. An anderer Stelle werden wir unsere Beobachtungen ausführlich mitteilen, hier beschränken wir uns darauf, kurz diejenige Erklärung anzugeben, welche durch sie am wahrscheinlichsten geworden ist.

Die auf Metallatome an einer festen Oberfläche stoßenden Kanalstrahlen werfen diese losgetrennt von ihren Valenzelektronen als langsame Atomjonstrahlen in den angrenzenden Gasraum. Durch den Stoß nehmen diese Atomjonen in Serienfrequenzen Lichtenergie auf, tragen diese aus der festen nicht absorbierenden Oberfläche in den angrenzenden Gasraum hinüber und strahlen sie hier auf einem Wege von jener aus, der um so kürzer ist, je kleiner die Geschwindigkeit der Atomjonstrahlen ist. Absorbiert die feste Oberfläche Licht in den Serienfrequenzen, so entzieht sie den Atomjonen ihre Lichtenergie bei ihrem Austritt in den Gasraum, so daß sie in diesen lichtlos einlaufen.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule, Februar 1912.

Bandenemission fester Metallverbindungen durch Kanalstrahlen.

Von

J. Stark und G. Wendt.

Vorgelegt von Herrn E. Riecke am 2. März 1912.

Durch mehrere Forscher ist festgestellt worden, daß feste Metallverbindungen, Salze und Oxyde, infolge des Stoßes auftreffender Kanalstrahlen Licht emittieren, welches zerlegt mehr oder minder große Bezirke des Spektrums kontinuierlich ausfüllt. Nach den Festsetzungen[1]) des einen von uns sind derartige Spektra zur Gruppe der Bandenspektra zu rechnen.

Über diesen Fall von Bandenemission haben vor allem folgende Forscher Material beigebracht: W. Arnold[2]), W. Wien[3]), G. C. Schmidt[4]), J. Tafel[5]); besonders ausgedehnte spektralanalytische Messungen hat V. Carlheim-Gyllensköld[6]) angestellt. Wir setzten uns nicht zur Aufgabe, weitere derartige Fälle von Bandenemission aufzusuchen und zu beschreiben, vielmehr legten wir uns die Frage nach dem Ort dieser Bandenemission und nach ihrem Zusammenhang mit dem Stoß der Kanalstrahlen vor.

Ohne weiteres ist von vorneherein die Möglichkeit zuzulassen, daß die unmittelbar von den auftreffenden Kanalstrahlen gestoßenen Atome des festen Körpers in Bandenfrequenzen zu Lichtemission

---

1) J. Stark, Die elementare Strahlung, S. 80, S. Hirzel, Leipzig 1911.
2) W. Arnold, Wied. Ann. 61, 326, 1897.
3) W. Wien, Phys. Zeitschr. 3, 440, 1901.
4) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 9, 703, 1902; 13, 622, 1904.
5) J. Tafel, Ann. d. Phys. 11, 613, 1903; 14, 206, 1904.
6) V. Carlheim-Gyllensköld, Ark. f. Mat., Astr. och. Fys. 4, Nr. 33. 1908.

angeregt werden, daß also der Ort einer Bandenemission die Gesamtheit der Auftreffstellen von Kanalstrahlenteilchen ist. Freilich ist für diesen Fall von Bandenemission fester Körper durch Kanalstrahlen bis jetzt noch kein reines Beispiel aufgefunden worden. Dagegen konnten wir die Verwirklichung folgender Möglichkeit in mehreren Fällen nachweisen.

Es kann nämlich das Licht, das infolge von Stoß, sei es an dem stoßenden Kanalstrahlenteilchen, sei es an dem gestoßenen Atom der festen Oberfläche, in einer Serien- oder Bandenfrequenz zur Emission kommt, bei seiner Ausbreitung in den festen Körper (Metallverbindung) hinein in Bandenfrequenzen der Atome des Körpers absorbiert und dann in diesen Banden oder in gekoppelten Banden wieder als Fluoreszenzlicht [1]) im engeren Sinne des Wortes ausgestrahlt werden. In diesem Fall von Bandenemission fester Körper durch Kanalstrahlen schaltet sich also zwischen die beobachtete Emission und den Stoß der Kanalstrahlen an ihrer Auftreffstelle eine Lichtemission als unmittelbare Wirkung der Kanalstrahlen und eine Absorption dieses emittierten Lichtes ein.

Es liegt auf der Hand, daß der Ort dieser Bandenfluoreszenz ein größeres Volumen des von Kanalstrahlen getroffenen Körpers einnimmt als die Auftreffstelle der Kanalstrahlen. Umgekehrt läßt sich aus der lokalen Ausdehnung der Bandenemission durch Kanalstrahlen auf ihren Fluoreszenzcharakter zurückschließen. Wir teilen hierzu folgende Beobachtungen mit.

Wie bereits Carlheim-Gyllensköld beobachtete, zeigt Chlornatrium unter auftreffenden Kanalstrahlen eine schwache weißblaue Bandenemission. Wir fanden diese Bandenemission an Steinsalzplatten wieder. Wurde nämlich eine Steinsalzplatte, so wie es Fig. 2 der vorausgehenden Abhandlung zeigt, auf der Rückseite der Kathode befestigt und trafen dann scharf im Querschnitt des 2 mm weiten Kathodenkanals Kanalstrahlen auf die Platte auf, so zeigte sich oberhalb eines gewissen Schwellenwertes des Kathodenfalls im ganzen Volumen der Platte blaues Fluoreszenzlicht. Dieses konnte offenbar nur aus der Absorption von Licht entstehen, das an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen zur Emission gebracht war [2]).

Bei mehreren Metallverbindungen machten wir folgende Beobachtung. Die Salze wurden in der Art der Anordnung der Fig.

1) Vergl. J. Stark, Die elementare Strahlung, S. 213.

2) An anderer Stelle werden wir weitere Beobachtumgen über die Emission ultravioletten Lichtes an der Auftreffstelle von Kanalstrahlen mitteilen.

1 der vorausgehenden Abhandlung den Kanalstrahlen ausgesetzt. Wenn dann bei niedrigem Druck das Kanalstrahlenbündel in scharf zylindrischer Begrenzung auf die feste Fläche auffiel, so leuchtete in mehreren Fällen die kleine kreisförmige Auftreffstelle in der Farbe der Serienemission, dagegen die ganze übrige nicht von Kanalstrahlen getroffene Fläche im Licht der Bandenemission. So lieferte Cäsiumchlorid an der Auftreffstelle schneller Kanalstrahlen violettes Serienleuchten, rund herum schönes weißblaues Bandenleuchten, Strontiumchlorid hier blaues Banden-, dort weißblaues Serienleuchten, Zinkoxyd gelbgrünes Banden- um violettes Serienleuchten. Auch in diesen Fällen kann die Bandenemission nur eine indirekte Wirkung der Kanalstrahlen gewesen sein, nämlich eine Fluoreszenz infolge der Absorption von Licht, das an der Auftreffstelle emittiert wurde.

Es liegt auf der Hand, daß die beschriebene Bandenfluoreszenz nicht bloß in größerem Abstand von der Auftreffstelle der Kanalstrahlen, sondern auch in der unmittelbar an die Auftreffstelle grenzenden Körperschicht sich ausbilden muß und hier sogar in größerer Intensität als dort, da hier die Intensität des primären die Fluoreszenz erregenden Lichtes größer ist. Es ist nun offenbar der Fall möglich, daß unterhalb des Schwellenwertes der Energie für die Serienemission infolge des Stoßes der Kanalstrahlen bereits Fluoreszenzemission an der Auftreffstelle sich einstellt, ohne eine gleichzeitige Serienemission.

Für diesen Fall haben wir eine ganze Reihe von Beispielen aufgefunden. Und zwar scheint die beschriebene Fluoreszenzbandenemission ebenso wie die Serienemission erst oberhalb eines bestimmten Schwellenwertes der kinetischen Energie der H-Kanalstrahlen sich einzustellen. Die nachstehende Tabelle gibt derartige Schwellenwerte für verschiedene Metallverbindungen; sie sind aus dem in der vorausgehenden Abhandlung angegebenen Grund wahrscheinlich alle um 50—100 Volt zu hoch.

Substanz	Leuchtfarbe	Schwellenwert (Volt)
$NaCl$	weißblau	1100
KCl	„	600
$CsCl$	blau	500
$MgCl_2$	blauweiß	750
$SrCl_2$	blau	500
$BaCl_2$	blau	500
ZnO	gelb, grüngelb	700

Die Redewendung Schwellenwert der kinetischen Energie für Bandenfluoreszenz darf nicht mißverstanden werden; der Schwellenwert ist offenbar nicht etwas charakteristisches für die Emission der sichtbaren Fluoreszenzbanden, sondern ist denjenigen Frequenzen zuzuordnen, die unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen an der Auftreffstelle mit Lichtenergie gefüllt werden und deren ausgestrahlte Energie dann infolge der Absorption bei der Ausbreitung die Fluoreszenz anregt.

Da die meisten Metallverbindungen, welche die beschriebene Bandenfluoreszenz zeigen, mit Licht oberhalb λ 300 $\mu\mu$ nicht zu dieser Fluoreszenz angeregt werden können, so ist zu folgern, daß das direkt von den Kanalstrahlen an ihrer Auftreffstelle zur Emission gebrachte Licht, welches die Fluoreszenz erregt, eine Wellenlänge kleiner als 300 $\mu\mu$ hat. Und hieraus ergibt sich dann sofort die weitere Folgerung, daß die untersuchten Metallverbindungen im Ultraviolett Absorptions- und somit auch Fluoreszenzbanden besitzen, mit denen die sichtbaren Banden als langwellige Banden gekoppelt[1]) sind.

Nachdem im Vorstehenden der Nachweis einer Bandenfluoreszenz infolge der Absorption ultravioletten von Kanalstrahlen direkt erregten Lichtes geführt ist, erheben sich folgende weitere Fragen und Aufgaben.

Es ist einmal der spektrale Charakter und der Träger des Lichtes zu ermitteln, welches unmittelbar von den Kanalstrahlen an ihrer Auftreffstelle zur Emission gebracht wird. Es ist möglich, daß die Wellenlängen dieses Lichtes im Schumannschen Gebiet oder unterhalb λ 100 $\mu\mu$ liegen. Darnach sind die Schwellenwerte der kinetischen Kanalstrahlenenergie für Emission dieser Frequenzen genauer zu bestimmen.

Weiter bietet die Emission dieses Lichtes die Möglichkeit in einen festen Körper ultraviolettes Licht in großer Intensität zu senden und dadurch seine weit im Ultraviolett liegenden kurzwelligen Banden zur Fluoreszenz anzuregen. Die spektrographische Aufsuchung ultravioletter Fluoreszenzbanden fester Metallverbindungen auf dem hier angegebenen Wege muß eine der nächsten Aufgaben sein.

Hieran schließt sich von selbst die Frage nach dem Träger der Bandenfluoreszenz und den Bedingungen, unter denen sie in größter Intensität beobachtet werden können. Es ist möglich, daß

1) Vergl. J. Stark, Die elementare Strahlung, S. 223.

der Träger der Banden das Molekül der gewählten Metallverbindung selber ist; dann allerdings müßte die Absorption in diesen Banden sehr klein sein, um zu erklären, daß das erregende Licht sowohl wie das Fluoreszenzlicht so große Strecken in der Verbindung zurücklegen kann. In vielen Fällen dürften die absorbierenden und fluoreszierenden Moleküle fremde Moleküle sein, welche das erregende Licht stark absorbieren, aber in so sehr feiner Verteilung (fester Lösung) vorhanden sind, daß das erregende Licht und das Fluoreszenzlicht große Strecken in der festen Substanz durchlaufen können; ähnlich erreicht ja auch bei den organischen fluoreszierenden Substanzen (Benzolderivate) die Fluoreszenz erst bei sehr großer Verdünnung in einem nicht absorbierenden Lösungsmittel eine große Intensität in tieferen Substanzschichten. In der Tat hat G. C. Schmidt zeigen können, daß die gelbgrüne Fluoreszenz des Zinkoxyds unter der Wirkung der Kanalstrahlen nicht dem Zinkoxydmolekül selbst, sondern einer in sehr großer Verdünnung vorhandenen Beimischung eigentümlich ist. Die hier gegebene Analyse der Bandenemission durch Kanalstrahlen als einer Fluoreszenz infolge der Absorption sich ausbreitenden ultravioletten Lichtes erklärt zwanglos, wie eine in sehr großer Verdünnung einem festen Körper beigemischte Substanz intensiv leuchten kann, obwohl nur verschwindend wenige ihrer Moleküle an der Auftreffstelle der Kanalstrahlen direkt von diesen angestoßen werden.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß sich die hier gegebene Analyse der Bandenemission durch Kanalstrahlen auf viele Fälle der Bandenemission fester Körper durch Kathodenstrahlen übertragen läßt.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule, Februar 1912.

Einige Beobachtungen über die Absorption des Lichtes im Andalusit.

Von

M. Lewitskaja.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 2. März 12.

Die Absorption des Lichtes im Andalusit ist bis jetzt nicht ausführlich untersucht worden, obwohl sie wegen des großen Pleochroismus dieses Kristalles besonderes Interesse besitzt. Schon die bekannte Erscheinung der farbigen Büscheln im Andalusit weist ja auf die große Absorption einiger Lichtschwingungen in diesem Kristall hin. Die Untersuchung bietet aber eine besondere Schwierigkeit weil die Absorption des Andalusits anscheinend auf einem Bestandteil beruht, der in sehr wechselnder Menge auftritt, so daß verschiedene Kristalle und selbst Teile desselben Kristalles sich sehr verschieden verhalten.

Nach dem Vorschlage des Herrn Prof. W. Voigt habe ich die vollständigen Absorptionskurven des Andalusits im sichtbarem Spektrum an einem einzigen Präparat, das in seinem Besitz ist, untersucht. Dieses Präparat stellt ein Parallelepipedon dar, mit den Kanten, welche folgende Richtungen und Dimensionen haben:

Die längste Kante a, parallel der 2ten Mittellinie;

Länge $d_a = 3{,}602$ mm.

Die mittlere Kante b, senkrecht zur Ebene der optischen Achsen;

Länge $d_b = 2{,}801$ mm.

Die kurze Kante c, parallel der 1ten Mittellinie;

Länge $d_c = 2{,}322$ mm.

Bei senkrechter Inzidenz des Lichtes auf die Seitenflächen dieses Parallelepipedons handelt es sich nur um drei Schwingungsrichtungen des Lichtes im Kristall, nämlich um die Schwingungen, die

parallel den Symmetrieaxen a, b, c des Kristalls erfolgen. Wir wollen die Intensitäten der entsprechenden durchgegangenen Wellen durch J_a, J_b, J_c bezeichnen.

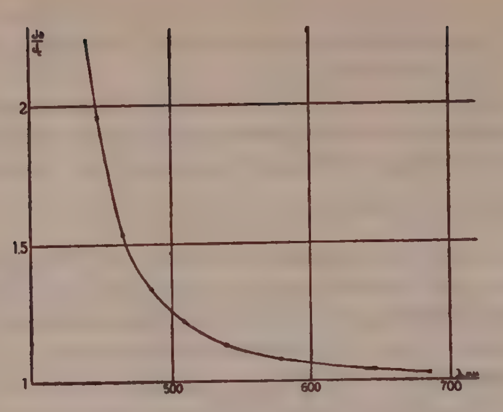
Ich untersuchte zuerst die relative Absorption dieser drei Wellen, indem ich die Lichtstrahlen senkrecht zur einen der Flächen durch das Andalusitparallelepipedons gehen ließ. Dabei bestimmte sich je eines der Verhältnisse: $\frac{J_a}{J_c}, \frac{J_a}{J_b}, \frac{J_c}{J_b}$.

Zu den Absorptionsmessungen diente das Königsche Spektrophotometer. Der Kristall stand auf einem kleinen Tischchen, das vor der Eintrittsöffnung der Beleuchtungsvorrichtung des Photometers befestigt wurde und sich um die horizontale Achse drehen ließ. Die Dimensionen der Öffnung betrugen 2×2 mm², was sich für die Beleuchtung des Feldes genügend erwies. Als Lichtquelle diente eine Nernstlampe mit horizontalem Faden, deren Licht auf die Öffnung des Apparates konzentriert wurde.

Die richtige Einstellung des Kristalls, bei der seine Polarisationsrichtungen denen des Photometers parallel waren, erzielte ich mit Hilfe eines auf das Photometer justierten Nicols, den ich vor den Kristall stellte und nach der Einstellung fortnahm. Jede Messung wurde bei zwei Einstellungen des Kristalls ausgeführt, zwischen denen derselbe 90^0 um den durchgehenden Strahl als um die Axe gedreht wurde; die endlichen Werte stellen das arithmetische Mittel der beiden Messungen dar.

Die Messungen des ersten der genannten Verhältnisse (J_a/J_c) zeigten, daß die Lichtschwingungen, parallel der längsten und kürzesten Kante des Parallelepipedons ziemlich schwach und bei den größeren Wellenlängen fast gleich absorbiert sind. Fig. 1 zeigt den Gang ihrer relativen Absorption mit den wachsenden Wellenlängen.

Was die zwei anderen Verhältnisse (J_a/J_b und J_c/J_b) betrifft, so ergab sich, daß dieselben im Violett und Blau ungemein groß sind; die eine Hälfte des Gesichtsfeldes im Photometer war ganz dunkel und die Ausgleichung des Feldes erreichte man nur bei voller Dunkelheit. Die Messungen schienen hier nach der direkten Methode ganz unmöglich zu sein. Darum habe ich nach dem Vorschlage des Herrn Prof. W. Voigt eine andere indirekte Methode angewandt, deren Gedanke war, bei schiefer Inzidenz des Lichtes eine solche Stellung des Kristalls zu finden, bei welcher die Absorption der beiden Wellen den Messungen zugänglich wäre. Die Formeln der Kristalloptik gestatten dann zu der Absorption der Hauptschwingungen überzugehen.



Figur 1.

Vorversuche zeigten, daß man eine solche Stellung erreichen konnte bei dem Einfallen des Lichtes auf die Seite *ac* des Andalusitparallelepipedons; bei dem Einfallen des Lichts auf die Flächen *ab* und *bc* war die Absorption immer zu groß.

Um eine wohl bestimmte schiefe Inzidenz zu bekommen, wurde der Kristall zwischen zwei gleichen Glasprismen eingekittet, so daß die Lichtstrahlen beim Durchgange des ganzen Systems nur eine parallele Verschiebung erlitten. Der Brechungswinkel der benutzten kleinen Prismen betrug 29° 52′ (die vorhergehende Rechnung hatte überzeugt, daß diese Größe schon genügend war), der Brechungsindex des Glases war für verschiedene Wellenlängen ausgemessen.

Die ganze Versuchsanordnung zeigt Fig. 2. Das Licht von der Quelle *Q* (Nernstlampe) wurde zunächst auf die kleine Öffnung *o* in einem schwarzen Schirm konzentriert, sodann auf die



Figur 2.

kleine Fläche des Kristalls *k*, der zwischen zwei Glasprismen *G* eingekittet ist, und schließlich auf den Spalt des Photometers. Jedes fremde Licht wurde mit einem schwarzen Papierschirm sorgfältig beseitigt.

Das benutzte Lichtbündel war so schmal, daß seine Konvergenz innerhalb des Kristalles ignoriert werden konnte.

Um den Kristall richtig zum Photometer zu orientieren, wurde

hinter die Öffnung o ein Kalkspathrhomboeder P gebracht, welches um den Strahl als Axe drehbar war; gegenüber dem zuvor benutzten Nicol hat dasselbe den Vorteil, das durchgehende Strahlenbündel nicht parallel zu verschieben.

Die Glasprismen G wurden auf einem drehbaren Tischchen befestigt. Die vordere Fläche G stand immer senkrecht zu dem einfallenden Lichtbündel. Man konnte das ganze System G um 90^0 um die Axe des einfallenden Bündels drehen und so die Messungen, wie früher, bei zwei Lagen des Kristalls ausführen.

In dem auf Fig. 2 gezeichnetem Falle liegt der mittlere Strahl des einfallenden schmalen Bündels in dem Schnitte ab des Kristalls. Wir haben hier demgemäß eine Lichtschwingung parallel der c-Axe, die andere in der ab-Ebene, senkrecht zu der Richtung des Strahles, die man nach den Formeln der Brechung findet. Drehen wir den Kristall zwischen den Prismen um 90^0 so, daß das Licht wieder durch dieselbe Fläche in den Kristall eintritt, dann haben wir den Durchschnitt cb, eine Schwingung parallel der a-Axe, die andere in der cb-Ebene. Wir bekommen so zwei verschiedene Fälle, wobei das Licht durch die Seite ac in den Kristall eintritt und die eine Absorption nicht zu groß, aber doch viel größer als bei dem senkrechten Inzidenz sich ergibt.

Bei der ersten der genannten Lagen des Kristalls haben wir für die Absorptionskoeffizienten der beiden Wellen:

$$\varkappa_1 = \varkappa_c, \quad \varkappa_2 = \frac{\varkappa_b N_b^2 \sin^2\psi + \varkappa_a N_a^2 \cos^2\psi}{N_b^2 \sin^2\psi + N_a^2 \cos^2\psi} = \frac{k_1 \varkappa_b + k_2 \varkappa_a}{k_1 + k_2}\ {}^{1)},$$

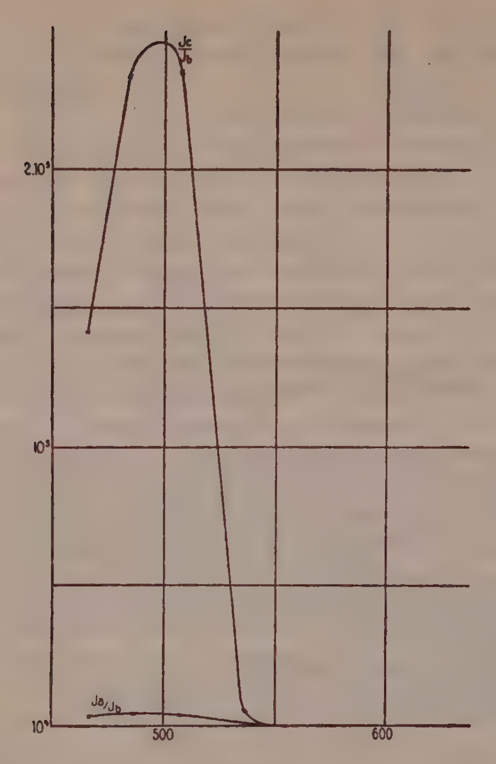
wo $\varkappa_a, \varkappa_b, \varkappa_c$ die drei Hauptabsorptionskoeffizienten, N_a, N_b, N_c entsprechende Brechungsindizes der Wellennormale bedeuten; ψ ist der Brechungswinkel der zweiten Welle im Kristall, welchen man nach den allgemeinen Formeln berechnet.

Im zweiten Falle haben wir:

$$\varkappa_1' = \varkappa_a, \quad \varkappa_2' = \frac{\varkappa_b N_b^2 \sin^2\psi' + \varkappa_c N_c^2 \cos^2\psi'}{N_b^2 \sin^2\psi' + N_c^2 \cos^2\psi'} = \frac{l_1 \varkappa_b + l_2 \varkappa_c}{l_1 + l_2}.$$

Nun gibt uns die photometrische Messung $\lg_n \frac{J_2}{J_c}$ bezw. $\lg_n \frac{J_2'}{J_a}$, d. h. $(\varkappa_c - \varkappa_2)\frac{d_b}{\cos\psi}$ und $(\varkappa_a - \varkappa_2')\frac{d_b}{\cos\psi'}$, da das Licht die Dicke $\frac{d_b}{\cos\psi}$ im Kristall durchsetzt. Man darf dabei die sehr geringe

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik, 2. Aufl., S. 352, Formel (41); hier ist $a'^2 = 2\varkappa_a a^2 = 2\varkappa_a N_a^2 v^2$ u. s. w.



Figur 3.

Doppelbrechung, die eigentlich ψ für beide Wellen verschieden macht, vernachlässigen. Wir gewinnen also zwei Gleichungen:

$$k_1 \varkappa_b + k_2 \varkappa_a - (k_1 + k_2) \varkappa_c = \frac{(k_1 + k_2) \cos \psi}{d_b} \lg_n \frac{J_c}{J_2} = A;$$

$$l_1 \varkappa_b + l_2 \varkappa_c - (l_1 + l_2) \varkappa_a = \frac{(l_1 + l_2) \cos \psi'}{d_b} \lg_n \frac{J_a}{J_2'} = B.$$

Die früher ausgeführten Beobachtungen geben uns außerdem

$$\varkappa_c - \varkappa_a = \frac{1}{d_b} \lg_n \frac{J_a}{J_c} = C.$$

Diese drei Gleichungen liefern:

$$\varkappa_b - \varkappa_c = \frac{A - k_2 C}{k_1},$$

$$\varkappa_b - \varkappa_a = \frac{B + l_2 C}{l_1},$$

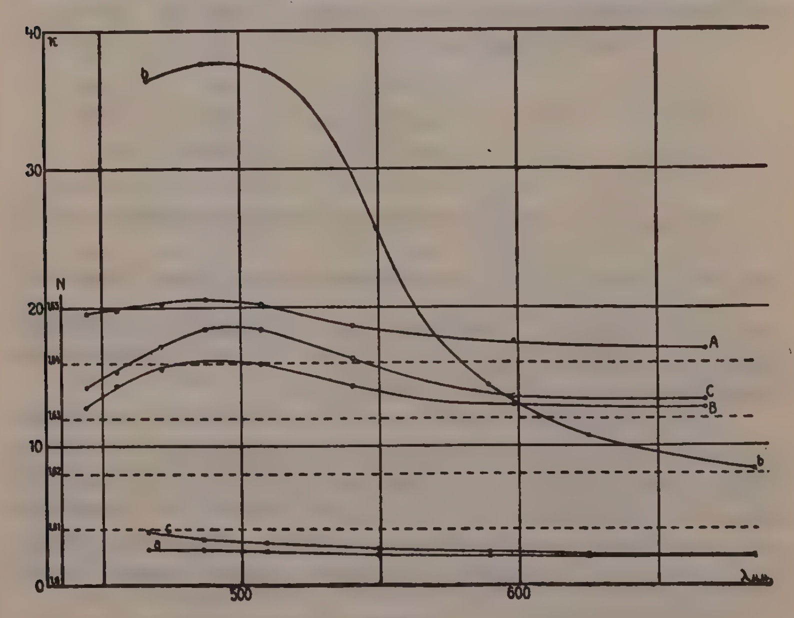
d. h. die natürlichen Logarithmen (durch die Dicke dividiert) der gesuchten Verhältnisse.

Die Brechungsindizes N_a, N_b, N_c des Andalusits waren mit Hilfe des Fueßschen Totalrefraktometers für verschiedene Wellenlängen gemessen; es ergab sich:

Tabelle I.

λ	N_a	N_b	N_c
667,5	1,6429	1,6375	1,632
567,6	1,6435	1,6376	1,6325
530	1,6469	1,6414	1,6354
506	1,6504	1,6457	1,6397
487	1,6514	1,646	1,6398
471	1,6509	1,6431	1,6393
455,5	1,649	1,6438	1,6365
444	1,6487	1,6436	1,634

Die entsprechenden Dispersionskurven sind auf Fig. 4 (A, B, C) gegeben. Es ergibt sich, daß alle drei Wellen merkliche anomale Dispersion im Violett besitzen; dies beruht wahrscheinlich auf



Figur 4.

breiten Absorptionsstreifen für alle drei Wellen im nächsten ultravioletten Teile des Spektrums.

Die Richtigkeit der in oben gezeigter Weise aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate läßt sich dadurch verifizieren, daß gelten muß:

$$\frac{B + l_2 C}{l_1} - \frac{A - k_2 C}{k_1} - C = \Delta = 0.$$

Die entsprechenden Zahlen gibt Tabelle II. Die beschriebene Methode wurde nur im Gebiete starker Absorption angewandt, für gelbe und rote Strahlen gab die direkte Messung schon eine genügende Übereinstimmung. Für die ersten vier Wellenlängen sind $(\varkappa_b - \varkappa_a)$ und $(\varkappa_b - \varkappa_c)$ aus den letzten Formeln S. 5 berechnet, für die längeren Wellenlängen sind sie nach den Logarithmen der direkt gemessenen Verhältnisse gefunden.

Tabelle II.

$\lambda_{\mu\mu}$	A	B	C	$\varkappa_b - \varkappa_a$ [1]	$\varkappa_b - \varkappa_c$ [1]	Δ
466	2,311	2,998	0,14	3,44	3,29	0,010
486	2,654	3,148	0,103	3,53	3,43	— 0,003
509	2,697	3,028	0,072	3,53	3,447	0,011
539	1,609	1,995	0,06	2,38	2,31	0,010
579			0,032	1,26	1,22	0,008
625			0,01	0,91	0,903	0,003
685			0,004	0,774	0,770	0

Die nach der erklärten Methode erhaltenen Größen von $\frac{J_a}{J_b}$ und $\frac{J_c}{J_b}$ (den Dicken d_c und d_a entsprechend) sind durch Tabelle III und Fig. 3 gegeben. Man sieht, daß die Absorption der einen Welle bei dem Durchgange des Lichtes in der Richtung a des Parallelepipedons praktisch vollständig war.

Um die absolute Absorption der drei Wellen a, b, c zu bestimmen, wurden die Messungen nach der allgemein gebräuchlichen Methode durchgeführt. Ich stellte den Kristall vor der einen und dann (um 90° gedreht) vor der anderen Spalte des Photometers auf; der Kristall befand sich in einem kleinen Metallringe eingefaßt, welchen man um seine Axe drehen konnte; dadurch konnte

1) Für 1 mm Länge.

Tabelle III.

$\lambda_{\mu\mu}$	J_c/J_b	J_a/J_b
466	141 500	3640
486	235 300	3904
509	235 300	3290
539	5324	221,4
579	156	28,5
625	28	11
685	16,4	6,1

man jedesmal die Axen des Kristalls parallel den beiden Polarisationsebenen im Photometer einstellen. Auf diese Weise ließ sich die absolute Absorption der Wellen *a* und *c* bei dem Durchgange durch die Dicken d_c und d_a entsprechend messen. Die Resultate gaben eine genügende Übereinstimmung mit der Kurve Fig. 1 (nach der Relation $\dfrac{\lg \frac{J}{J_a}}{d_c} - \dfrac{\lg \frac{J}{J_c}}{d_a^!} - \dfrac{\lg \frac{J_c}{J_a}}{d_b} = \delta = 0$).

In der Tabelle IV sind unter 1, 2, 3 die Logarithmen der Zahlen der drei ersten Kolumnen (durch die entsprechenden Dicken dividiert) gegeben, δ ist die oben genannte Differenz.

Tabelle IV.

$\lambda_{\mu\mu}$	J/J_c	J/J_a	J_a/J_c	1	2	3	δ
466	4,003	1,765	1,504	0,105	0,167	0,063	0,001
486	3,28	1,75	1,337	0,103	0,143	0,045	0,005
509	2,954	1,746	1,223	0,102	0,130	0,031	0,003
539	2,653	1,73	1,133	0,101	0,119	0,019	0,001
579	2,427	1,68	1,098	0,096	0,108	0,014	0,002
625	2,163	1,61	1,046	0,088	0,093	0,006	0,001
685	2,161	1,60	1,014	0,087	0,091	0,002	0,002

Fig. 5 zeigt die gefundene absolute Absorption der Wellen *a* und *c*. Die entsprechende Kurve für die Welle *b* muß ähnlich der Kurve $\dfrac{J_c}{J_b}$ (Fig. 3) aussehen.

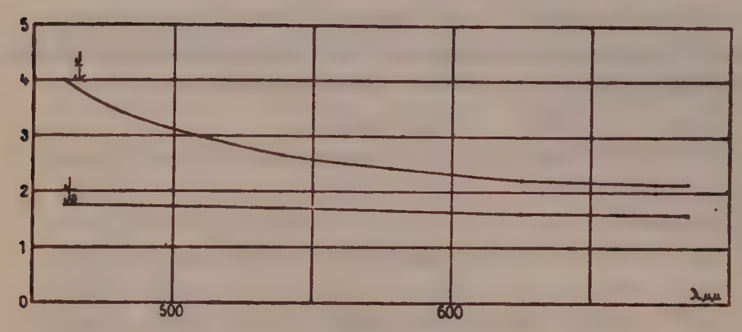
Die Messungen der absoluten Absorption gaben die Möglichkeit die logarithmischen Dekremente $\varkappa$ für alle drei Wellen zu

bestimmen. Für die Wellen *a*, *c* berechnet man dieselbe aus den letzten Kurven (Fig. 4) als $\varkappa_a = \frac{\lg_n \frac{J}{J_a}}{d_c}$ und $\varkappa_c = \frac{\lg_n \frac{J}{J_c}}{d_a}$. Die früher gefundenen Differenzen geben dann den Wert $\varkappa_b$.

Die Werte von $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$ (für 1 cm Länge) sind in Tabelle V und außerdem durch die Kurven *a*, *b*, *c* in Fig. 4 gegeben.

Tabelle V.

$\lambda_{\mu\mu}$	$\varkappa_a$	$\varkappa_b$	$\varkappa_c$
466	2,49	36,4	3,83
486	2,42	37,6	3,30
509	2,33	37,2	3,04
539	2,30	25,8	2,60
589	2,15	16,4	2,40
625	2,14	10,8	2,20
685	2,00	8,4	2,14



Figur 5.

Man sieht, daß für die Welle *b* die relative Lage der Maxima der Absorption und der Brechung der gewöhnlichen Theorie nicht ganz entspricht; vielleicht liegt die Ursache in der großen Breite des entsprechenden Absorptionsgebietes und in der Einwirkung ultravioletter Absorptionen.

Göttingen, im Februar 1912.

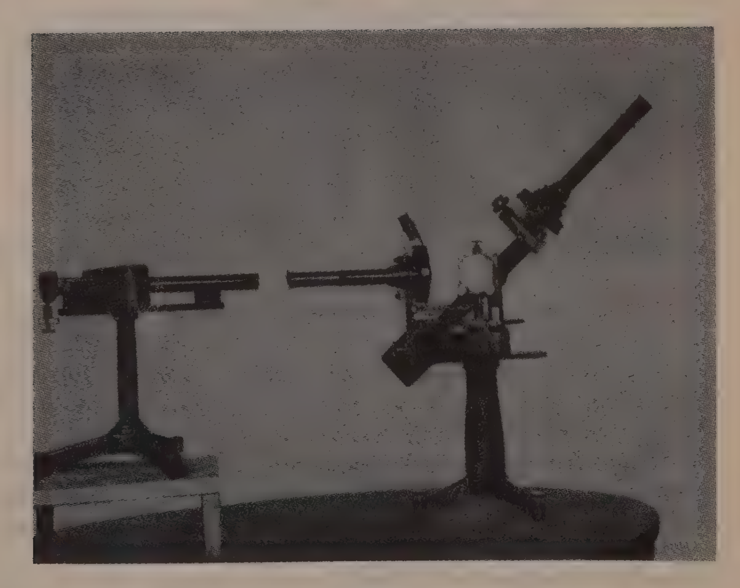
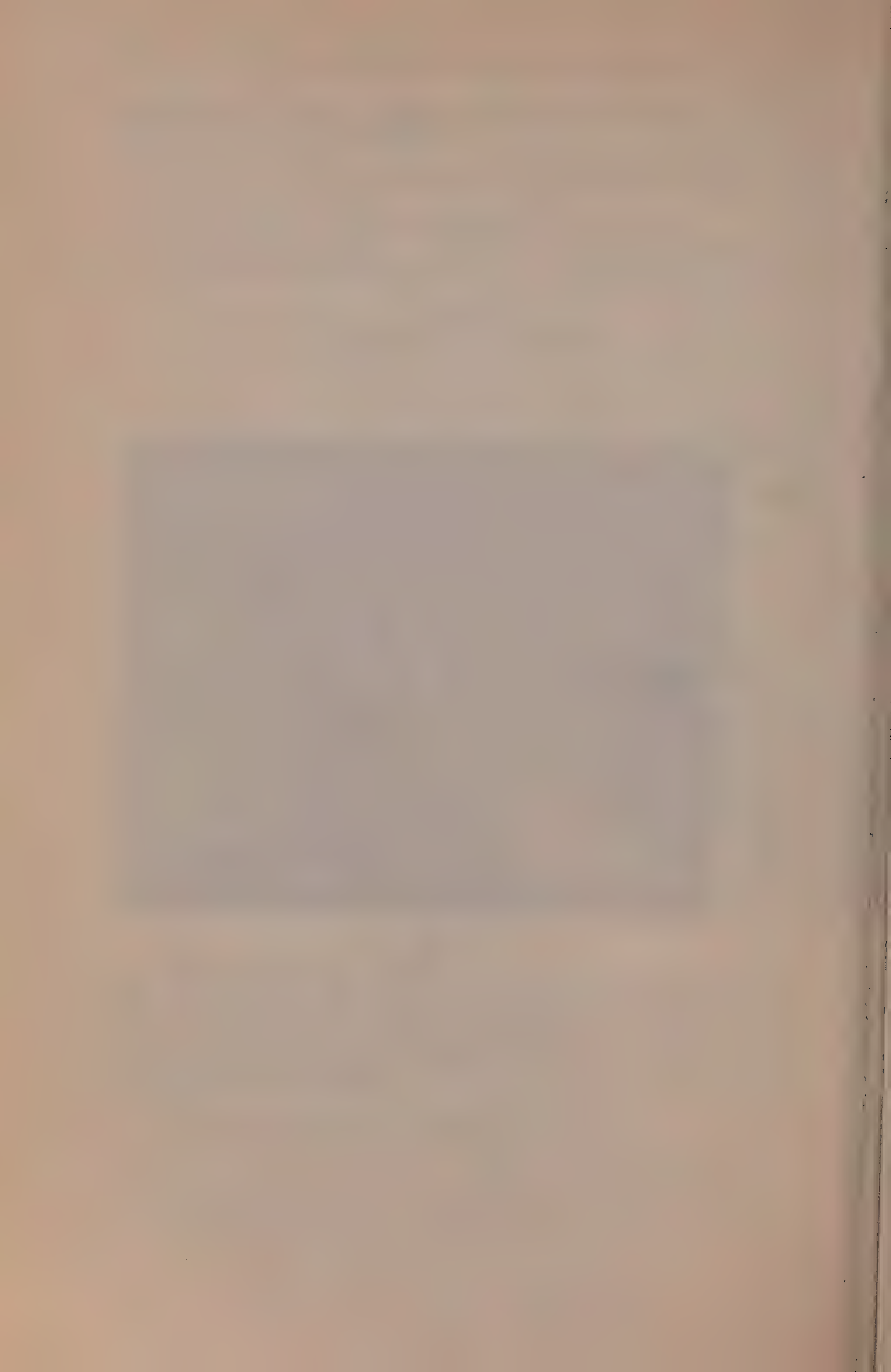


Fig. 5.



Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß.

Gesammelt von **F. Klein** und **M. Brendel.**

II. C. F. GAUSS: Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1797—1799.

Herausgegeben und erläutert von

L. Schlesinger in Gießen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Oktober 1911 durch Herrn F. Klein.

Die weiter unten (erster Abschnitt) abgedruckten Aufzeichnungen von Gauß sind zum größten Teile noch nicht veröffentlicht. Sie stammen aus den Durchschußblättern des „Leiste" und aus der Scheda Ac (begonnen Nov. 1799)[1]), also aus der frühesten Periode von Gauß' Schaffen und erscheinen gerade dadurch besonders wertvoll, daß sie Einblick gewähren in die Entwicklung von Gauß' Gedankengang. Ich gebe diese Fragmente in der Reihenfolge der Blätter, auf denen sie sich aufgezeichnet finden[2]), ganz getreu

1) Gauß hatte sich (vgl. Klein, Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin 1901, S. 1—44, Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1818, wieder abgedruckt Mathem. Annalen, Bd. 57, S. 1—26) ein Exemplar von Leiste: Die Arithmetik und Algebra (Wolfenbüttel 1790) mit Schreibpapier durchschießen lassen und auf die Durchschußblätter Notizen wissenschaftlichen Inhalts gemacht. Die Scheda Ac ist ein Oktavheftchen, aus dem schon in Bd. III der Gauß'schen Werke zahlreiche Auszüge abgedruckt worden sind.

2) Diese Reihenfolge stimmt, wie wir gleich vorweg bemerken wollen, bei den in Leiste enthaltenen Aufzeichnungen nicht mit der chronologischen Folge der Eintragung überein. Dies geht einmal aus dem Inhalt der Notizen, das anderemal daraus hervor, daß diese Notizen zum Teil zwischen Aufzeichnungen anderen Inhalts mit ersichtlich späterer Schrift und Tinte eingeschrieben sind.

nach den Originalen wieder. Meine Erläuterungen bestehen zunächst (zweiter Abschnitt) in der Verifikation und Erklärung der Gauß'schen Aufzeichnungen. Es folgt (dritter Abschnitt) eine Erörterung über ihre mutmaßliche Entstehungszeit, dagegen bleibt ihre historisch-biographische Verwertung einer anderen Publikation vorbehalten. Im ersten Abschnitt bezeichnen die Angaben links oben die Seiten der Originalhandschrift, die in eckigen Klammern befindlichen Zahlen dienen zu Verweisen in den Erläuterungen.

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und dem Direktor der Sternwarte Herrn J. Hartmann zu Göttingen spreche ich meinen Dank dafür aus, daß sie mir die in Rede stehenden und noch einige andere Handschriften des Gaußarchivs zur Benutzung auf der hiesigen Universitätsbibliothek zur Verfügung gestellt haben; nicht minder gilt mein Dank den Herren Brendel, Klein, Krazer und Stäckel, deren eingehende Kritik mir namentlich für den dritten Abschnitt von großem Nutzen war.

Erster Abschnitt. Liste von Gauß' Aufzeichnungen.

(Leiste, S. 25):

[1] $$1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4-\text{etc.}$$

[2] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{9}{64}B^5\cdots = 4z+8z^5$$

[3] $$B = 4z-16z^3-376z^5$$

[4] $$\text{Periph.} = 1-4z^2+20z^4+800z^6$$

(Leiste, S. 26):

Peripheria Ellipseos

[5] $$= 1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4 \text{ etc.}$$

[6] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}B^5\cdots\cdot = (2z^{\frac{1}{2}}+2z^{\frac{9}{2}}+\cdots)^2 = rr$$

(Leiste, S. 37):

[7] $$\int\frac{\frac{bb}{a}+\left(\frac{aa-bb}{a}\right)ss}{\sqrt{\left(aa-\frac{aa-bb}{aa}ss\right)}}$$

[8] $$\mathfrak{M}\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}\,\mathfrak{M}\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}$$

[9] $$\mathfrak{M}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^4 + \frac{41}{2048}x^6$$

[10] $$\mathfrak{M}\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\,\mathfrak{M}x$$

Peripheria Ellipsis cuius axes a, b est

[11] $$\pi\frac{bb}{a}\left|K\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right|\left(1+\frac{aa-bb}{bb}\,\mathfrak{M}\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right)$$

[12] $$= \pi\frac{bb}{a}\,\frac{1+N\sqrt{\frac{aa-bb}{bb}}}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \frac{b}{a}}$$

[13] $$N\nu = \nu\nu\,\mathfrak{M}\nu = \frac{1}{2}\nu\nu + \nu\cdot N\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}$$

(Leiste, S. 48):

[14] $$q = \frac{\pi}{2}a\left(1 - \frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right) - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\ldots\right)$$

[15] $$\frac{aa}{M(a,b)} = a\left(1 + \frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right) + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\ldots\right)$$

(Leiste, S. 49):

[16] $$K\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = (1+x)\,Kx$$

[17] $$K\sqrt{(1-xx)} = Hx \qquad \frac{1-x}{1+x} = y$$

[18] $$K\frac{1-x}{1+x} = H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} \qquad \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1+y} = \sqrt{(1-xx)}$$

[19] $$H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1+x}{2}Hx \qquad Hx = \frac{2}{1+x}H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

[20] $$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = {}'x$$

[21] $$\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{1+\sqrt{(1-xx)}} = x'$$

[22] $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x'+\frac{1}{8}x'x''+\text{etc} = \mathbf{M}x$$

(Leiste, S. 54):

Bestimmung der zwei ersten Coefficienten des Ausdrucks

[23] $$\frac{1}{\sqrt{(1+\sin\varphi^2)}} = a+b\cos 2\varphi - c\cos 4\varphi - d\cos 6\varphi \cdots\cdot$$

[24] $$a = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{4.3}{1.2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3}+\cdots$$

[25] $$= 1-\frac{1.1}{2.2}+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}-\cdots \text{ etc.}$$

[26] $$= \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}(0\cdots\cdot 1)\times\frac{2}{\pi} = \frac{2A}{\pi} = 0{,}83462$$

[27] $$b = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\,\frac{3.3}{2.6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3.3}{2.6}\cdot\frac{5.5}{4.8}+\text{etc.}$$

[28] $$= 2a-\frac{2}{A}$$

(Leiste, S. 83):

[29] $$L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1+\nu}{2}\nu L\nu+\frac{\nu+1}{2}K\nu \qquad \frac{L}{K} = \mathbf{M}$$

[30] $$\mathbf{M}\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\mathbf{M}\nu$$

[31] 1) $$\frac{2}{1+\nu}\left(K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu}-L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu}\right) = K\nu-\nu L\nu$$

(Verif.)

[32] 2) $$K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = (1+\nu)K\nu$$

(Leiste, S. 88):

[33] $$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\nu\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\nu^4+\text{etc.} = K$$

[34] $$\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^3+\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^5+\text{etc.} = \mathrm{L}$$

[35] $$Kv = \frac{1}{M\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1}{\overline{1+v}\, M\dfrac{1-v}{1+v}}$$

[36] $$\frac{\partial K}{\partial v} = v\frac{d\mathrm{L}}{dv},\ \frac{v\partial v K}{\partial v} = \frac{\partial v \mathrm{L}}{\partial v};$$

[37] $$K' = v\mathrm{L}',\ vK + vvK' = \mathrm{L} + v\mathrm{L}'$$

[38] $$K + \left(v - \frac{1}{v}\right)K' = L$$

[39] $$(1+v)\,Kv = K\frac{2\sqrt{v}}{1+v}$$

[40] $$(1+v)\,K'v + Kv = K'\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\Big] \times \frac{1-v}{(1+v)^2 v^{\frac{1}{2}}}$$

(Leiste, Rückseite des Titelblatts):

41] $$\Pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} \cdots\right)$$

[und darunter als Ergebnis einer langen Zahlenrechnung]

0,834626841674030

(Scheda Ac, S. 9):

[42] $$\frac{1}{\sqrt{(1-cz)}} = A + A'c + A''c2 + A'''c3 + \text{etc.}$$

[43]
$$\left\{\begin{array}{l}
A = 1 + \dfrac{1.3}{4.4}zz + \dfrac{1.3.5.7}{4.4.8.8}z^4 + \dfrac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}z^6 \text{ etc.} \\
A' = 2z\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1.3.5}{4.4.8}zz + \dfrac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12}z^4 + \dfrac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16}z^6 \text{ etc.}\right) \\
A'' = 2zz\left(\dfrac{1.3}{4.8} + \dfrac{1.3.5.7}{4.4.8.12}zz + \dfrac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}z^4 + \text{etc.}\right) \\
A''' = 2z^3\left(\dfrac{1.3.5}{4.8.12} + \dfrac{1.3.5.7.9}{4.4.8.12.16}zz + \dfrac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.16.20}z^4 \text{ etc.}\right) \\
\qquad \text{etc.} \\
2zA + 4A' + 3zA = 0 \\
3zA' - 8A'' + 5zA''' = 0 \\
5zA'' - 12A''' - 7zA^{\mathrm{IV}} = 0 \\
\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

$$\frac{A'}{A} = \cfrac{2z}{4 - \cfrac{9zz}{8 - \cfrac{25zz}{12 - \cfrac{49zz}{16 - \text{etc.}}}}}$$

[44] Terminus constans duarum expressiorum

$$(4+4z+z^2\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(4+(8z+4zz)\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

idem est et quidem $\dfrac{1}{2 \text{ Term. med. Ar. G. inter } 1 \text{ et } 1+z}$

(Scheda Ac, S. 10):

[45] Medium arithmetico-geometricum inter 1 et x per huius modi formulam exhiberi potest, apprime utilem quoties x est numerus satis magnus

$$Mx = \frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\gamma x^{-5}-\text{etc.})}{\log(4x-ax^{-1}-bx^{-3}-cx^{-5}-\text{etc.})}$$

[46] Hic factor constans $C = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57079632\cdots$

$\alpha = \frac{1}{4}$; $\beta = \frac{5}{64}$; $\gamma = \frac{11}{256}$; $\delta = \frac{469}{36384}$; $\varepsilon = \frac{1379}{2^{16}}\cdots\cdot$

$a = 1$; $b = \frac{9}{32}$; $c = \frac{19}{128}$; $d = \frac{4769}{49152}$;

[47] Denominator $= \log 4x - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{13}{128}x^{-4} - \frac{23}{384}x^{-6} - \frac{2701}{2^{16}}x^{-8}$

[48] Obs. Numerator, omisso factore C, pro $x=2$ fit $= M3 = 1{,}863617$

[49] Posito denominatore $= \log z$ erit

[50]
$$x = \frac{1}{4}z + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - 2z^{-5} - \frac{1}{4}z^{-7} - 3z^{-9} - \frac{1}{2}z^{-11} + 6z^{-13} +$$
$$\frac{3}{4}z^{-15} - 22z^{-17} - 3\tfrac{1}{2}z^{-19} + 64z^{-21} = \frac{1}{\frac{4}{z}-\frac{16}{z^3}-\frac{56}{z^5}-\frac{160}{z^7}}$$

[51] Posito numeratore $= Cy$ erit

$$x = y + \frac{1}{4}y^{-1} + \frac{1}{64}y^{-3} - \frac{1}{256}y^{-5} - \frac{23}{16384}y^{-7}$$

Denominator fit pro $x = 1+t$

$$= -\frac{A}{\log\frac{1}{8}t - \frac{1}{16}tt + \frac{5}{128}t^3 - \frac{7}{256}t^4 + \frac{337}{16384}t^5}$$

$$A \text{ proxime} = 4{,}9348 = \frac{1}{2}\pi\pi$$

(Scheda Ac, S. 11):

[52] Posito numeratore $= \dfrac{C}{Q}$

erit

[53] $$Q = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^{-7} + \text{etc.}$$

[54] $Q =$ Pars ipsius $(xx - \cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ quae a φ est libera

[55]
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \times \text{valor integralis}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-rr}{xx-rr}}\,dr \qquad \int\frac{dr}{\sqrt{(1-rr)(xx-rr)}}$$

ab $r = 0$ usque ad $r = 1$
spectando x tamquam constans

Ponendo $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = q$

erit numerator $=$

$$-A : \log(q + 2q^5 + 15q^9 + 150q^{13}$$

$$= -A : \log\varphi(q)$$

Coefficientes seriei deducuntur ex aequatione

$$\left(\varphi\sqrt{\frac{q}{1+4q^2}}\right)^2 = \varphi q$$

[56] $$M\sqrt{(1-kk)} = \frac{k \text{ Numerator pro } \frac{1}{k}}{C}$$ demonstr. GALEN

[57] Observ. $\dfrac{M\sin 75^0}{M\sin 15^0} = \sqrt{3}$

[58]
$$\begin{cases} 1 - 4 + 32 - 176 \\ \qquad -12 + 192 \\ \qquad\qquad -80 \end{cases} \qquad 1 - 4zz + 20z^4 - 64z^6 \cdots = \text{Periph. Ellips.}$$

(Scheda Ac, S. 12):

[59] $\begin{cases} \text{Posito termino constante expressionis } (1+\mu\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} = A \\ \text{erit } \; M\sqrt{(1+\mu)} = \dfrac{1}{A} \end{cases}$

[60] $\begin{cases} \text{Terminus constans expressionis } \left(hh - 2\cos\varphi + \dfrac{1}{hh}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{est} = \dfrac{1}{\text{Terminus medius inter } h - \frac{1}{h} \text{ et } h + \frac{1}{h}} \end{cases}$

[61] $\begin{cases} \text{Si} \\ \quad (\mu\mu - \cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ in seriem } A + 2B\cos 2\varphi + \text{etc. evolvi} \\ \text{concipitur atque ponitur } A = F\mu,\; B = G\mu \text{ erit} \end{cases}$

[62] $$\begin{cases} F\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = 2\mu\, F\mu\mu \\ G\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\, G\mu\mu + \frac{1}{\mu}\, F\mu\mu \end{cases}$$

Ponendo

[63] $\dfrac{Gx}{Fx} = Hx$ erit $\qquad x,\ x',\ x''$ etc.

[64] $Hx = \dfrac{1}{2x'} + \dfrac{1}{4x'x''} + \dfrac{1}{8x'x''x'''}\text{etc.} = \dfrac{1}{8}x^{-2} + \dfrac{1}{16}x^{-4} + \dfrac{41}{8024}x^{-6}\text{etc.}$

$$Hxx = 2xx\,H\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1$$

(Scheda Ac, S. 13):

$$x = x$$
$$x' = (x + \sqrt{(xx-1)})^2$$

φ	$M\sin\varphi$
0	0
5	0,4099431

[es folgt eine Tabelle von 5 zu 5 Grad auf 7 und mehr Dezimalstellen, bis]

90	1,0000000

[65]
$$\begin{cases} Me^x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}xx + \frac{5}{96}x^3 + \frac{11}{1024}x^4 \\ e^{-\frac{1}{2}x} Me^x = 1 + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{3072}x^4 + \frac{23}{737280}x^6 + \cdots \\ \qquad = M\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \end{cases}$$

[66] Si statuitur $M \sin\varphi = A - \alpha\cos 2\varphi - \beta\cos 4\varphi - \text{etc.}$

pro $\varphi =$	erit $A - \gamma\cos 2\varphi - \zeta\cos 4\varphi$
0^0	0,6212056
15^0	0,7566142

[Es folgen die Werte von 15 zu 15 Grad bis]

90^0	0,8189303

[67]
$$\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \frac{17}{512}s^5 + \cdots = z$$

[68] 1) $Ps = 1 + 4zz + 4z^4 \; * \; + 4z^8$

[69] $\quad = [2z + 2z^9 + 2z^{25} + \cdots]^2 + [1 + 2z^4 + 2z^{16} + \cdots]^2$

[70] 2) $sPs = 2(2z + 2z^9 + \cdots) \times (1 + 2z^4 + 2z^{16} + \cdots)$

[71]
$$Px = 1 + \frac{1}{4}xx + \frac{1.9}{4.16}x^4 + \text{etc.}$$

[72]
$$Mc = \frac{1}{Ps}$$

[73]
$$Ms = \frac{\pi}{-2Ps \times \log\left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \frac{17}{512}s^5 + \frac{45}{2048}s^7 + \frac{18893}{196608}s^9\right)}$$

[74]
$$\frac{Pc}{Ps} = -\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \text{etc.}\right)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}t^3 + \frac{17}{512}t^5 - \frac{45}{2048}t^7 + \text{etc.}\right)$$

(Scheda Ac, S. 14, 15):

[75] Ponendo $P\cos\varphi = N + a\cos 2\varphi + b\cos 4\varphi + \text{etc.}$

[Es folgt das, was Werke Bd. III, S. 423, Zeile 7 v. u., beginnend mit „erit“, bis Schluß der S. 425 abgedruckt ist].

Zweiter Abschnitt.

Erläuterungen zu den vorstehenden Fragmenten.

1.

Formeln aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Zur Bequemlichkeit für den Leser stelle ich hier vorab die wichtigsten Formeln aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels (agM.) zusammen. Für die Beweise verweise ich auf die von Schering herausgegebenen Teile des Gaußschen Nachlasses (Werke III, S. 361—404, 446—460), ferner auf die Gaußsche Abhandlung „Determinatio attractionis etc." (Werke III, S. 352—360) und auf zwei neuere Darstellungen der gedachten Theorie[1]).

Es seien a, b zwei beliebige Zahlen, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 \neq b^2$.

Wir bilden

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \\ a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dann existiert $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n = M(a,b) = M(a_n, b_n)$ und wird das agM. zwischen a und b genannt. Es ist für ein beliebiges ϱ

$$(2)\qquad M(\varrho a, \varrho b) = \varrho M(a,b)$$

und

$$(3)\qquad \frac{a}{M(a,b)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}, \qquad \varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Setzt man

$$(4)\qquad c = \sqrt{a^2-b^2},\ c_1 = \sqrt{a_1^{\,2}-b_1^{\,2}},\ c_2 = \sqrt{a_2^{\,2}-b_2^{\,2}}, \ldots.$$

so ist

$$(5)\qquad M(a,c) = 2M(a_1,c_1) = 2^2 M(a_2,c_2) = \cdots = 2^n M(a_n,c_n)$$

1) L. Schlesinger, Sitzungsberichte der Königlich Preuß. Akademie der Wissenschaften, 1898, S. 346 ff., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 2 (Leipzig 1898) S. 3—31. — L. v. Dávid, Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn, XXV (1907) S. 153—171.

und

$$(6)\qquad \frac{a}{M(a,c)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2x^2)}},\qquad \varkappa'^2 = 1-\varkappa^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Bildet man mit

$$(7)\qquad y = e^{-\pi\,\frac{M(a,b)}{M(a,c)}}$$

die Reihen

$$(8)\qquad p(y) = 1+2y+2y^{(2^2)}+2y^{(3^2)}+\cdots,$$

$$(9)\qquad q(y) = 1-2y+2y^{(2^2)}-2y^{(3^2)}+\cdots,$$

$$(10)\qquad r(y) = 2y^{\frac{1}{4}}+2y^{\frac{9}{4}}+2y^{\frac{25}{4}}+\cdots,$$

so ist

$$(11)\qquad a = M(a,b)\,p(y)^2,\; b = M(a,b)\,q(y)^2,\; c = M(a,b)\,r(y)^2,$$

$$(12)\qquad a_n = M(a,b)\,p(y^{(2^n)})^2,\; b_n = M(a,b),\; q(y^{(2^n)})^2,\; c_n = M(a,b) r(y^{(2^n)})^2.$$

2.

Die Leisteaufzeichnungen zur Theorie des agM.

Die Formeln [1], [5], [14] geben die bekannte[1]) Reihenentwicklung des Ellipsenquadranten q mit den Halbachsen a, b $(a > b)$ nach Potenzen der Größe

$$B = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}};$$

es ist

1) Man vergl. Euler, Animadversiones in Rectificationem Ellipsis, Opuscula varii argumenti II (1750) [Enestr. 154], wo S. 128 die Reihenentwicklung für den Ellipsenquadranten genau in der von Gauß benutzten Form gegeben wird. Die Übereinstimmung auch in den Bezeichnungen läßt vermuten, daß Gauß jene Abhandlung Eulers gekannt hat; Euler sowohl wie Gauß haben q, statt des Eulerschen n hat Gauß in [1], [2], [3], [5], [6] B, in späteren Formeln [13], [29]—[40] aber ν; den Buchstaben n dürfte Gauß darum vermieden haben, weil er mit n eine ganze Zahl zu bezeichnen pflegte. Auf den ersten Durchschußblättern des Leiste hat sich Gauß (wie es scheint nach der Fußschen Liste) ein Verzeichnis der Werke Eulers angelegt, er hat sich also schon sehr früh lebhaft für Euler interessiert.

$$[1]' \qquad q = a\int_0^1 \frac{(1-B^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-B^2x^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2}a\left\{1-\frac{1.1}{2.2}\cdot\frac{B^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{B^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{B^6}{5}-\cdots\right\}.$$

In den Formeln [1], [5] ist der Faktor $\frac{\pi}{2}a$ unterdrückt. Die Gleichung [15] stellt, wenn man beiderseits den Faktor a wegläßt, die Entwicklung von $\frac{a}{M(a,b)}$ nach Potenzen von B dar. Gauß dürfte diese Entwicklung in derselben Weise gefunden haben, wie er sie Werke III, S. 367, art. 7 herleitet. Es ist nämlich

$$\frac{a}{M(a,b)} = \frac{a}{M(a+c,\ a-c)} = \frac{1}{M(1+B,1-B)} = \frac{1}{M(1,\sqrt{1-B^2})};$$

setzt man nun

$$B = \frac{2t}{1+t^2},$$

so wird

$$M(1+B,1-B) = M(1,\sqrt{1-B^2}) = M\left(1,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+t^2}M(1+t^2,\ 1-t^2).$$

Setzt man ferner in der Funktionalgleichung

$$M\left(1+\frac{2t}{1+t^2},\ 1-\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}\ M(1+t^2,\ 1-t^2)$$

die Entwicklung

$$\frac{1}{M(1+B,\ 1-B)} = 1+\alpha B^2+\beta B^4+\gamma B^6+\cdots$$

mit unbestimmten Koeffizienten ein, so findet man

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16},\ \gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36},\ \cdots$$

Den Zusammenhang zwischen agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung hat Gauß zu der Zeit, wo er jene Formeln in Leiste einschrieb, jedenfalls noch nicht gekannt (s. u.).

Die linken Seiten der Formeln [2], [6] geben also die Entwicklung von

$$\frac{Ba}{M(a, b)} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{M(a, b)} = \frac{c}{M(a, b)}.$$

Die Gleichung [6] entspricht somit der dritten unserer Formeln (11), wenn man daselbst $y = z^2$ setzt. Sie enthält also den Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, bezw. die Quadratzahlen sind[1]).

Die Gleichung [2] enthält auf der rechten Seite nur die zwei ersten Glieder der Reihe r^2, die Gleichung [3] entsteht aus [2] bezw. [6], indem man B ausrechnet; in solchen Operationen mit Reihen, deren Inversion etc. war Gauß schon in sehr früher Zeit wohlgeübt[2]).

Übrigens ist der Koeffizient von z^5 in [3] unrichtig, die Reihe lautet (vergl. Formel [50])

[3]' $$B = 4z - 16z^3 - 56z^5 - 160z^7 - \ldots$$

Gleichung [4] ergibt sich, indem man [3] in [1] einsetzt; demgemäß ist auch in [4] der Koeffizient von z^6 unrichtig; die richtige Reihe steht Formel [58], die kleine Zahlentabelle daselbst zeigt, daß Gauß tatsächlich, als er in der Scheda Ac jene Formel aus Leiste nachrechnete, in [1] die berichtigte Entwicklung [3] eingesetzt hat.

Wenn wir die Bedeutung der Formeln [3], [4] in moderner Ausdrucksweise hervorheben wollen, so werden wir sagen: diese Formeln stellen die Uniformisierung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung als Funktion des Moduls B, mit Hilfe der Modulfunktion dar.

---

1) Solche Reihen betrachtet Gauß auch in der Tagebuchnotiz 58) vom 16. Febr. 1797 (Festschrift S. 20, Mathem. Ann. 57, S. 13); vergl. auch die Bemerkung Scherings, Gauß' Werke III, S. 493, Zeile 4—6, wonach Gauß den Zusammenhang zwischen agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, 1794 gekannt haben soll. Mit dem agM. hat sich Gauß, wie er April 1816 an Schumacher schreibt (Briefw. G.-Schum. I, S. 125), seit 1791 beschäftigt. Die Jahreszahl 1791 ist durch Kollation mit der Originalhandschrift des betreffenden Briefes authentiziert. Wie Gauß in der Anzeige seiner Abhandl. „Determinatio attractionis etc." (Werke III, S. 360) angibt, hat er die Untersuchungen über das agM. unabhängig von den ähnlichen Untersuchungen von Lagrange und Legendre angestellt; vergl. Lagrange „Sur une nouvelle Méthode de calcul intégral", Mémoires de l'Acad. de Turin, t. II. 1784—85 = Oeuvres II, S. 251—312, besonders S. 272 ff., 304 ff.

2) Man vergl. etwa Gauß Tagebuch 49 (Festschrift, S. 18, Mathem. Ann. 57, S. 12) vom 27. Dez. 1796.

3.

Fortsetzung.

Die Bedeutung der in den Formeln [8]—[13], [22], [29], [30] auftretenden Größe **M** ergibt sich am einfachsten wie folgt:

In [35] bedeutet M das agM., und zwar ist

$$M\sqrt{1-\nu^2} = M(1, \sqrt{1-\nu^2})\ ^{1)},$$

es ist also

$$[35]' \qquad K(\nu) = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-\nu^2})}\ ^{2)}.$$

Damit stimmt die Reihenentwicklung [33] (vergl. [2] und [6]), ferner die Funktionalgleichung [16], die in [32] und [39] wiederholt ist. Die Gleichung [38], worin K' die Derivierte von K nach ν bedeutet, kann zur Definition der Größe L dienen. Aus der für K' geltenden Funktionalgleichung [40] folgt dann in Verbindung mit [16] die in [29] angegebene Funktionalgleichung für L; unter derselben Nummer findet man die Definition von **M** als Quotienten von L und K. Es ist also

$$[29]' \qquad \mathbf{M}(\nu) = 1 + \left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) \frac{K'(\nu)}{K(\nu)}.$$

Mit der durch [38] definierten Größe L steht die durch die Reihenentwicklung [34] erklärte Größe **L** in naher Beziehung [3]).

Für **L** zeigt zunächst die Vergleichung von [34] mit der Reihenentwicklung [1]′ für den Ellipsenquadranten q, daß

$$[34]' \qquad -\frac{\pi}{2} a \mathbf{L} = \frac{dq}{d\nu}$$

---

1) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben M und **M** und ebenso (siehe weiter unten) die zwischen L und **L** ist in der Gaußschen Handschrift nicht gemacht.

2) $K(\nu)$ unterscheidet sich also von dem Jacobischen

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2 x^2)}}$$

nur durch den Faktor $\frac{2}{\pi}$.

3) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben **L** und L ist von mir interpoliert (vergl. oben). Wahrscheinlich hat Gauß die Bezeichnung gegen eine „Uraufzeichnung" geändert. So hat z. B. die Gleichung [38] ursprünglich gelautet $\nu K + (\nu^2 - 1) K' = L$ und ist dann durch Korrekturen in die oben wiedergegebene Form gebracht worden.

ist (in [1]' ist $B = \nu$ zu nehmen) [1]). Ferner führt die Vergleichung der Reihenentwicklungen [33], [34] und ihrer Derivierten nach ν zu den Differentialrelationen [36] oder [37]. Die Vergleichung der aus [37] folgenden Gleichung

[38]' $$\mathbf{L} = \nu K + (\nu^2 - 1) K'$$

mit [38] gibt die Beziehung zwischen $\mathbf{L}$ und L,

[34]'' $$L = \frac{1}{\nu}\mathbf{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^2 + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^4 + \cdots,$$

sodaß also (vergl. [34]')

[34]''' $$-\nu a \frac{\pi}{2} L = \frac{dq}{d\nu}$$

ist. — Für das durch [29]' definierte $\mathbf{M}$ verifiziert man sofort die Funktionalgleichung [30] oder [10] ([8] ist einfach die Umkehrung von [10]); aus dieser läßt sich die Entwicklung [22] unmittelbar herleiten. Die Potenzreihenentwicklung [9] [2]) ergibt sich entweder direkt durch Anwendung der Funktionalgleichung [10] oder durch Division von [34]'' mit [33]. Diese doppelte Herleitung von [9] bildet eine erwünschte Verifikation unserer Deutung der Gaußschen Formeln.

Wir bemerken noch, daß sich aus den Differentialrelationen [37] sofort die homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herleiten ließen, denen K und $\mathbf{L}$ als Funktionen von ν genügen. Diese Differentialgleichungen gehören (nach [38]') zu derselben Klasse (im Sinne von Riemann); K und $\mathbf{L}$ sind in der Terminologie von Gauß (Disquisitiones circa seriem etc.) functiones contiguae.

Nun kann die Darstellung [11] bezw. [12] des Ellipsenumfangs durch Vergleichung mit den Reihenentwicklungen [5] oder [14] verifiziert werden. Wir setzen eine Verifikation durch Integralformeln hierher.

Es ist

---

1) Dieselbe Entwicklung für $\frac{dq}{d\nu}$ findet sich auf Seite 129 der oben erwähnten Eulerschen Abhandlung. Euler hat $a = 1$. Die Bedeutung der Beziehung [34]' wird weiter unten (Art. 5) hervortreten.

2) In [9] ist, wahrscheinlich infolge eines Schreibfehlers, der Koeffizient von x^6 unrichtig; er lautet $\frac{41}{16048}$ (vergl. [64]).

(13) $$q = a\int_0^1 \frac{(1-\nu^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}}$$

und (vergl. (3), S. 10 und [35])

(14) $$K = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}}.$$

Daraus folgen in bekannter Weise[1]) die zuerst von Legendre (Exercices de calcul intégral I, S. 61 u. ff.) aufgestellten Relationen (die sogen. Klassenbeziehungen) zwischen den vollständigen Integralen erster und zweiter Gattung:

(15) $$\frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} = \frac{q}{a}\frac{1}{\nu(1-\nu^2)} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu},$$

(16) $$\frac{1}{a}\frac{dq}{d\nu} = \frac{1}{a}\frac{q}{\nu} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu}.$$

Aus (15) ergibt sich

$$q = a\nu(1-\nu^2)\frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} + (1-\nu^2)\frac{\pi}{2}K,$$

und mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{M}$ in [29]':

$$q = \frac{\pi}{2}aK(1-\nu^2\mathfrak{M}).$$

Diese Formel stimmt mit der von Gauß aufgezeichneten Formel [11] überein. Wir haben sie noch einmal verifiziert, weil sich in den Gaußschen Formeln [11] und [12] eine Anzahl von Schreibfehlern befindet, die offenbar daher rühren, daß Gauß in einer „Uraufzeichnung“ a mit b vertauscht hatte (vergl. [7]). Die richtigen Gleichungen lauten für den Quadranten:

[11]' $$q = \frac{\pi}{2}aK\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\left\{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\mathfrak{M}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\right\},$$

[12]' $$q = \frac{\pi}{2}a\,\frac{1-N\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)}{\text{Med. inter 1 et }\frac{b}{a}},$$

wo N durch die Gleichung [13] definiert wird[2]).

1) Vergl. z. B. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen (Leipzig 1878) S. 290.

2) Während uns heute die Beziehung des agM. zum vollständigen Integral

Setzt man in [11]' für M seinen Wert $\mathrm{M} = \frac{L}{K}$ oder, mit Rücksicht auf [34]'',

$$\mathrm{M} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\nu a}\frac{1}{K}\frac{dq}{d\nu}, \quad \nu = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

ein, so erhält man für q den Ausdruck

[11]'' $$q = \frac{\pi}{2}aK(\nu)+\nu\frac{dq}{d\nu},$$

was mit der zweiten der Legendreschen Gleichungen (16) übereinstimmt.

4.

Die auf die lemniskatische Periode bezüglichen Leisteaufzeichnungen.

Die bei S. 54 des Leiste befindliche Aufzeichnung [23]—[28] ist darum besonders bemerkenswert, weil sich aus ihr ein Zusammenhang herstellen läßt, zwischen den im Vorhergehenden besprochenen Untersuchungen von Gauß über das agM. und denen über die lemniskatischen Funktionen, welch' letzteren zahlreiche und wichtige Aufzeichnungen im Leiste gewidmet sind (vergl. die von Herrn Klein in den Anmerkungen zum Tagebuch abgedruckten Auszüge, Festschrift, S. 11 ff., Mathem. Ann. 57, S. 1 ff.). Die Reihe [24] erhält Gauß offenbar, indem er $(1+\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von $\sin^2\varphi$ entwickelt, dann die Potenzen von $\sin^2\varphi$ durch die Kosinus der Vielfachen von φ darstellt und die von φ unabhängigen Glieder beibehält. Die aus [24] durch einfache Reduktion der Glieder entstehende Reihe [25] erinnert sofort an die Reihe [15] oder [33] für

erster Gattung als die am nächsten liegende erscheint, tritt bei den älteren Analysten immer die Beziehung zu dem vollständigen Integral II. Gattung zuerst hervor (Landen, Lagrange). Auch Schumacher hat, als er sich gelegentlich (Briefwechsel Gauß-Schumacher, Bd. I, Altona 1860, Brief vom 5. April 1816, S. 124) mit dem agM. beschäftigt hatte, als erstes Ergebnis die Formel [12]' gefunden. Den Zusammenhang des agM. mit dem Ellipsenquadranten hat Gauß in der „Determinatio attractionis" (1818) (Werke III, S. 354 oben) und in der Anzeige dieser Abhandlung (ebenda, S. 360) nach andern Methoden abgeleitet. Vergl. auch die aus 1800 stammende nachgelassene Abhandlung über das agM. (Werke III, S. 261 ff., besonders S. 373 die Formel für $dM(x, y)$).

$K = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-\nu^2})}$, indem sie für $\nu = \sqrt{-1}$ aus der letzteren hervorgeht. Daß Gauß diesen Zusammenhang nicht aufzeichnet, läßt sich vielleicht daraus erklären, daß er die Schwierigkeit gefühlt haben mag, die beim Einsetzen des auf dem Konvergenzkreise gelegenen Wertes $\nu^2 = -1$ in die Reihe [33] auftritt[1]). Die Identität der Reihenentwicklung [25] für a mit der lemniskatischen Periode [26] hat Gauß jedenfalls aus den Inst. calc. integralis von Euler gekannt (siehe diese I § 336).

Die Aufzeichnung [41] gibt eine Darstellung der lemniskatischen Periode durch den Wert der Reihe [33] für $\nu^2 = \frac{1}{2}$, bei dem also die oben erwähnte Schwierigkeit nicht vorhanden ist[2]). Diese Aufzeichnung rührt jedenfalls aus der Zeit vor 1798 her, da Gauß sich zur Bezeichnung der lemniskatischen Periode noch des Zeichens Π bedient, während er vom Juli 1798 an (in der Scheda Aa) konsequent diese Größe durch $\frac{1}{2}\varpi$ bezeichnet.

Die Vergleichung von [41] mit [33] ergibt ohne weiteres die Gleichung:

$$(*)\qquad \frac{\pi}{2\Pi} = \frac{\pi}{\varpi} = \sqrt{2}\, M\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = M(\sqrt{2}, 1).$$

Nun besagt die Tagebuchnotiz 98) vom 30. Mai 1799: „Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$

---

1) Die Reihe [33] stimmt mit $F(\alpha\, \beta, \gamma, x)$ für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $x = \nu^2$ überein. Da $\gamma - \alpha - \beta = 0 > -1$ ist, so konvergiert sie für jedes von 1 verschiedene x, das auf dem Einheitskreise gelegen ist, und divergiert für $x = 1$. Wir bemerken also hier die ersten Spuren, die zu den Untersuchungen über die Konvergenz von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $|x| = 1$ hinleiten. Die gedachte Schwierigkeit wird durch den sogen. Abelschen Sätz (Oeuvres I, S. 223) gelöst.

2) Bei einer erneuten Durchsicht des Leiste hat Herr Brendel bemerkt, daß die Zahlenrechnung, die zu dem in [41] wiedergegebenen Näherungswert von $\frac{2\Pi}{\pi}$ führt (in [26] steht dieser Wert auf fünf Dezimalstellen) mit Hilfe der Reihe

$$\frac{2\Pi}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\{1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{1.3}{4.4} + \frac{1}{81}\cdot\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} + \cdots\right\}$$

ausgeführt worden ist. Die Herleitung dieser Reihe aus einer Integraldarstellung der lemniskatischen Periode ist auf demselben Blatte des Leiste angedeutet. Die Reihe selbst findet sich in der Tagebuchnotiz 91a) (Festschrift, S. 28, Math. Annalen, 57, S. 20) und (vergl. Art. 5, S. 19) auf S. 7 der Scheda Ac (Werke III, S. 423, art. [15]).

usque ad figuram undecimam comprobavimus; qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur."

Daraus geht hervor, daß Gauß entweder die Gleichung (*) zur Zeit, als er die Aufzeichnung [41] in Leiste eintrug, nicht abgeleitet, oder daß er sich ihrer und überhaupt der Reihe [33] am 30. Mai 1799 nicht erinnert hat. Ich bin geneigt, das letztere anzunehmen; die Gründe für diese Auffassung sollen im III. Abschnitt im Zusammenhang mit der Frage nach der Entstehungszeit der Leistenotizen [1]—[41] dargelegt werden. Wir wenden uns nun zur Erläuterung der Aufzeichnungen, aus der Scheda Ac, die eine neue Epoche in der Entwicklung der funktionentheoretischen Arbeiten von Gauß inaugurieren.

5.

Die Aufzeichnungen in der Scheda Ac.

Die ersten 8 Seiten der Scheda Ac (begonnen November 1799) enthalten Aufzeichnungen über die analytische Geometrie des Raumes und sphärische Trigonometrie. Nur auf S. 7 finden sich zwischen diesen geometrischen Notizen, aber in sorgfältiger Schrift und von Linien eingerahmt, drei Zeilen, mit Reihenentwickelungen für $\frac{\varpi}{\pi}$, von denen die erste und dritte Werke III, S. 423, art. [15] abgedruckt sind. Die erste Entwicklung:

$$\frac{\varpi}{\pi} = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\cdots\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

stimmt mit der in der Aufzeichnung [41] angegebenen Reihe überein. Mit der S. 8 schließen die geometrischen Betrachtungen ab und es folgen auf S. 9 zunächst zwei Reihen für $\frac{\varpi}{\pi}-\frac{\pi}{\varpi}$, von denen die zweite Werke III, S. 423, art. [15] abgedruckt ist. Dann folgt die Aufzeichnung [42], [43], [44]; zu diesen Entwicklungen dürfte Gauß durch Untersuchungen, die der theoretischen Astronomie angehören, veranlaßt worden sein. In [42] bedeutet c den Kosinus eines Winkels, $c2$, $c3$, .. die Kosinus seiner Vielfachen. Bemerkenswert ist die elegante Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Koeffizienten $\frac{A'}{A}$. Dieser Quotient, der auch in der Aufzeichnung [61]—[64] betrachtet wird, steht wie z. B. die Entwicklungen [64] zeigen, in engem Zusammenhang mit der in Leiste vor-

kommenden Funktion **M** (vergl. insbesondere [22] und [9])[1]. Der Zusammenhang dieser Entwicklungskoeffizienten mit dem agM. wird in wenig abweichender Form [59], [60] hervorgehoben. Die Unsicherheit im Operieren mit dem imaginären Argument scheint Gauß damals noch nicht ganz überwunden zu haben.

Während die bisher betrachteten Notizen über das agM. vorwiegend formaler Natur waren, führen die Notizen [45]—[56] in die Tiefen dieser Theorie ein[2]. Auf den Weg, der Gauß zu der wichtigen Quotientendarstellung [45], [46] geführt haben mag, wirft die Gleichung [50] ein helles Licht, wenn man sie mit den Leisteformeln [1]—[6] vergleicht. Wir rekonstruieren diesen Weg wie folgt: Gauß sucht (vergl. [45]) das Verhalten der Funktion $M(1, x)$, die er mit Mx bezeichnet, für ins Unendliche wachsendes x zu erforschen. Dieses Verhalten wird in erster Annäherung durch die Gleichung

$$(**) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} M(1, x) \log 4x = \frac{\pi}{2}$$

gegeben. Diese Gleichung kommt zwar in den hier zu besprechenden Aufzeichnungen nicht explizite vor, sie liegt aber, wie wir sehen werden, der Quotientendarstellung [45] zugrunde und spielt auch in späteren Entwicklungen von Gauß zum agM.[3] eine wichtige Rolle. Über die Art, wie Gauß sie abgeleitet hat, gibt auch jene spätere Entwicklung keinen Aufschluß, vermutlich hat ihm aber dabei die mehrfach erwähnte Eulersche Abhandlung „Animadversiones etc." als Wegweiser gedient. In dieser Abhandlung untersucht nämlich Euler das Verhalten des Ellipsenquadranten q, wenn die große Achse den konstanten Wert 1 behält und die kleine Achse p sich der Null annähert. Zunächst ergibt sich das auch geometrisch evidente Resultat, daß

$$\lim_{p=0} q = 1$$

sein muß; aber der Ansatz

$$q = 1 + A_1 p + A_2 p^2 + \cdots$$

führt auf unendlich große Werte der Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots$.

---

1) Man vergl. auch Gauß Werke III, S. 371, und Gauß-Schumacher Briefwechsel, I, S. 125; ferner die allgemeinen Formeln, Werke III, S. 128, 129, (disqu. circa seriem etc. 1812).

2) Herr Klein hat die Notizen [45], [46], [52]—[55], [59] in einer Anmerkung zu den Tagebuchaufzeichnungen 100)—102) veröffentlicht.

3) Werke, Bd. III, S. 377; 381—382.

Die Betrachtung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der q als Funktion von p genügt (a. a. O. S. 147):

$$p(1-p^2)\frac{d^2q}{dp^2}-(1+p^2)\frac{dq}{dp}+pq=0$$

leitet Euler zu dem Ansatz (a. a. O. S. 155)

$$q=1+Ap^2+Bp^4+\cdots-\left(\frac{1}{2}p^2+\beta p^4+\cdots\right)\log p,$$

für den sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung die Koeffizienten bestimmen lassen, bis auf A, das unbestimmt bleibt, wie es nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen bei diesem Ansatz sein muß. Für dieses A findet Euler zunächst durch numerische Rechnung induktiv den Wert

$$A=\log 2-\frac{1}{4},$$

den er dann durch Vergleichung des Ellipsenbogens mit einem Parabelbogen verifiziert. In der von Borchardt ausgearbeiteten und im Bd. 1 der Werke Jacobis auszugsweise abgedruckten Vorlesung von Jacobi, wird[1]) die Eulersche Methode auf das Integral erster Gattung angewandt. In einer jetzt in meinem Besitz befindlichen Abschrift jener Borchardtschen Ausarbeitung, die von dem abgedruckten Texte nicht unbeträchtlich abweicht, lautet die betreffende Stelle (mit unwesentlicher Abänderung in den Bezeichnungen der Formel) wie folgt:

„Man erhält als Endwert für $\varkappa=0$

{5} $$\lim_{\varkappa=0}\frac{1}{\log\frac{4}{\varkappa}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\varkappa^2)\sin^2\varphi}}=1\,^{2)}.$$

Dieses Resultat hat zuerst Euler gefunden und veröffentlicht in dem Werke Opuscula varii argumenti, welches man häufig auf Auktionen bekommt; es findet sich auch im Legendre [Exercices de calcul intégral I, 1811, § 72 ff.]. Die Schwierigkeit seiner Herleitung bestand nicht in der Form des Resultats, da man schon lange wußte, daß man bei solchen Entwicklungen, welche Potenzen enthalten, auch einen logarithmischen Term beifügen muß; ja man

1) Jacobi, Werke I (1880), S. 522—525.

2) Bei Jacobi lautet diese Gleichung: $K'=\log\frac{4}{\varkappa}$.

konnte in unserem Falle sogar leicht finden, daß der Endwert $= \log \frac{n}{\varkappa}$ war, aber der numerische Wert von n war sehr schwer zu ermitteln, was man bei Legendre nachsehen kann, der zwar den Wert $n = 4$ findet, aber keinen stringenten Beweis dafür gibt."

Wie man sofort erkennt, ist die Gleichung {5} der oben angegebenen Gleichung (**) äquivalent. Gauß kann nun zur Herleitung der letzteren Gleichung verschiedene Wege eingeschlagen haben. Da er die Beziehung zwischen dem agM. und dem Ellipsenquadranten gekannt hat (siehe [11], [12]), so kann er erstens die Gleichung (**) bezw. die Gleichung

$$(***) \qquad \lim_{p=0} M(1, p) \log \frac{4}{p} = \frac{\pi}{2}$$

in folgender Weise direkt aus dem Eulerschen Resultat abgeleitet haben. Nehmen wir $a = 1$, so folgt aus den Formeln [11]' und [35], wenn man $\nu^2 = 1 - p^2$ setzt, die Gleichung

$$\frac{1}{M(1, p)} = K(\nu) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp} + q\right).$$

Nun ist nach Euler (a. a. O. S. 155)

$$q = 1 + \left(\log 2 - \frac{1}{4}\right) p^2 - \frac{1}{2} p^2 \log p + p^4 [\ldots],$$

also

$$\frac{dq}{dp} = (2 \log 2 - 1) p - p \log p + p^3 [\ldots]$$

und

$$\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp} + q = 2 \log 2 - \log p + p^2 [..],$$

woraus die Gleichung (***) ohne weiteres hervorgeht. Daß Gauß diese Herleitung angewandt hat, ist darum sehr wahrscheinlich, weil sie sich an die in Leiste aufgezeichneten Formeln so zu sagen unmittelbar anknüpfen läßt.

Ein zweiter Weg wäre der, daß Gauß das von Euler für den Ellipsenquadranten vorgezeichneten Verfahren auf das agM. bezw. auf die Funktion $K(\nu)$ übertragen hätte; auch dafür standen ihm alle erforderlichen Mittel zur Verfügung, indem er aus den Differentialrelationen [37] nur die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $K(\nu)$ herzuleiten brauchte, um Schritt für Schritt dem Vorgange Eulers folgen zu können.

Man könnte drittens annehmen, daß Gauß (vergl. die oben wiedergegebene Bemerkung Jacobis) nach der Analogie des Eulerschen Resultats erraten hat, daß

$$\lim_{p=0} M(1,p)\log\frac{n}{p}$$

für einen gewissen Wert von n einem endlichen Grenzwert C zustrebt, und daß er dann durch numerische Induktion die Werte von n und C gefunden hat. Diese Auffassung würde durch die Formel [46] gestützt werden, die einen Näherungswert für C enthält.

Jedenfalls können wir sagen, daß alle Indizien dafür sprechen, daß Gauß das Verhalten von $M(1,x)$ für große Werte von x auf einem Wege erforscht hat, der ihm durch die Eulersche Abhandlung „Animadversiones etc." vorgezeichnet war.

6.

Fortsetzung.

Der weitere Fortgang von Gauß' Untersuchungen liegt jetzt klar zu Tage.

Es ist nach der Formel [3] in Leiste

[3]' $$B = 4z - 16z^3 - 56z^5 - \cdots;$$

setzt man hierin

$$B = \frac{1}{x},\quad z = \frac{1}{\mathfrak{z}},$$

so kommt die Formel

[50]' $$x = \cfrac{1}{\frac{4}{\mathfrak{z}} - \frac{16}{\mathfrak{z}^3} - \frac{56}{\mathfrak{z}^5} - \frac{160}{\mathfrak{z}^7} - \cdots}$$

zum Vorschein, die mit [50] übereinstimmt; wir haben nur der Deutlichkeit wegen $\mathfrak{z}$ an Stelle des von Gauß benutzten z geschrieben, weil später in [58] und von [67] an z in derselben Bedeutung wie in Leiste benutzt wird.

Aus [50]' ergibt sich (vergl. [49])

$$\log\mathfrak{z} = \log\left(4x - \frac{1}{x} - \frac{9}{32}\frac{1}{x^3} - \cdots\right),$$

so daß die Gleichung (**) auch in der Form

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}M(1,x)\log\mathfrak{z} = C$$

geschrieben werden kann. Dies veranlaßt nun zu setzen

$$M(1, x) = \frac{C(x - \alpha x^{-1} - \beta x^{-3} - \cdots)}{\log \mathfrak{z}};$$

die Koeffizienten α, β, ... lassen sich numerisch bestimmen, was Gauß mit seiner in solchen Dingen bewährten Meisterschaft ausgeführt haben wird. Die Werte stehen in [46]. Nun macht Gauß die „Observatio" [48]. Diese leitet ihn zu der Vermutung, daß der Zähler „omisso factore C" auch allgemein ein agM. sein könnte, und da der reziproke Wert des agM. leichter traktierbar ist (vergl. die Entwicklung [33], ferner [44]) als das agM. selbst, so setzt er [52] den Zähler $= \frac{C}{Q}$ und findet für Q die Entwicklung [53], aus der er [54] erschließt. Nun macht er ähnlich wie in Leiste [26] den Übergang zur Integraldarstellung, schreibt aber zunächst, wohl infolge eines Rechenfehlers, vielleicht auch durch die Voreingenommenheit für das elliptische Integral zweiter Gattung verführt [1]) das unrichtige

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{x^2-r^2}}\, dr,$$

das er erst später (mit ersichtlich anderen Schriftzügen und anderer Tinte) berichtigend durch das Integral erster Gattung ersetzt. Die Reihenentwicklung [53] verglichen mit [33], oder auch [54] in Verbindung mit [44], lassen ihn jetzt Q als agM. erkennen, was in [56] ausgesprochen ist. „Numerator pro $\frac{1}{k}$" bedeutet dort soviel, wie der Zähler des Ausdrucks in [45] für $x = \frac{1}{k}$. Das „demonstr." deutet darauf hin, daß es sich um den Beweis einer Vermutung handelte (vergl. oben), die unerklärliche Buchstabenverbindung (verschnörkelte Majuskeln) erinnert an das „vicimus GEGAN"

1) Für Gauß hatte das Integral erster Gattung nur im lemniskatischen Fall, wo ihm eine geometrische Bedeutung zukommt, eine a priori feststehende Wichtigkeit. Im allgemeinen Falle trat es gegenüber dem den Ellipsenbogen darstellenden Integrale II. Gattung ganz zurück. Eigentlich kannte Gauß es nur von dem Additionstheorem Eulers her. Dieses Theorem für das allgemeine elliptische Integral I. Gattung hat Gauß an mehreren Stellen des handschriftlichen Nachlasses aufgezeichnet, z. B. bei S. 48 des Leiste, dann Scheda Ac. S. 30 (mit Zitat: Lagrange, Theorie des fonctions, p. 82) und S. 33. Die Angabe P. Günthers, Göttinger Nachrichten 1894, S. 100, dies sei nicht der Fall, die auf der alleinigen Kenntnis der von Schering herausgegebenen Teile des Nachlasses beruhte, bedarf hiernach einer Berichtigung.

der Tagebuchnotiz 43) vom 21. Oktober 1796. Die jetzt gewonnene Einsicht, daß der reziproke Wert des agM. das vollständige Integral erster Gattung ist, nicht nur im lemniskatischen, sondern auch im allgemeinen Falle, muß als ausschlaggebend dafür angesehen werden, daß Gauß seine Aufmerksamkeit von nun ab dem allgemeinen elliptischen Integral I. Gattung als der genuinen Verallgemeinerung des lemniskatischen Integrals zuwendet. Die alte Vorliebe für die „Peripheria Ellipseos" tritt aber in [58] noch einmal hervor, wo er (vergl. oben) die Formel [4] aus Leiste nachrechnet und berichtigt. Auch an späteren Stellen der Scheda Ac, inmitten der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen findet sich noch öfter die „Peripheria Ellipseos" (vergl. auch die Tagebuchnotiz 111) vom 10. Juni 1800).

Mit der Formel [58] ändert sich die Bedeutung des Buchstaben z; von nun ab ist z der reziproke Wert der in [49] mit demselben Buchstaben bezeichneten Größe (unseres $\mathfrak{z}$), hat also dieselbe Bedeutung wie in den Formeln des Leiste. Nach einigen Zwischenrechnungen, die zeigen, daß Gauß noch immer mit dem Imaginären kämpft[1]), drückt Gauß in [67] die Größe z durch $s = \frac{1}{x}$ aus; dabei hat s dieselbe Bedeutung wie das B in der Leisteformel [3], so daß also [67] durch Inversion der berichtigten Reihe [3] bezw. der in [50]' auftretenden Reihe, für $x = \frac{1}{s}$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$ hervorgeht. Nun bildet er die Funktion $P(s)$, die nach der Reihenentwicklung [71] (vergl. [33] in Leiste) und nach [72] (vergl. [35] in Leiste) durch die Gleichung

[72]' $$M(1, \sqrt{1-s^2}) = \frac{1}{P(s)}$$

definiert werden kann. Der in [72] benutzte Buchstabe c hat nämlich die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$, wobei man etwa an cosinus oder an die Gauß geläufige Bezeichnung $c = \sqrt{a^2-b^2}$ für $a = 1$, $b = s$ zu denken hat. Setzt man in die Reihe [71] für s seinen Ausdruck aus [3] bezw. [50]'

[50]'' $$s = 4z - 16z^3 - 56z^5 - 160z^7 - \cdots$$

ein, so ergibt sich für $P(s)$ die Darstellung [68], deren Umformung

1) So betrachtet er [65] neben $M(\sin\varphi)$ auch
$$M\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right).$$

in die Summe von zwei Quadraten [69] sehr nahe liegt. Die Gleichung [70] dürfte Gauß dann mit Hilfe der ihm bekannten Formel (Leiste [6])

$$[6]' \quad s\,P(s) = s + \frac{1}{4}s^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}s^5 + \cdots = (2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{9}{2}} + \cdots)^2$$

abgeleitet haben. Die Formel [73] und die ihr äquivalente [74] (in der letzteren hat c wieder die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$) sind nun nichts anderes als die Quotientendarstellung aus [45] in den neuen Bezeichnungen; wir können sie in der Form

$$[73]' \quad \log z = -\frac{\pi}{2}\,\frac{M(1,\sqrt{1-s^2})}{M(1,s)}$$

schreiben, und wollen nun noch die Verifikation der Gleichungen [69], [70], [73] nach den Gesetzen des agM. hierhersetzen.

Wir nehmen

$$a = 1,\ b = \sqrt{1-s^2},\ c = s = B,$$

dann gibt die Leisteformel [6]

$$[6]' \quad \frac{c}{M(a,b)} = (2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{9}{2}} + \cdots)^2 = (r(z))^2.$$

Nun ist (vergl. (12))

$$(17) \quad \frac{c_n}{M(a_n,b_n)} = \frac{c_n}{M(a,b)} = (2z^{(2^n)\frac{1}{2}} + 2z^{(2^n)\frac{9}{2}} + \cdots)^2 = (r(z^{(2^n)}))^2,$$

ferner (vergl. (5))

$$(18) \quad 2^n\,M(a_n, c_n) = M(a, c).$$

Vergleicht man die letztere Gleichung mit

$$(19) \quad \log z^{(2^n)} = 2^n \log z,$$

so erhält man

$$\log z^{(2^n)}\,M(a_n, c_n) = \log z \cdot M(a, c)$$

oder

$$(20) \quad \log z^{(2^n)}\,M\left(1,\ \frac{c_n}{M(a,b)}\cdot\frac{M(a,b)}{a_n}\right) = \log z \cdot \frac{M(a,c)}{a_n}.$$

Läßt man in dieser Gleichung den Index n ins Unendliche wachsen und beachtet, daß

$$\lim_n c_n = 0, \lim_n z^{(2^n)} = 0, \lim_n a_n = M(a, b),$$

$$\lim_{p=0} M(1, p) \log \frac{4}{p} = \frac{\pi}{2}$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (17)

$$\log z = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M(a, b)}{M(a, c)},$$

was mit [73]' übereinstimmt. Die Gleichungen [69], [70] ergeben sich jetzt direkt aus den Formeln (12) für $n = 2$, wenn man berücksichtigt, daß die durch die Gleichung (7) definierte Größe y gleich z^2 ist. Wir bemerken, daß wir bei dieser Verifikation nur solche Hilfsmittel benutzt haben, über die Gauß zu der Zeit, wo er die in Rede stehenden Aufzeichnungen schrieb, sicher verfügt hat.

Wir sehen, daß sich Gauß durch diese Untersuchungen in den vollen Besitz der Theorie des agM. gesetzt hat. Während er im Leiste nur die Beziehung des agM. zu der Reihe

$$2z^{\frac{1}{4}} + 2z^{\frac{9}{4}} + \cdots$$

gekannt hat, tritt jetzt noch die Beziehung zu der Reihe

$$1 + 2z^4 + 2z^{16} + \cdots$$

hinzu; ferner findet er an Stelle der im Leiste nur in formaler Weise (durch Reihenentwicklung) gegebenen Definition von z jetzt die genuine Darstellung [73]' dieser Größe durch das agM., endlich eröffnet ihm der Zusammenhang zwischen agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung den Zugang zu der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen, indem die Formel [73]' die Größe $-\frac{2}{\pi} \log z$ direkt durch den Periodenquotienten darstellt [1]).

Die auf diese Theorie bezüglichen Aufzeichnungen der Scheda Ac liegen nicht mehr im Rahmen dieses Aufsatzes; dagegen möge noch mit wenigen Worten auf die Bedeutung der mit der Formel [75] beginnenden Aufzeichnung hingewiesen werden, die, wie bereits bemerkt, in Band III der Werke S. 423—425 abgedruckt ist [2]).

---

1) Das Gauß'sche z ist nichts anderes als das Jacobische $\sqrt{q}$.

2) Der Abdruck ist im ganzen dem Original entsprechend, obgleich nicht philologisch genau. In der ersten Formel findet sich jedoch ein sinnstörendes

In [66] setzt Gauß für $M(1, \sin\varphi)$ eine trigonometrische Reihe an. Er scheint sich aber überzeugt zu haben, daß es zweckmäßiger sei, den reziproken Wert zu entwickeln, und findet, daß die Koeffizienten dieser Entwicklung in einfacher Weise von der lemniskatischen Periode abhängen. Insbesondere erweist sich das absolute Glied N gleich $2\frac{\varpi^2}{\pi^2}$, ein Resultat, das mit dem Werke III, S. 441, art. [5] ausgesprochenen Theorem (das Gauß daselbst als „zu den Hauptsätzen dieser Theorie" gehörig bezeichnet) im Zusammenhang steht. In der Formel für den Maximalwert der dort betrachteten Funktion $\varphi\alpha$ bedeutet nämlich ϖ die lemniskatische Periode.

Dritter Abschnitt.

Über die Entstehungszeit der Fragmente.

Auf den Durchschußblättern des Leiste sind erstens in fortlaufender Reihenfolge eingetragen „reguläre" Aufzeichnungen, die sich auf verschiedene Gegenstände der Analysis und Zahlentheorie beziehen und im Ganzen mit den aus den Jahren 1796 bis 1797 herrührenden Tagebuchnotizen correspondieren. Dazu kommen zweitens „irreguläre" Eintragungen, deren Abfassungszeit einer besonderen Untersuchung bedarf. Da die Tagebuchnotizen der späteren Jahre (es kommen hier nur die aus den Jahren 1798 bis 1799 in Betracht) mit den „regulären" Leisteaufzeichnungen in keinem Zusammenhang stehen, ist der Ausspruch von Herrn Klein: „Die Aufzeichnungen in Leiste gehen im Allgemeinen nicht über das Jahr 1797 hinaus" (Anmerkung zur Tagebuchnotiz 91 a), Festschrift S. 28) durchaus gerechtfertigt.

Die oben abgedruckten Leisteaufzeichnungen beginnen bei Seite 25. Da die den Tagebuchnotizen von 1796 entsprechenden Leistenotizen nur etwa bis zu der Seite 16 reichen, so ergibt sich also als untere Zeitgrenze für alle Aufzeichnungen [1]—[41] das Jahr 1797. Die auf die lemniskatische Periode bezüglichen Aufzeichnungen [23]—[28] stehen auf einer besonderen Seite und schließen sich auch in Ansehung der Schrift den in fortlaufender Reihen-

Versehen, indem Schering statt des auf der rechten Seite von [75] stehenden Ausdrucks $P\cos\varphi$, gesetzt hat $\frac{1}{M(1, \cos\varphi)}$, während es nach [72] heißen müßte $\frac{1}{M(1, \sin\varphi)}$.

folge eingetragenen „regulären“ Aufzeichnungen an; sie sind also mit Sicherheit auf das Jahr 1797 anzusetzen. Daß die Aufzeichnung [41] vor Juli 1798 gemacht ist, wurde schon oben (S. 18) bemerkt.

Weitaus schwieriger liegt die Zeitbestimmung für die Notizen [1]—[22] und [29]—[40], die zu den „irregulären“ Eintragungen gehören. Diese sind mit ersichtlich späterer Schrift und Tinte auf zerstreuten Stellen, die bei den regulären Aufzeichnungen unbeschrieben geblieben waren, eingetragen und man ist für die Bestimmung ihrer Entstehungszeit teils auf ihren Inhalt und ihre Form, teils auf ihren Zusammenhang mit anderen, sicher zu datierenden Aufzeichnungen angewiesen.

Zunächst ist ihre Form durchaus fragmentarisch, sie zeigen zahlreiche Schreib- und Rechenfehler (vergleiche z. B. [9], [11], [3], [4]) und Inconsequenz in der angewandten Bezeichnung (M, L in verschiedenen Bedeutungen, vergl. oben S. 14). Wahrscheinlich haben wir in diesen Notizen nicht erste Aufzeichnungen vor uns, sondern, wenigstens zum Teil, Auszüge aus älteren für uns wohl verlorenen Notizen. Daß solche ältere, aus der Zeit vor 1797 stammenden Notizen existiert haben, ist unzweifelhaft, da ja (vergl. oben) Gauß sich seit 1791 mit dem agM. beschäftigt hat; auch hat die Angabe, daß er 1794 den Zusammenhang des agM. mit den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, gekannt habe, sehr große innere Wahrscheinlichkeit.

In Bezug auf den Inhalt der in Rede stehenden Leisteaufzeichnungen gibt das Tagebuch von 1797 nur den einen Anhaltspunkt, daß Gauß sich um den 16. Februar 1797 mit den Reihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, beschäftigt hat. Die Frage, ob die rätselhaften Tagebuchnotizen 42), 43) vom Oktober 1796 etwa mit der Theorie des agM. zusammenhängen könnten, kommt für die Datierung unserer Fragmente unmittelbar nicht in Betracht, da diese frühestens 1797 eingetragen sein können. Übrigens ist es nicht unmöglich, daß zwischen dem GEGAN der Tagebuchnotiz 43) und dem GALEN der Scheda Ac-Aufzeichnung [56] eine Beziehung besteht (vergl. oben S. 24), daß also die Tagebuchnotizen 42), 43) tatsächlich auf eine Entdeckung über das agM. zu deuten sind. Ausdrücklich wird das agM. im Tagebuch zuerst in der oben wiedergegebenen Notiz 98) vom 30. Mai 1799 erwähnt; hiermit steht wohl die Tatsache im Zusammenhange, daß sich auf einer der letzten Seiten der Scheda Aa (die Gauß im Juli 1798 begonnen hat und bis zu An-

fang des Jahres 1799 benutzt zu haben scheint) in tändelnder Schrift die Worte „Medium Arith. G." finden.

Ob Gauß sich im Sommer 1799 mit dem am 30. Mai 1799 aufgeworfenen Problem weiter beschäftigt hat, wissen wir nicht; jedenfalls berichtet das Tagebuch nichts darüber und die einzige Notiz 99) vom September 1799 bezieht sich auf „bedeutende Fortschritte in den Prinzipien der Geometrie". Erst im November 1799 heißt es (Notiz 100): Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus." Im November hat Gauß auch die Scheda Ac begonnen, und in der Tat stimmen die Tagebuchaufzeichnungen 100) – 102) vollständig mit den Aufzeichnungen [42]—[56] der Scheda überein und zwar:

100) und der erste Satz von 101) „Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus" mit [43]—[51]; diese Notizen sind also im November in Braunschweig geschrieben;

der zweite Satz von 101) „nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus" mit [52]—[55]; diese Notizen sind also schon im Dezember in Helmstedt geschrieben; bei [52] beginnt ersichtlich andere Tinte;

endlich 102) „Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis" mit [56].

Die Entstehungszeit der folgenden Aufzeichnungen [57] ff. ist auf die Zeit vor dem 1. Mai 1800 zu setzen, denn die vom 1. Mai 1800 an gemachten Tagebuchnotizen 106) ff. stehen wieder mit den späteren Notizen der Scheda Ac in Übereinstimmung.

Nachdem so die Abfassungszeit der Notizen [23]—[28], [41], [42] ff. festgestellt ist, kehren wir zur Beantwortung der Frage zurück, wann die irregulären Leisteaufzeichnungen [1]—[22], [29]—[40] entstanden sind.

Diese Notizen, für die vorher als untere Zeitgrenze 1797 festgestellt wurde, müssen Gauß vorgelegen haben, als er die Notizen [58]—[74] der Scheda Ac verfaßt hat. Denn die Formel [58] knüpft unmittelbar an die Leisteformeln [1]—[6] an, und sowohl [58] als auch [67]—[70] enthalten die Größe z in derselben Bedeutung wie jene Leisteformeln. Wir erhalten somit als obere Zeitgrenze für die Eintragung der Leisteformeln [1]—[22] und [29]—[40], die eng zu einander gehören, den Anfang des Jahres 1800. — Diese Leisteformeln enthalten nun wesentlich drei Elemente:

1) Die Beziehung des agM. zum Ellipsenquadranten,

2) die Beziehung des agM. zu den Reihen, deren Exponenten

die Quadratzahlen sind und die dadurch bedingte Einführung der Größe z,

3) die Reihenentwicklung von K nach positiven, ganzen Potenzen von ν (siehe [2], [6], [15], [33]), die den ganzen Notizen gleichsam als Unterbau zu Grunde liegt.

Die beiden ersten Elemente muß Gauß gekannt haben, als er die Aufzeichnung [45]—[51] machte; denn er kann die Formel [45] nicht hergeleitet haben, ohne einen Zusammenhang zwischen dem agM. und einem vollständigen elliptischen Integral zu kennen. Da er aber den Zusammenhang mit dem Integral erster Gattung damals sicher nicht gekannt hat, so muß er den Zusammenhang mit dem Integral zweiter Gattung gehabt haben; die Größe z bezw. ihr reziproker Wert kommen in den Aufzeichnungen [49], [50] direkt vor.

Dagegen kann Gauß das Element 3) weder am 30. Mai noch am 14. Dezember 1799 gegenwärtig gehabt haben, denn sonst müßte er auf Grund der Reihenentwicklung für K am 30. Mai, wie oben (S. 18) gezeigt wurde, die Identität von $M(\sqrt{2}, 1)$ mit $\frac{\pi}{\varpi}$ direkt ersehen und am 14. Dezember aus der Entwicklung [53] für Q ebenso direkt die Identität [56] gefolgert haben, die er doch erst neun Tage später als neue Entdeckung im Tagebuch notiert.

Da das Element 3) sich durch die ganzen Leistenotizen [1]—[22] und [29]—[40] hindurchzieht, kann also Gauß diese Notizen keinesfalls im Jahre 1799 bis zum 14. Dezember oder kurz vor 1799 geschrieben haben, da er sich ihrer sonst am 30. Mai bezw. am 14. Dezember erinnert haben müßte; es kann sich also auch die Tagebuchaufzeichnung 100) nicht auf diese Leistenotizen mitbeziehen. Andererseits können die Notizen auch nicht nach dem 23. Dezember 1799 geschrieben sein, denn sonst müßten sie eine Spur der in der Tagebuchnotiz 102) bezeichneten, von Gauß so hoch geschätzten Entdeckung zeigen. Da Gauß nun die in den Leistenotizen enthaltenen Elemente 1), 2) im November 1799, als er die Notizen [45]—[51] machte, notwendig gegenwärtig gehabt haben muß, so muß er diese Elemente aus anderen Aufzeichnungen geschöpft haben, die nichts anderes sein können, als die schon erwähnten, für uns verlorenen Uraufzeichnungen. Diese uns unbekannten Uraufzeichnungen, deren Spuren wir in den Leistenotizen vor uns haben, müssen also die Elemente 1), 2), nicht aber das Element 3) enthalten haben, so daß dieses letztere Element das in den Leistenotizen enthaltene wesentlich neue darstellen würde. Dies ist sachlich sehr wohl möglich; wir müssen uns nur

vorstellen, daß Gauß in den Uraufzeichnungen die Beziehung [11] zwischen dem agM. und dem Ellipsenquadranten nicht mit Hülfe der Entwicklung [15], sondern etwa in ähnlicher Weise hergeleitet hat wie in der Anzeige zur „Determinatio attractionis“ (Werke III S. 360) oder wie Schumacher in seinen Briefen vom 5. April und 8. Juli 1816 (Briefwechsel Gauß-Schumacher I, S. 123, 126).

Wir haben demnach in Bezug auf die Entstehungszeit der Leistenotizen [1]—[22] und [29[—[40] die folgende Alternative: Entweder hat sie Gauß zwischen dem 14. und 23. Dezember 1799 eingetragen, also zu dieser Zeit die Entwicklung [33] für K gefunden und mit Hülfe von dieser die Identität [56] abgeleitet, oder die Leistenotizen stammen aus dem Jahre 1797 oder dem Anfang des Jahres 1798 und Gauß hat sich ihrer im Jahre 1799 nicht erinnert. Er würde dann die Identität [56] aus den Gleichungen [54], [44] gewonnen haben (vergl. oben S. 24).

Mir erscheint die erstere Annahme schon darum unwahrscheinlich, weil die in den Leistenotizen angewandten Methoden sich ganz dem wissenschaftlichen Niveau anpassen, auf dem sich Gauß im Jahre 1797 befand, wo er noch zumeist mit Potenzreihenentwickelungen operiert und — wie der Leiste zeigt — sich noch in der Auswertung elementarer Integrale geübt hat; ich bin vielmehr geneigt, den folgenden Tatbestand anzunehmen.

Gauß hat die Leistenotizen [1]—[22], [29]—[40] im Jahre 1797, spätestens Anfang 1798 eingetragen, er hat dabei aus älteren Aufzeichnungen die Elemente 1), 2) entnommen und diesen als wesentlich neues das Element 3), d. h. die Reihenentwicklung [2], [6], [15], [33] hinzugefügt. Er hat aber damals dieser Entwicklung so geringe Wichtigkeit beigelegt, daß er sie weder ins Tagebuch eingetragen, noch sie sehr fest im Gedächtnis behalten hat. Im Mai 1799 dürfte er die aus der Scheda Aa (1798) stammende Formel (abgedruckt Werke III, S. 418, art. [8], Zeile 6 v. u.)

$$(21)\qquad \frac{\varpi}{\pi} = 4\left(e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{9\pi}{4}} + e^{-\frac{25\pi}{4}} + \cdots\right)^2,$$

wo ϖ die lemniskatische Periode bedeutet, mit der ihm aus jenen älteren Aufzeichnungen bekannten Formel (vergl. Leiste [6])

$$(22)\qquad \frac{v}{M(1, \sqrt{1-v^2})} = 4\left(z^{-\frac{1}{4}} + z^{-\frac{9}{4}} + z^{-\frac{25}{4}} + \cdots\right)^2$$

verglichen haben. Die rechten Seiten stimmen für $z = e^{\frac{\pi}{2}}$

überein. Für diese Größe hat Gauß in der Scheda Aa (abgedruckt Werke III, S. 431 „Ecce iam computum pro $e^{\frac{\pi}{2}}$") den Wert 4,810484 berechnet. Er mag dann durch eine numerische Rechnung für ν einen dem $z = e^{\frac{\pi}{2}}$ entsprechenden Wert gefunden haben, den er als angenähert gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$ agnoszierte, und da für $\nu = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\nu}{M(1, \sqrt{1-\nu^2})} = \frac{1}{M\left(\frac{1}{\nu}, \sqrt{\frac{1}{\nu^2}-1}\right)} = \frac{1}{M(\sqrt{2}, 1)}$$

ist, so sah er sich veranlaßt, $M(\sqrt{2}, 1)$ mit $\frac{\pi}{\varpi}$ numerisch zu verrisch zu vergleichen[1]). Das Resultat dieser Vergleichung wäre die Tagebuchnotiz 98) vom 30. Mai. Im November, Dezember 1799 hat er dann mit Benutzung jener älteren Aufzeichnungen weiter gearbeitet; in diesen mag, wie wir auch in der Formel (22) angenommen haben, das z in der Bedeutung vorgekommen sein, wie es in den Formeln [49], [50] erscheint. Nach dem 23. Dezember, ist ihm dann der Leiste in die Hände gekommen. Er hat jetzt in [58] die Leisteformel [4] berichtigt und von da ab in [67]—[70] das z in der Bedeutung von Leiste benutzt. Diese Annahme wird nicht nur durch die Formel [58], sondern u. A. auch dadurch gestützt, daß die Formeln [61]—[64], wie bereits oben erwähnt, zu dem M der Leisteformeln in Beziehung stehen, und daß Gauß in der 1800 begonnenen Abhandlung über das agM. (Werke III, S. 361) direkt mit der anfänglich unterschätzten, aber im Dezember 1799 in ihrer wahren Bedeutung erkannten Entwicklung [33] operiert.

---

1) In der Scheda Aa (siehe Werke III, S. 413) berechnet Gauß den Wert von $\frac{\varpi}{2}$ auf 11 Dezimalstellen „utentibus formula arcsin lemn. $\frac{7}{23}$ + arcsin lemn $\frac{1}{2}$", und (siehe Werke III, S. 418) den Wert von $\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$ auf 26 Dezimalstellen mit Hilfe der Formel (21). Das Beispiel $M(\sqrt{2}, 1)$ ist in der 1800 begonnenen Abhandlung über das agM. (siehe Werke III, S. 364) auf 19 Dezimalstellen berechnet.

Inhaltsübersicht.

Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt.

Von

Th. v. Kármán in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn Runge am 23. Dezember 1911.

In einer unlängst in diesen Nachrichten veröffentlichten Note [1]) habe ich versucht, den Mechanismus des Widerstandes, den ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegter Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit erfährt, der theoretischen Einsicht dadurch näher zu bringen, daß ich — zunächst für den Fall des ebenen Problems — die Strömungsvorgänge auf eine stabile Konfiguration isolierter Wirbelfäden zurückzuführen suchte. In den folgenden Zeilen sollen jene Ausführungen nach zwei Richtungen hin ergänzt werden. Einerseits möchte ich jene vereinfachte Stabilitätsuntersuchung, bei der ich mir sämtliche Wirbelfäden bis auf ein Paar festgehalten dachte und das freie Wirbelpaar im Geschwindigkeitsfelde der übrigen schwingen ließ, durch eine exaktere Rechnung ersetzen, wobei die unendlich vielen Freiheitsgrade des Systems Berücksichtigung finden, — andererseits soll der Widerstand statt der in jener Note enthaltenen Abschätzung der Impulsmenge — die nicht den vollständigen Ausdruck dafür liefert — durch eine einwandfreie Anwendung des Impulssatzes berechnet werden.

§ 1. Die Stabilitätsuntersuchung.

Wir wollen wieder zwei Reihen von unendlich vielen geradlinigen Wirbelfäden von gleicher Stärke und entgegengesetztem Rotationssinn betrachten und eine Konfiguration suchen, die unver-

1) Göttinger Nachrichten, math.-phys. Kl. 1911, p. 509; vgl. auch Phys. Z. 13. (1912) S. 49, wobei die Ergebnisse dieser zweiten Note bereits berücksichtigt wurden.

ändert mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet und dabei stabil ist. Wie ich bereits in meiner ersten Note bemerkte, findet man zwei Anordnungsweisen, die der ersten Bedingung genügen, je nachdem man die Wirbelfäden der beiden Reihen einander gegenüberstellt, oder aber die eine Reihe mit der halben Teilung gegen die andere versetzt. Es fragt sich nun, können diese Anordnungen stabil sein?

Um die Methode der Stabilitätsuntersuchung klar darzustellen, betrachten wir zunächst das einfachere Beispiel einer *einzigen* Wirbelreihe.

Bezeichnen wir die Koordinaten des p-ten Wirbelfadens mit x_p, y_p, die gemeinsame Wirbelstärke mit ζ, so sind die Geschwindigkeitskomponenten des p-ten Wirbelfadens:

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{y_p - y_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = -\frac{\zeta}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{x_p - x_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

wobei bei der Summation $q = p$ ausgeschlossen werden soll. Denken wir uns nun die einzelnen Wirbelfäden mit den kleinen Beträgen ξ_p, η_p, ξ_q, η_k aus ihren Gleichgewichtslagen verschoben und entwickeln die obigen Ausdrücke nach den ξ und η, so erhalten wir offenbar ein System von unendlich vielen Differentialgleichungen für die kleinen Störungen des Systems. Setzen wir im vorliegenden Falle

$$x_p = pl + \xi_p$$
$$y_p = \eta_p$$

wobei l die Teilung bezeichnet und die x-Axe durch die Gleichgewichtslagen der Wirbelfäden gelegt wird, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$\frac{d\xi_p}{dt} = \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_p - \eta_q}{(p-q)^2 l^2}$$

$$\frac{d\eta_p}{dt} = \frac{\zeta}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_p - \xi_q}{(p-q)^2 l^2}.$$

Die so gewonnenen unendlich viel Differentialgleichungen werden durch den Ansatz

$$\xi_p = \xi_0 e^{pi\varphi}$$
$$\eta_p = \eta_0 e^{pi\varphi}$$

auf zwei zurückgeführt.

Der physikalische Sinn des Ansatzes ist einleuchtend: wir untersuchen örtlich periodische Störungen, wobei jeder — an und für sich gleichberechtigter — Wirbelfaden dieselbe Bewegung ausführt, nur in „Phase" verschoben. Die „Phasenverschiebung" zwischen zwei benachbarten Wirbelfäden wird durch den Wert φ gegeben und wir werden das System stabil nennen, falls bei keinem Werte von φ, d.h. bei keiner Wellenlänge der Störung, eine Bewegung mit zeitlich zunehmender Amplitude möglich ist. Da eine beliebige Störung sich stets aus örtlich periodischen zusammensetzen läßt, so ist eine Anordnung die gegen periodische Störungen stabil ist, gegen beliebige Störungen stabil [1]).

In dem eben betrachteten Falle reduzieren sich die Differentialgleichungen offenbar auf

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \eta_0 \frac{\zeta}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1-\cos(q\varphi)}{q^2 l^2}$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \xi_0 \frac{\zeta}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1-\cos(q\varphi)}{q^2 l^2}$$

oder aber falls wir die Funktion

$$K(\varphi) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1-\cos(q\varphi)}{q^2}$$

einführen,

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \frac{\zeta^2}{\pi^2 l^4} (K(\varphi))^2 \xi_0.$$

Eine einzige Wirbelreihe ist also stets und zwar gegen beliebige Störungen labil.

Wenden wir dieselbe Methode zunächst auf die symmetrische Anordnung zwei Wirbelreihen an und bezeichnen die Störungen bei den Wirbelfäden der einen Reihe mit ξ, η, bei der anderen Reihe mit $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, so gelangen wir durch den analogen Ansatz

$$\xi_q = \xi_0 e^{qi\varphi}, \quad \bar{\xi}_q = \bar{\xi}_0 e^{qi\varphi}$$

$$\eta_q = \eta_0 e^{qi\varphi}, \quad \bar{\eta}_q = \bar{\eta}_0 e^{qi\varphi}$$

---

1) Dies ist identisch mit der Behauptung, daß das System der unendlich vielen Differentialgleichungen außer der durch unsern Ansatz gelieferten keine weiteren Lösungen besitzt. Nun kann die hier gegebene Lösung der Differentialgleichungen als Anwendung jener Sätze angesehen werden, die Herr O. Toeplitz über die von ihm als L-Formen bezeichneten quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln gefunden und teilweise in zwei Arbeiten (diese Nachrichten 1907, S. 110, Math. Annalen 1911, S. 351) veröffentlicht, teilweise in freundlicher Weise mir persönlich mitgeteilt hat. Eine Erweiterung seiner Betrachtungen dürfte auch den exakten Beweis der obigen Behauptung liefern.

zu folgendem System von Differentialgleichungen

$$\frac{2\pi}{\zeta}\frac{d\xi_0}{dt} = \qquad\qquad A(\varphi)\,\eta_0 - iB(\varphi)\,\bar{\xi}_0 + C(\varphi)\,\bar{\eta}$$

$$\frac{2\pi}{\zeta}\frac{d\eta_0}{dt} = A(\varphi)\,\xi_0 \qquad\qquad + C(\varphi)\,\bar{\xi}_0 + iB(\varphi)\,\bar{\eta}_0$$

$$\frac{2\pi}{\zeta}\frac{d\bar{\xi}_0}{dt} = -iB(\varphi)\,\xi_0 - C(\varphi)\,\eta_0 \qquad\qquad - A(\varphi)\,\bar{\eta}_0$$

$$\frac{2\pi}{\zeta}\frac{d\bar{\eta}_0}{dt} = -C(\varphi)\,\xi_0 + iB(\varphi)\,\eta_0 - A(\varphi)\,\bar{\xi}_0;$$

wobei die Funktionen A, B, C folgendermaßen bestimmt sind

$$A(\varphi) = 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1-\cos(q\varphi)}{q^2 l^2} + \frac{1}{h^2} - 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{q^2 l^2 - h^2}{(q^2 l^2 + h^2)^2}$$

$$B(\varphi) = 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{2qlh}{(q^2 l^2 + h^2)^2}\sin(q\varphi)$$

$$C(\varphi) = -\frac{1}{h^2} + 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{q^2 l^2 - h^2}{(q^2 l^2 + h^2)^2}\cos(q\varphi)$$

und h den Abstand der beiden Wirbelreihen bezeichnet.

Setzen wir nun ξ_0, η_0, $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$ proportional $e^{\frac{\zeta}{2\pi}\lambda t}$, so wird λ offenbar gegeben durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\lambda & A & -iB & C \\ A & -\lambda & C & iB \\ -iB & -C & -\lambda & -A \\ -C & +iB & -A & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

d. h. durch die Wurzeln einer viergliedrigen Determinante, deren Elemente selbst Funktionen eines Parameters φ sind. Damit das System stabil sei, darf λ bei keinem Werte von φ reellen positiven Teil haben.

Die Wurzeln der soeben angeschriebenen Gleichung lauten

$$\lambda = \pm i\left\{B \pm \sqrt{C^2 - A^2}\right\}$$

d. h. zur Stabilität ist es notwendig, daß für beliebige Werte von φ

$$|C| \geqq |A|$$

sei, da sonst wegen des doppelten Vorzeichens stets eine Lösung mit wachsender Amplitude vorhanden ist.

Nun ist aber für $\varphi = \pi$

$$C(\pi) = \frac{\pi^2}{4l^2}\left\{\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{h}^2 \frac{h\pi}{l} - \mathfrak{Tg}\,\mathfrak{h}^2 \frac{h\pi}{l}\right\}$$

$$A(\pi) = \frac{\pi^2}{4l^2}\left\{\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{h}^2 \frac{h\pi}{l} + \mathfrak{Tg}\,\mathfrak{h}^2 \frac{h\pi}{l}\right\}$$

sodaß stets $|C(\pi)| < |A(\pi)|$ gilt.

Die symmetrische Anordnung zweier Wirbelreihen ist also ebenfalls stets labil.

Für die unsymmetrische Anordnung läßt sich λ durch dieselbe Formel

$$\lambda = \pm i\left\{B \pm \sqrt{C^2 - A^2}\right\}$$

ausdrücken, nur haben wir zu setzen

$$A(\varphi) = 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1-\cos(ql)}{q^2 l^2} - 2\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+\frac{1}{2})^2 l^2 - h^2}{[(q+\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2}$$

$$B(\varphi) = 2\sum_{q=0}^{\infty}\frac{2(q+\frac{1}{2})\,lh}{[(q+\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2}\sin(q+\tfrac{1}{2})\varphi$$

$$C(\varphi) = 2\sum_{q=0}^{\infty}\frac{l^2(q+\frac{1}{2})^2 - h^2}{[(q+\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2}\cos(q+\tfrac{1}{2})\varphi$$

In diesem Falle ist ebenfalls $\varphi = \pi$ der kritische Punkt, da für diesen Wert $C(\varphi)$ verschwindet; es muß also $A(\pi)$ ebenfalls verschwinden. Dies führt zu der Bedingung

$$\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+\frac{1}{2})^2 l^2 - h^2}{[(q+\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2} = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{2}{(2q+1)^2 l^2}$$

oder aber

$$\frac{\pi^2}{2\ \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{h}^2\frac{\pi h}{l}} = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{h}\frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}.$$

Bei sämtlichen anderen Werten des Verhältnisses $\frac{h}{l}$ ist somit das Gebilde labil, da wir stets Störungen finden können, die zu Schwingungen mit wachsender Amplitude führen. Ist die soeben abgeleitete Gleichung dagegen erfüllt, so kann man unschwer zeigen, daß für beliebige Werte von $\varphi \neq \pi$, $|C| > |A|$ gilt, so daß die Störung bei beliebiger Wellenlänge sich mit konstanter Amplitude fortpflanzt.

Die in meiner ersten Note mitgeteilte Rechnung lieferte für die stabile Anordnung den Wert

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Ar\,Cos\,h} \sqrt{3} = 0.359\ldots$$

gegen

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Ar\,Cos\,h} \sqrt{2} = 0.283\ldots$$

der jetzigen exakten Untersuchung. Die — allerdings provisorischen — Versuche und Beobachtungen, die ich gemeinsam mit Herrn cand. math. H. Rubach über die Strömung von Wasser um eine schmale Platte und um einen Kreiszylinder in letzter Zeit ausführte, liefern das Ergebnis, daß sobald man über die ersten zwei bis drei Wirbelpaare hinter dem Körper hinausgeht, die Werte $\frac{h}{l}$ ziemlich gut mit dem letzteren exakten Werte übereinstimmen (so erhielten wir für die Platte $\frac{h}{l} = 0.305$; für den Zylinder $\frac{h}{l} = 0.28$), daß man dagegen in der Nähe des Körpers größere Werte von $\frac{h}{l}$ findet. Ich glaube daraus schließen zu dürfen, daß in der Nähe des Körpers die Wirbelfäden mehr in ihrer Bewegungsfreiheit gehindert werden und die Verhältnisse näher zu der Annahme stehen, die ich meiner ersten Untersuchung zu Grunde legte.

§ 2. Anwendung des Impulssatzes.

Halten wir an der Annahme fest, daß hinter dem Körper, den wir mit einer Geschwindigkeit U durch die Flüssigkeit fortschreitend denken, in einer Entfernung, die groß ist gegen die Abmessungen des Körpers selbst, die Strömung mit guter Annäherung durch die soeben berechnete stabile Wirbelkonfiguration bestimmt wird, in hinreichender Entfernung vor dem Körper jedoch die Flüssigkeit sich annähernd in Ruhe befindet — so gelangen wir zu einem ganz bestimmten Ausdrucke für den Widerstand, der nur Parameter enthält, die der Beobachtung leicht zugänglich sind.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns eines Koordinatensystems, in welchem die Wirbelbewegung stationär ist, d. h. wir lassen das Koordinatensystem selbst mit der Geschwindigkeit des Wirbelsystems $u = \frac{\zeta}{2l} \operatorname{Tg\,h} \frac{\pi h}{l}$ in demselben Sinne fortschreiten. Alsdann dürfen wir den Strömungszustand in genügender Entfernung von dem Körper als stationär betrachten. Vor dem Körper herrscht eine Parallelströmung von der Geschwindigkeit $-u$ relativ zu

diesem Koordinatensystem; während in genügender Entfernung hinter dem Körper die Geschwindigkeitskomponenten durch $-u + \frac{\partial \psi}{\partial y}$ und $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ gegeben werden, wobei ψ den imaginären Teil des komplexen Potentials:

$$\varphi + i\psi = \frac{i\zeta}{2\pi} \log \frac{\sin (z_0 - z) \frac{\pi}{l}}{\sin (z_0 + z) \frac{\pi}{l}}$$

bedeutet und $z_0 = \frac{l}{4} + ih$ gesetzt wurde. Die x-Axe wurde dabei in der Mittellinie der beiden Wirbelreihen gewählt und die y-Axe halbiert den Abstand zweier benachbarten Wirbelfäden mit entgegengesetztem Rotationssinn. Der Körper selbst eilt relativ zu diesem bewegten Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit $U - u$ vor, falls U seine absolute Geschwindigkeit bezeichnet.

Um den Widerstand zu erhalten, wollen wir die Impulsmenge[1]) berechnen, die in der Zeit $T = \frac{l}{U-u}$ auf den Körper übertragen wird, d. h. während eines Zeitraumes, in dem der Körper relativ zu unserem Koordinatensystem mit der Strecke l weitergeschoben wird; in dieser Zeit entstehen zwei neue Wirbelfäden, sonst erscheint aber der Strömungszustand genau reproduziert.

Zu diesem Zwecke grenzen wir einen festen Teil der Ebene seitlich durch zwei geraden Linien $y = \pm \eta$, vor und hinter dem Körper durch je eine Gerade $x =$ konst. ab, so aber, daß die hintere Begrenzungslinie nicht gerade durch einen Wirbelfaden gehen soll. Die in Betracht kommende Impulsmenge wird dann gegeben durch den Mehrbetrag an Impuls in dem abgegrenztem Raume abzüglich der durch die Grenzen hineingeführten Impulsmenge und des Zeitintegrals der Oberflächendrücke an der Begrenzung. Für einen symmetrischen Körper, auf den wir uns beschränken wollen, kommen nur nach der x-Axe gerichteten Impulsmengen in Betracht.

Der Mehrbetrag an Impulsmenge, der nach der Zeit T vorhanden ist, wird mit Rücksicht darauf, daß die Strömung sich nach der Zeit T gerade genau reproduziert, durch die Differenz der Doppelintegrale $\iint u(x, y)\, dx\, dy$ über zwei — auf die x-Axe senkrechten — Streifen von der Breite l (beide in hinreichender

1) Die Impulsmengen und der Widerstand beziehen sich auf die Längeneinheit in senkrechter Richtung zur Strömungsebene.

Entfernung von dem Körper) gegeben. Gehen wir mit den Grenzen zu $\eta = \infty$ über, so reduziert sich die Differenz der beiden Doppelintegrale auf

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{l} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dy \, dx$$

wobei ψ die oben angegebene Stromfunktion bedeutet. Die Integration liefert

$$J_1 = \varrho \zeta h$$

wie es übrigens durch Anwendung allgemeiner Sätze über Wirbelbewegungen sich unmittelbar ergiebt.

Die Summe der in der Zeiteinheit hereintransportierten Impulsmenge und der Resultierenden der Druckkräfte wird bei einer beliebigen stationären ebenen Potentialbewegung allgemein durch das geschlossene Integral $i(\int)\bar{w}^2 dz$ gegeben, wo $\bar{w} = \bar{u} - i\bar{v}$ gesetzt ist und $\bar{u}$, $\bar{v}$ die Geschwindigkeitskomponenten an der Begrenzungslinie bezeichnen. Für die nach der x-Axe gerichteten Komponente haben wir den imaginären Teil des Integrals $(\int)\bar{w}^2 dz$ zu nehmen. Berücksichtigt man, daß das geschlossene Integral $(\int)\bar{w}\, dz$ wegen der Kontinuität verschwinden muß, so ist leicht nachzuweisen, daß das ganze Integral sich auf

$$\int_{-\iota\infty}^{\iota\infty} \bar{w}^2 dz = \int_{\chi(-\iota\infty)}^{\chi(\iota\infty)} \bar{w}\, d\chi$$

reduzieren läßt, genommen längs jener Begrenzungslinie, die durch das Wirbelsystem hindurchgeht. Durch Integration erhalten wir für die entsprechende Impulsmenge für den Zeitraum T

$$J_2 = \varrho T \left\{ \frac{\zeta u h}{l} - \frac{\zeta^2}{2\pi l} \right\}.$$

Setzen wir für den zeitlichen Mittelwert der Widerstandskraft

$$W = \frac{J_1 - J_2}{T},$$

so erhalten wir — mit $T = \dfrac{l}{U-u}$ — die Formel

$$W = \varrho \zeta \frac{h}{l} (U - 2u) + \frac{\zeta^2}{2\pi l}.$$

Wir spezialisieren nun diese allgemeine Formel, indem wir auf Grund der Stabilitätsbedingung die Beziehung

$$u = \frac{\zeta}{2l} \mathfrak{Tg}\mathfrak{h} \frac{h\pi}{l} = \frac{\zeta}{l\sqrt{8}}$$

einführen und erhalten

$$W = \varrho l U^2 \left\{ \sqrt{8} \frac{u}{U} \left(1 - 2\frac{u}{U}\right) \frac{h}{l} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{u}{U}\right)^2 \right\}$$

wobei noch $\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{h}\, \sqrt{2}$ gesetzt werden muß. Führen wir noch in üblicher Weise durch die Formel

$$W = \psi_w \varrho b U^2$$

eine Widerstandsziffer ψ_w ein, wobei b eine geeignet gewählte Abmessung des Körpers bezeichnet, auf die wir den Widerstand beziehen wollen, so wird

$$\psi_w = \frac{l}{b} \left\{ \sqrt{8} \frac{u}{U} \left(1 - 2\frac{u}{U}\right) \frac{h}{l} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{u}{U}\right)^2 \right\}$$

oder

$$\psi_w = \frac{l}{b} \left\{ 0.799 \, \frac{u}{U} - 0.323 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \right\}.$$

Die Widerstandsziffer erscheint somit zurückgeführt auf zwei Verhältniszahlen $\frac{l}{b}$ und $\frac{u}{U}$: auf das Verhältnis der Teilung der Wirbelreihen zu der gewählten Abmessung des Körpers und das Verhältnis der Geschwindigkeit des Wirbelsystems zur Geschwindigkeit des Körpers [1]). Beide sind nach der Ähnlichkeitsregel innerhalb des Gültigkeitsbereiches des quadratischen Widerstandsgesetzes unabhängig von der Geschwindigkeit und den Abmessungen und hängen nur von der Gestalt des Körpers ab.

Diese beiden Parameter sind nun der Beobachtung leicht zugänglich. Die Verhältniszahl $\frac{l}{b}$ kann aus photographischen Aufnahmen unmittelbar entnommen werden, während $\frac{u}{U}$ mit der „Periode“ T in einfacher Weise zusammenhängt. Wir können zunächst die anschauliche Größe $l_0 = UT$ einführen, d. h. den Weg, den

1) In meiner ersten Note benutzte ich die Hilfsannahme, daß die Wirbelstärke $\zeta = Ul$ gesetzt werden kann; mit dieser Hilfsannahme reduziert sich die Anzahl der Parameter auf die einzige Verhältniszahl $\frac{l}{b}$. Es zeigt sich indessen, daß ζ im Allgemeinen kleiner ist, so daß durch die Wirbeln weniger Flüssigkeit gefördert wird, als wenn die Flüssigkeitsmasse zwischen den beiden Reihen als „totes Wasser“ mitgeschleppt würde. Dies steht im Einklang damit, daß infolge der hinter dem Körper entstehenden „Saugwirkung“ Flüssigkeit seitlich dem Wirbelraum zuströmen muß.

der Körper in der Zeit T zurücklegt. Alsdann ist $\frac{l}{l_0}$ ebenfalls eine Größe, die nur von der Gestalt abhängt und sie liefert $\frac{u}{U}$ durch die Formel

$$\frac{u}{U} = 1 - \frac{l}{l_0}.$$

Bei den erwähnten provisorischen Versuchen haben wir die Periode T für zwei schmale Platten von verschiedener Breite und für einen Kreiszylinder bestimmt und zwar bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Ähnlichkeitsregel fanden wir — wie zu erwarten ist — sehr gut bestätigt. Aber auch für die aus den Werten $\frac{u}{U}$ und $\frac{l}{b}$ ermittelten Widerstandsziffern zeigen eine recht gute Übereinstimmung. Wir erhielten für die senkrechte Platte den Wert $\psi_w = 0.80$ und für den Zylinder 0.46, während die zuverlässigsten Luftwiderstandsmessungen durch unmittelbare Kraftmessung die Werte $\psi_w = 0.78$ bezw. 0.45 liefern.

Über die Abhängigkeit der Krystallform von der Temperatur und die Rekrystallisation in Konglomeraten.

Von

G. Tammann.

Mit 2 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. März 1912.

1. Gegen die Annahme der Existenz einer Oberflächenspannung in den Begrenzungsebenen eines Krystalls ist vom Standpunkt der Atomistik nichts einzuwenden, nur ist zu beachten, daß die Oberflächenspannung auch in einer natürlichen Krystallebene mit der Richtung sich ändern wird, daß also die Oberflächenspannung eines Krystalls ein Vektor sein wird.

Während bei einer Flüssigkeit die Oberflächenspannung in den Capillaritätserscheinungen sich geltend macht, kann sich dieselbe an den Krystallen nicht äußern, solange die Oberflächenkräfte, α, die Festigkeitskräfte, f, nicht überwinden können.

Es braucht aber die Beziehung $f > \alpha$ nicht für alle Stoffe bis zu ihrem Schmelzpunkt zu bestehen. Wenn für eine bestimmte Richtung bei einer gewissen Temperatur die Beziehung $f_1 > \alpha_1$ in die umgekehrte übergeht, so sind in allen der betreffenden Richtung gleichwertigen Richtungen von selbst verlaufende Deformationen des Krystalls, die zur Bildung einer kontinuirlich gekrümmten Oberflächenzone führen, zu erwarten. Bei weiterer Temperatursteigerung treten dann in anderen Richtungsverbänden Deformationen auf, bis schließlich für alle Richtungsverbände die Beziehungen $f_1 < \alpha_1, f_2 < \alpha_2, \ldots, f_n < \alpha_n$ gelten. Bei der letzten Temperatur würde die Oberfläche des Krystalls ihren polyedrischen Charakter gänzlich verloren haben und sich in eine stetig gekrümmte Fläche, im einfachsten Fall in ein Rotationsellipsoid, verwandelt haben. Man steht hier vor einem der Bestimmung

der Oberflächen von Flüssigkeitsmassen, auf welche äußeren Kräfte nicht wirken, analogen aber komplizierterem Problem, bei dessen Lösung der vektorielle Charakter von α und k, der Laplaceschen Konstante zu berücksichtigen ist. Das Gleichgewicht für eine Raumkurve auf der Oberfläche des Krystalls wäre durch die Bedingung

$$k + \alpha\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}\right) = \text{const.}$$

bestimmt, wo die drei ϱ-Werte die Radien der drei Krümmungskreise bezeichnen.

So lange aber die Festigkeit die Oberflächenspannung übertrifft, kann die Oberflächenspannung die Gestalt polyedrischer Krystalle nicht beeinflussen. Dann wird bei der Bildung eines Krystalls der Vektor der linearen Krystallisationsgeschwindigkeit seine Begrenzung bestimmen.

Wenn es Stoffe gibt, bei denen $f - \alpha$ bei einer Temperatur unterhalb ihres Schmelzpunktes durch den Nullwert geht, so dürfen diese Stoffe bei Temperaturen, für die $f - \alpha$ negative Werte hat, nicht in Krystallpolyedern sondern in abgerundeten Krystalliten, deren Oberflächen kontinuierlich gekrümmt sind, krystallisieren, während dieselben Stoffe in Polyederform zur Ausscheidung gelangen müßten, wenn ihre Ausscheidung bei einer Temperatur stattfindet, für die $f - a$ positive Werte hat. Auch Übergänge von der Polyederform in die Form mit kontinuierlich gekrümmter Oberfläche sind wie erwähnt möglich. Man hätte hierbei an die eigentümliche Form mancher Diamantkrystalle mit gekrümmten Flächen, die sich in räumlichen Kurven schneiden, zu denken. In diesen Kurven ändert sich die Krümmung der Fläche noch diskontinuierlich, es entspricht daher die Begrenzung dieser Krystalle nicht dem Gleichgewichtszustande der an ihr wirkenden Kräfte. Solche Begrenzungen werden sich bilden können, wenn man den Krystall aus dem Temperaturgebiet, $f > \alpha$, in das höher liegende Temperaturgebiet oder umgekehrt bringt, und ihn dann, bevor sich das Gleichgewicht an seiner Oberfläche hergestellt hat, schnell abkühlt. Daß die Temperatur die Art der Krystallbegrenzung: durch Ebenen oder durch eine Fläche, bestimmt, könnte an einer Krystallart direkt nachgewiesen werden, wenn die Schmelzkurve der betreffenden Krystallart in einem Zweistoffsystem durch die Temperatur geht, bei der $f - 2\alpha = 0$ wird. Bei Temperaturen die höher als diese Temperatur liegen, hätte man die Bildung abgerundeter Krystalle (Krystalliten), bei tieferen Temperaturen die polyedrischen Krystalle zu erwarten. Nach

schneller Abkühlung des Gemenges von Schmelze und Krystallen, für das sich das Gleichgewicht auch bezüglich der Form hergestellt hat, würde man durch eine mikroskopische Untersuchung die betreffende Frage leicht entscheiden können.

Daß für eine große Reihe von Stoffen die Temperatur, bei der $f = \alpha$ ist, noch unterhalb ihres Schmelzpunktes liegt, wird durch die Erfahrung, daß sich in metallischen Konglomeraten häufig Krystallithe finden, bei denen die Schnittlinien einer Ebene durch ihre Begrenzungsfläche in sich geschlossene Kurven sind, bestätigt. Die Krystalle mit sphärischen und ellipsoidalen Begrenzungsflächen sind aller Wahrscheinlichkeit nach nicht als Sphärolithe anzusprechen, die aus von einem Punkte ausstrahlenden Krystallnadeln bestehen, denn es ist bisher noch nie gelungen in einem metallischen Konglomerat einen Sphärolithen nachzuweisen, obwohl, wenn solche vorliegen würden, sie jedenfalls zum Teil an ihrer radialfaserigen Struktur erkannt worden wären. Betreffs der Metalle und Metallverbindungen darf man wohl behaupten, daß ihre Ausscheidung aus binären Schmelzen mindestens ebenso häufig in sphäroidaler Form als in polyedrischer Form erfolgt, offenbar ist für diese Stoffe die Bedingung $f - \alpha = 0$ schon bei Temperaturen unterhalb der des Beginns ihrer Krystallisation erfüllt, während bei vielen Silikaten und den meisten organischen Stoffen das nicht der Fall ist, da sie in den polyedrischen Formen krystallisieren. Um dem Leser die Möglichkeit zu geben, die sphäroidalen Formen, die sich aus metallischen Schmelzen so häufig bilden, näher kennen zu lernen, sei auf einige Photogramme der Struktur von Legierungen hingewiesen, in denen sich besonders deutlich entwickelte Krystallite mit sphäroidaler Oberfläche finden. Die Temperaturen der Krystallbildung und ihre thermische Entstehungsgeschichte sind im Text jener Arbeiten, auf deren Tafeln im folgenden hingewiesen wird, enthalten.

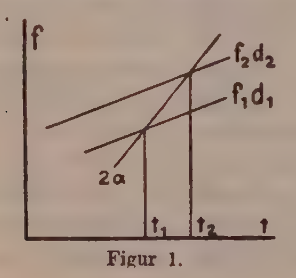
	Z. f. anorg. Chem.	Taf.	Fig.
Mg in Pb-Mg-Legierungen	44	1	2
Mg u. Al_3Mg_4 in Al-Mg-Legierungen	45	4	4 u. 6
Al u. Al-Ag-Mischkryst. mit 5 % Al	46	1	1 u. 2
FeSi in abgerundeten u. eckigen Kryst.	47	2	3, 4 u. 5
Verschiedene Mischkryst. von Au u. Zn	48	1	1, 3 u. 4
NiSb	49	2	3
Cu in Cu-Cd-Legierungen	49	7	1
Si in Mn-Si- „	50	1	2 u. 4
$PdPb_2$, Pd_2Pb u. PdPb	52	9	4 u. 6
Ag_3Sn	53	2	11

	Z. f. anorg. Chem.	Taf.	Fig.
Pt-Cu; Pt-Ag u. Pt-Au-Mischkryst.	54	3	1, 3, 4 u. 6
Gesättigter Mischkryst. mit 33 % Mn u. 67 % Sb	55	1	3
CoAl	57	4	4, 5 u. 6
Ni_3Sn_2	57	4	4, 5 u. 6
Mischkryst. von Co-Cu mit 10 % Cu	57	1	2
„ Fe-Cu „ 3 % Cu	57	1	4
Co_2Sn	59	2	4
CoSb	59	3	4
CoSi	59	6	3

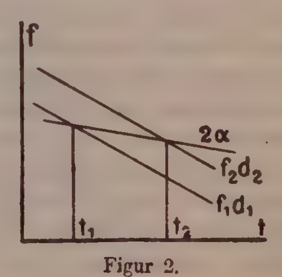
2. Um zu einer Bestimmung der Oberflächenspannung in einem isotropen, festen Stoff zu gelangen, gehen wir von einer Lamelle, z. B. einer Glaslamelle aus. Die absolute Festigkeit der Lamelle von der Dicke, d, pro 1 cm Breite sei f in gr, diese Festigkeit wird der Dicke der Lamelle proportional sein. Erwärmt man die Lamelle, so wird eine Kontraktion derselben infolge der Oberflächenspannung eintreten und zwar bei der Temperatur, bei der $f = 2\alpha$ wird.

Man kann nun zeigen, daß, gleichgültig ob f mit der Temperatur zu- oder abnimmt, die Temperatur der Kontraktion mit wachsender Lamellendicke zunehmen wird.

In Fig. 1 und 2 stellen die beiden einander parallel verlaufenden Linien f_1 und f_2 die Abhängigkeit der absoluten Lamellenfestigkeit von der Temperatur dar, und zwar wächst mit wachsendem Index die Lamellendicke, d. Wenn f mit der Temperatur wächst, Fig. 1, so muß 2α schneller als f wachsen, denn sonst würde 2α bei tieferen Temperaturen größer als f und bei höheren kleiner als f sein, die Lamelle würde also bei tiefen Temperaturen beweglich und bei höheren starr sein. Da 2α mit der Temperatur schneller als f wächst, so muß für die dickere Lamelle die Gleichung $f = 2\alpha$ bei höherer Temperatur befriedigt sein als für die dünnere Lamelle.



Figur 1.



Figur 2.

Wenn aber f mit steigender Temperatur abnimmt, Fig. 2, so kann 2α mit steigender Temperatur wachsen oder abnehmen, darf aber nicht schneller als f abnehmen, denn würde 2α schneller als f mit wachsender Temperatur abnehmen, so würde die Lamelle wieder bei höheren Temperaturen starr sein müssen. In den beiden möglichen Fällen der Temperaturänderung von 2α bei negativem Temperaturkoeffizienten von f muß aber wiederum der Schnittpunkt der 2α-Linie mit der f_2-Linie der dickeren Lamelle bei höherer Temperatur als der Schnittpunkt der 2α-Linie mit der f_1-Linie der dünneren Lamelle liegen.

Bestimmt man für Lamellen aus amorphen Stoffen die Temperaturen ihrer Schrumpfung und die Temperaturabhängigkeit ihrer Elastizitätsgrenze, so kann man für Lamellen verschiedener Dicke die Kurven f_1, f_2 etc. zeichnen und in den Temperaturpunkten des Beginns ihrer Schrumpfung Senkrechte errichten, die Schnittpunkte dieser mit den zugehörigen f-Linien, geben Punkte der 2α-Linie an.

Man erfährt also in dieser Weise nicht nur einen Wert von α sondern auch die Temperaturänderung von α.

3. Bei Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der Oberflächenspannung von anisotropen Lamellen hat man zu beachten, daß die Zahl der freien Oberflächen in anisotropen Lamellen nicht so sicher bestimmt ist wie in einer isotropen Lamelle. Zur Herstellung anisotroper Lamellen hat man zwei Wege, man kann durch Spaltung eine Lamelle, wie z. B. aus Glimmer, und dann aus ductilen Krystallen von Au, Ag und Cu oder ihren Konglomeraten durch Walzen und Hämmern Lamellen von sehr geringer Dicke herstellen. Der erste Weg der Darstellung einer Lamelle kann leicht zur Überanstrengung der darzustellenden Lamelle selbst, und dadurch zur Bildung von Gleitflächen, welche die Lamelle in eine unbekannte Anzahl dünnerer Lamellen zerteilen, führen. Der zweite Weg führt über die Verteilung des Konglomerates durch Bildung von Gleitflächen und Nebeneinanderordnung der entstandenen Lamellen zu einem dünnen Blatt, welches aus sich teilweise überdeckenden Lamellen besteht. Wenn auch die Oberflächenkräfte, welche in einer Gleitfläche wirken, wahrscheinlich nicht ganz den Betrag der in zwei freien Oberflächen wirkenden Kräfte erreichen mögen, so ist doch die Existenz einer Gleitfläche in ihrer kontrahierenden Wirkung sicher nicht zu vernachlässigen, da auf der Gleitfläche bestimmt eine Lockerung des Molekularzusammenhanges im Raumgitter stattgefunden hat. Daß diese Lockerung immer bis zum Betrage der Lockerung an zwei

freien Oberflächen vorgeschritten ist, mag in der Regel nicht ganz zutreffen. Man wird aber wohl einen geringeren Fehler machen, wenn man jede Gleitfläche in ihrer Wirkung als zwei freie Oberflächen zählt, als wenn man ihre Wirkung vernachlässigt.

Man ersieht nun, daß für eine anisotrope Lamelle in der Regel nicht die Gleichung: $\alpha = \frac{f_{T_s}}{2}$, wo f_{T_s} die absolute Festigkeit der Lamelle bei der Schrumpfungstemperatur T_s bedeutet, gelten wird, sondern die Gleichung $\alpha = \frac{f_{T_s}}{n}$, wo n die Anzahl der Oberflächen bezeichnet. Da n gleich ist der doppelten Anzahl von Gleitflächen plus 2, so ist α nicht sicher zu ermitteln; immerhin aber hat der Wert von f_{T_s} für eine bestimmte Dicke der Lamelle, deren Vorgeschichte bekannt ist, ein Interesse.

Durch Änderung der Anzahl von Gleitflächen pro Dickeneinheit einer Metallamelle kann nicht nur der absolute Wert von α sondern auch das Vorzeichen seines Temperaturkoeffizienten stark beeinflußt werden. Nimmt in der Lamelle mit steigender Dicke die Zahl der Gleitflächen pro Dickeneinheit ab, so wird dadurch die Kraft, welche die Schrumpfung bewirkt, mit wachsender Lamellendicke abnehmen und die absolute Festigkeit der Lamelle erst bei höheren Temperaturen überwunden werden, als wenn die Zahl der Gleitflächen pro Dickeneinheit von der Dicke der Lamelle unabhängig wäre. Dadurch würden die beobachteten Werte des Temperaturkoeffizienten von α kleiner ausfallen als die wahren und ein wahrer positiver Temperaturkoeffizient könnte sogar in einen scheinbar negativen verwandelt werden.

Die Ansicht, daß eine in der Lamelle vorhandene Gleitfläche in ihrer Wirkung sich der von zwei freien Oberflächen nähert, wurde dadurch begründet, daß auf einer Gleitfläche der Zusammenhang des Raumgitters stark gelockert ist, wenn auch vielleicht noch nicht so weit wie an zwei aufeinandergelegten freien Oberflächen. Aber auch die Beobachtung weist darauf hin, daß die Gleitflächen auf die Temperatur des Beginns der Schrumpfung von Lamellen in Konglomeraten eine ähnliche Rolle spielen wie sie den freien Oberflächen zukommt. Man findet nämlich, daß die ersten Anzeichen der durch Schrumpfung bedingten Rekrystallisation in einem metallischen Konglomerat bei um so tieferen Temperaturen eintreten je größer die Zahl der Gleitflächen in der Volumeneinheit des Konglomerates ist, es scheint also eine Gleitfläche sehr ähnlich einer freien Oberfläche zu wirken. Als Beispiel solcher Beobachtungen sei hier nur angeführt, daß in einem Goldwürfel, in

dem durch Druckdeformation eine relativ geringe Anzahl von Gleitflächen hervorgerufen war, der durch die Gleitflächen hervorgerufene Verfestigungseffekt zwischen 750 und 800° verschwand [1]), in Golddrähten, in denen durch Ziehen eine sehr viel größere Anzahl von Gleitflächen erzeugt war, konnte Herr Credner mikroskopisch nach Erhitzen auf nur 400° deutlich die Bildung größerer Krystallite aus den Lamellen-Paketen beobachten und die ersten Änderungen im elektrischen Leitvermögen konnten von ihm schon bei 100° bemerkt werden.

4. Die Tatsache der Schrumpfung von Metalllamellen bei Steigerung ihrer Temperatur läßt eine Deutung der besonders in metallischen Konglomeraten bei höheren Temperaturen so häufig zu beobachtenden Erscheinungen der Rekrystallisation zu. Eine befriedigende Erklärung dieser Erscheinungen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß sich bei höheren Temperaturen noch weit unterhalb des Beginns der Schmelzung aus kleineren Krystalliten größere bilden, scheint mir nicht vorzuliegen, da man mit der Annahme einer Erhöhung des Dampfdruckes mit abnehmender Korngröße, also der Auffassung der Rekrystallisation als Destillationsprozeß kaum auskommen dürfte.

Man beobachtet in Konglomeraten, die sich direkt aus ihren Schmelzen gebildet haben, daß sich bei Temperaturen von etwa 100° unterhalb ihrer vollständigen Krystallisation im Laufe einiger Stunden aus kleinen Krystalliten größere bilden; ob es sich in diesen Fällen um eine Wirkung der Oberflächenspannung handelt, ist nicht zu entscheiden, so lange nicht eine direkte Vereinigung kleinerer zu größeren Krystallen beobachtet ist. Es könnten auch infolge von Temperaturschwankungen die größeren Krystalle auf Kosten der kleineren wachsen, indem der Stofftransport durch sehr geringe Mengen von flüssigen Resten, in denen sich die Beimengungen angesammelt haben, vermittelt wird. Da aber diese Art der Rekrystallisation besonders in Konglomeraten mit abgerundeten Krystalliten beobachtet wird, bei denen also $\alpha > f$ ist, so wird wahrscheinlich die Rekrystallisation mindestens zum Teil auch durch eine direkte Vereinigung kleinerer Krystallite, die durch den Druck der gekrümmten Oberflächen vereinigt werden, bedingt werden.

Noch viel auffallender sind die Erscheinungen der Rekrystallisation in metallischen Konglomeraten, die einer mechanischen Bearbeitung im kalten oder heißen Zustande unterworfen wurden.

1) Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1911, S. 187.

Bei diesen tritt die Rekrystallisation bei sehr viel tieferen Temperaturen ein als bei denen, die nicht bearbeitet wurden, und zwar kann gezeigt werden, daß die Temperatur des Beginns der Rekrystallisation um so tiefer liegt, je höher der Grad der Veränderung der ursprünglichen Struktur durch Schmieden, Walzen oder Ziehen war. Der Grad der Bearbeitung, Überanstrengung eines metallischen Konglomerates ist proportional der Anzahl von Gleitflächen in der Volumeneinheit, die durch die Überanstrengung erzeugt werden. Da man jede Gleitfläche offenbar als zwei freie Oberflächen zu rechnen hat, so ist ein bearbeitetes Metall als ein Paket von Lamellen zu betrachten, und es leuchtet ein, daß die mit der Temperatur in der Regel abnehmenden Festigkeitskräfte, deren Summe in der Volumeneinheit als unabhängig von der Zahl der Gleitflächen betrachtet werden kann, bei um so tieferer Temperatur überwunden werden je größer die Zahl der Gleitflächen in der Volumeneinheit ist. Bei der Temperatur, bei der $\Sigma 2\alpha > \Sigma f$ ist, wird die Kontraktion und die Vereinigung der Lamellenpakete zu wohl ausgebildeten Krystalliten beginnen, die sich schließlich zu dicht aneinander liegenden Polyedern ausbilden.

Man sieht also, daß die Rekrystallisation bearbeiteter Metalle eine notwendige Folge der Bildung von Gleitflächen in ihnen ist, und als eine der Schrumpfung von Metalllamellen analoge Erscheinung aufzufassen ist. Daß die Kräfte, welche zu den Verschiebungen während der Krystallisation notwendig sind, offenbar hierzu hinreichen, ist durch den Nachweis, daß sie die Festigkeitskräfte überwinden können, sicher gestellt.

5. Mit der Rekrystallisation in Konglomeraten ist die Erscheinung, daß in einer gesättigten Lösung kleinere Krystalle zu einer zusammenhängenden Krystallmasse zusammenwachsen, nicht zu verwechseln. Man hat diese Art der Umkrystallisation darauf zurückzuführen gesucht, daß die Löslichkeit kleiner Krystalle größer ist als die größerer Krystalle. Man hat sich aber keine Rechenschaft darüber gegeben, ob diese Annahme zur Erklärung der Erscheinung hinreicht, denn man hat weder geprüft ob das Zusammenbacken einzelner Krystalle unter einer gesättigten Lösung auch bei konstanter Temperatur eintritt und in welchem Maße, noch hat man sich Rechenschaft zu geben gesucht, ob der Unterschied in der Löslichkeit von Krystallen verschiedener Größe hinreicht, um bei gegebenen Diffusionsverhältnissen jener Erscheinung zu genügen. Die Erscheinung des Zusammenbackens von feuchten Krystallmassen, die Temperaturschwankungen ausgesetzt sind und gesättigte Lösung enthalten, kann sicher nur zu einem sehr kleinen Teil auf die Ver-

schiedenheit der Löslichkeit bei verschiedener Korngröße zurückgeführt werden, denn man beobachtet, daß das Zusammenbacken um so schneller vor sich geht, je größer der absolute Temperaturkoeffizient der Löslichkeit $\frac{dc}{dt}$ ist, und je größer und zahlreicher die Temperaturschwankungen Δt in dem Gemenge von Krystallen und gesättigter Lösung sind. Man darf die Geschwindigkeit v des Zusammenwachsens lockerer Krystalle in Berührung mit ihrer gesättigten Lösung durch die Beziehung $v = k.n.\Delta t \frac{dc}{dt}$ darstellen. Hier bedeutet k einen mit der Natur des Systems veränderlichen Wert, und n die Zahl der Temperaturschwankungen in der Zeiteinheit.

Dadurch wird zum Ausdruck gebracht, daß die Erscheinung ausschließlich durch Temperaturschwankungen hervorgebracht wird. Wollte man noch ein von der Löslichkeitsdifferenz großer und kleiner Krystallkörner abhängiges Glied in seiner Wirkung auf v studieren, so müßte vor allem Δt zum Verschwinden gebracht werden.

Um den Einfluß von $\frac{dc}{dt}$ auf das Zusammenbacken zu erweisen, wurden drei gesättigte Lösungen mit recht verschiedenen $\frac{dc}{dt}$-Werten in Berührung mit ihren Bodenkörpern, die als lockere Pulver in das betreffende Lösungsmittel geschüttet wurden, in gut verschlossenen Flaschen den Schwankungen der Zimmertemperatur, die in 24 Stunden 7^0 betrugen, ausgesetzt. Entsprechend der Reihenfolge der $\frac{dc}{dT}$-Werte, für Naphthalin in Alkohol 0.95, für Kalialaun in Wasser 0.14 und für Bleichlorid in Wasser 0.016 ergab sich, daß die anfänglich lockeren Naphthalinkrystalle schon nach 24 Stunden soweit mit einander verklebt waren, daß sich die Masse beim Schütteln der Flasche nicht mehr in einzelne Krystalle verteilte, dasselbe trat für die Alaunkrystalle erst nach 4×24 Stunden und bei dem Bleichlorid auch nach einem Monat nicht ein, obwohl sich an der Flaschenwand einige Bleichloridkrusten gebildet hatten.

Ueber einen Boltzmannschen Beweis des zweiten Hauptsatzes.

Von

Paul Hertz.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 18. Mai 1912.

Eine kürzlich erschienene statistisch-mechanische Untersuchung des Herrn L. S. Ornstein[1]) gibt mir Veranlassung, einige verwandte Ueberlegungen zu veröffentlichen. Das Neue an dem zuerst von Einstein[2]) eingeschlagenen und von Ornstein weiter verfolgten Wege besteht darin „sich frei zu machen von besonderen Voraussetzungen über den Bau der Systeme, auf welche die Betrachtungen angewandt werden“[3]). Zu diesem Zwecke werden die für den Zustand in phänomenologischem Sinne maßgebenden Variabeln $\varDelta$ eingeführt und die Entropie eines Zustandes als Wahrscheinlichkeit dafür definiert, daß die $\varDelta$ ihm entsprechen — abgesehen von einer ein für alle mal fest gewählten Schwankung. Diese Methode wird einen Fortschritt darstellen können, sobald es sich um die Berechnung der Entropie handelt; wenn aber nur nach ihrer Existenz gefragt wird, d. h. nach dem Vorhandensein einer dem zweiten Hauptsatze genügenden Funktion, dann leisten die bisherigen Ansätze vollkommen Ausreichendes. Eine der frühesten Ableitungen des zweiten Hauptsatzes aus statistisch-mechanischen Prinzipien wurde von Boltzmann gegeben[4]). Da sein Beweis aber nicht allgemein genug ist, sondern sich, von Zwangsbedingungen

1) L. S. Ornstein, K. Akademie v. Wetensch. te Amsterdam 24. Febr. 1912 S. 840—853.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 33 1910. S. 1276.

3) L. S. Ornstein l. c. S. 840.

4) L. Boltzmann, Werke Bd. I S. 288 ff.

absehend, nur auf ein System freier Punkte bezieht, so möge es hier unternommen werden, ihn in etwas erweiterter Form zu erneuern.

Es fällt nicht schwer, generalisierte Koordinaten einzuführen; dabei wird es freilich nötig, von den Gibbsschen[1]) Begriffen der Konfigurationsausdehnung und Geschwindigkeitsausdehnung Gebrauch zu machen. Das ist hier geschehen; aber um dem Beweis einen möglichst elementaren Charakter zu geben, soll eine einfache geometrische[2]) Einführung eben dieser bei Gibbs analytisch definierten Größen vorangehen. So wird man vielleicht finden, daß die ganze Darstellung, der kein neuer Gedanke zu Grunde liegt, eine übersichtliche Zusammenfassung des bekannten Bestandes enthält. Uebrigens wird man auf diesem Wege zu Formeln geführt, die mit denen des Herrn Ornstein große Verwandtschaft zeigen.

§ 1. Konfigurationsausdehnung und Geschwindigkeitsausdehnung.

Wir wollen die generalisierten Koordinaten q und die Impulse p eines mechanischen Systemes als Punkte eines $2n$-dimensionalen Raumes deuten. Durch Auswahl einer Menge von Bewegungsphasen, d. h. von Lagen und Geschwindigkeitszuständen aus der Gesamtheit aller möglichen, erhält man ein Phasengebiet, und es läßt sich leicht zeigen, daß das darüber erstreckte Integral

$$\int dq_1 \ldots dp_n$$

stets denselben Wert besitzt, einerlei, welche besonderen Variabeln man als Koordinaten verwendet[3]). Dieser Wert kann also als Größe des Gebietes angesehen werden und heißt Phasenausdehnung.

Wenn aber aus der Gesamtheit aller Lagen eine Menge ausgewählt wird, oder, wie wir sagen wollen, ein Konfigurationsgebiet gegeben ist, so wird dadurch zwar auch im n-dimensionalen Raum der q ein Teilraum abgegrenzt; aber seine Größe $\int dq_1 \ldots dq_n$ wird verschiedene Werte haben je nach Wahl der q, kann also nicht als Maß der Konfigurationsausdehnnng gelten.

---

1) J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics. New York 1902. Deutsch von Zermelo, Leipzig 1905.

2) Das ist ganz im Sinne derjenigen Bestrebungen, die den Verfasser bei einer früheren Arbeit (Ann. d. Phys. Bd. 33 1910 S. 225) geleitet haben.

3) J. W. Gibbs l. c. cap. 1.

In dieser Verlegenheit erinnern wir uns eines entsprechenden geometrischen Problemes. Sei ein gewöhnlicher dreidimensionaler Raum xyz gegeben und darin eine unendliche Ebene. Die Punkte dieser Ebene werden durch 2 Koordinaten festgelegt. Gleichwohl kann, wenn man wechselnde Koordinatensysteme verwendet, das Integral $\int dx\,dy$ nicht als Inhaltsmaß für Stücke dieser Ebene gebraucht werden. Ein solches wird aber durch einen Ausdruck geliefert, der folgenden beiden Bedingungen genügt:

1) er muß bei einem und demselben Koordinatensystem für verschiedene Ebenenstücke dem Integrale $\int dx\,dy$ proportional sein.

2) er muß für dasselbe Flächenstück bei verschiedenen Koordinatensystemen seine Größe beibehalten.

Nun sind der Inhalt $V = \int dx\,dy\,dz$ eines Raumstückes und die Entfernung $\nu = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ zweier Punkte invariante Größen. Wenn also V das Volumen zwischen unserm Flächenstück und einem in der Entfernung ν davon gelegenen bezeichnet, so wird der Ausdruck

$$\lim_{\nu = 0} \frac{V}{\nu}$$

den aufgestellten Forderungen genügen.

Aehnlich verfahren wir in unserm Falle. Wir beschränken die Betrachtung zunächst auf sehr kleine Konfigurationsgebiete. Als Konfigurationsausdehnung bezeichnen wir einen Ausdruck, der

1) um einen Punkt des n-dimensionalen q-Raumes herum bei unverändertem Variabelsystem dem Integrale $\int dq_1 \ldots dq_n$ proportional ist.

2) bei unverändertem Lagengebiet — d. h. bei Betrachtung derselben Mengen von Lagen — und Uebergang zu einem neuen Variabelsystem denselben Wert besitzt.

Einen solchen Ausdruck findet man, wenn man beachtet, daß im Phasenraume das Volumen V eines Teilraumes und die kinetische Energie ε_p einer Phase vom benutzten Variabelsysteme unabhängig sind. Sei jetzt eine Lagenmannigfaltigkeit gegeben, die im Raume der q einen sehr kleinen Raum abgrenzt, so werden dadurch im Phasenraume noch keine Phasen festgelegt. Wir wollen nun eine beliebige positive Zahl $\hat{\varepsilon}_p$ annehmen, und die Gesamtheit der Phasen betrachten, deren Lagen zur gegebenen Mannigfaltigkeit gehört und deren kinetische Energie $\varepsilon_p < \hat{\varepsilon}_p$ ist (Fig. 1). Bezeichnet V das von ihnen erfüllte Volumen, und sind s und C beliebige aber ein für alle mal fest zu wählende Zahlen, so genügt der Ausdruck

$$dK = C \frac{V}{\hat{\varepsilon}_p^s} \tag{1}$$

offenbar der zweiten gestellten Bedingung.

Bedeutet ferner $\overline{V}$ das Volumen, das die Impulse der betrachteten Phasen im n-dimensionalen Raume der p einnehmen, so ist

$$V = \overline{V} dq_1 \dots dq_n$$

(vgl. Fig. 1, wo nur eine Koordinate q und ein Impuls p gezeichnet wurde), also ist

$$dK = C \frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^s} dq_1 \dots dq_n. \tag{2}$$

Fig. 1.

Es ist somit auch die erste Forderung erfüllt, und dK kann als Konfigurationsausdehnung gelten. Die Ausdehnung K endlicher Konfigurationsgebiete kann dann wegen der ersten Bedingung durch Integration nach der Formel

$$K = \int dK$$

definiert werden.

Falls nun s so gewählt werden kann, daß $\frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^s}$ mit abnehmendem $\hat{\varepsilon}_p$ endlich bleibt, so leistet der Ausdruck

$$dK = k\, dq_1 \dots dq_n \tag{3}$$

$$k = C \lim_{\hat{\varepsilon}_p = 0} \frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^s} \tag{4}$$

dieselben Dienste, wie (2). Nun ist

$$s = \frac{n}{2} \tag{5}$$

in der Tat ein solcher Wert, da $\overline{V}$ das Volumen eines quadratischen Raumes im p-Raume darstellt; also kann man setzen

$$k = C \lim_{\varepsilon_p = 0} \frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^{\frac{n}{2}}} \tag{6}$$

oder auch, da für diese Wahl des s der Quotient unabhängig von $\hat{\varepsilon}_p$ wird,

$$k = C \frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^{\frac{n}{2}}}. \tag{7}$$

C kann dabei ganz beliebig gewählt werden[1]).

---

1) Gibbs wählt die Größe C so, daß man im Falle der freien Punkte für k einen besonders einfachen Ausdruck erhält. Die kinetische Energie eines Systemes von $\frac{n}{3}$ freien Punkten mit der Masse m beträgt

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2m} \sum p^2. \tag{1}$$

Daher ist $\overline{V}$ das Volumen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius $\sqrt{2m\varepsilon_p}$, also (siehe z. B. P. H. Schoute mehrdimensionale Geometrie Bd. II. Leipzig 1905. S. 289)

$$\overline{V} = \varepsilon_p^{\frac{n}{2}} (2m)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{2}$$

Setzt man also

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, \tag{3}$$

so wird in diesem Falle

$$k = m^{\frac{n}{2}}. \tag{4}$$

Diese Wahl des C kann man beibehalten, dann ist allgemein

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\overline{V}}{\hat{\varepsilon}_p^{\frac{n}{2}}}. \tag{5}$$

Uebrigens kann k auch leicht berechnet werden:

Sei

$$2\varepsilon_p = \sum \alpha_{i\varkappa} p_i p_\varkappa \tag{6}$$

die Mannigfaltigkeit der Phasen von der kinetischen Energie ε_p. Diese Fläche habe, auf Hauptaxen transformiert, die Gleichung

$$2\varepsilon_v = \sum \beta_i \mathfrak{p}_i^2, \tag{7}$$

wobei

$$|\alpha_{ik}| = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \tag{8}$$

ist. Da eine solche Transformation das Volumen nicht ändert, so ist $\overline{V}$ gleich dem Volumen, das von der durch (7) definierten Fläche umschlossen wird, also

Aus der Invarianz des Phasenelements $dq_1 \dots dp_n$ folgt, daß auch

(8) $$dG = g \, . \, dp_1 \dots dp_n$$

von der Wahl der Koordinaten unabhängig ist, wenn

(9) $$g = \frac{1}{k} = \frac{1}{C} \frac{\hat{\varepsilon}_p^{\frac{n}{2}}}{\overline{V}}$$

gesetzt wird. Man bezeichnet den Ausdruck (8) als Geschwindigkeitsausdehnung[1]). Der Wert einer endlichen Geschwindigkeitsausdehnung berechnet sich nach

$$\int dg = \int g \, dp_1 \dots dp_n.$$

Wir können also hiernach das Phasendifferential, das in den Integralen vorkommt, zerlegen und

(10) $$dq_1 \dots dp_n = dK \, dG$$

setzen.

Bezeichnen wir mit V_p die Geschwindigkeitsausdehnung aller Phasen von einer bestimmten Konfiguration und von kinetischen Energien $\varepsilon_p < \varepsilon_p^*$, so ist nach (8) und (9)

$$V_p(\varepsilon^*) = \frac{1}{C} \frac{\hat{\varepsilon}_p^{\frac{n}{2}}}{\overline{V}} \int^{\varepsilon_p^*} dp_1 \dots dp_n.$$

$$\overline{V} = \varepsilon_p^{\frac{n}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \dots \beta_n}}$$

d. i. nach (8)

(9) $$\overline{V} = \varepsilon_p^{\frac{n}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_{ix}|}}.$$

Es ist also nach Formel (5) dieser Anmerkung

$$k = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_{ix}|}}$$

oder nach (6)

(10) $$k = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial p_i \, \partial p_k}\right|}}.$$

Gibbs bezeichnet die Größe k mit $\Delta_{\dot{q}}$ (vgl. Formel 139 und folgenden Text und Formel 155).

1) Die Konfigurationsausdehnung bezieht sich auf eine Mannigfaltigkeit von Lagen, wobei über die Geschwindigkeiten nichts ausgesagt wird, die Geschwindigkeitsausdehnung auf eine Mannigfaltigkeit von Impulsen, bei festgehaltener Konfiguration.

Nun können wir aber

$$\hat{\varepsilon}_p = \varepsilon_p^*$$

wählen; es wird dann

$$\int^{\varepsilon_p^*} dp_1 \ldots dp_n = \overline{V}.$$

woraus folgt

(11) [1] $$V_p(\varepsilon^*) = \frac{1}{C}\, \varepsilon_p^{*\frac{n}{2}}.$$

Das Volumen aller Phasen im Phasenraum, die eine Energie $\varepsilon < \varepsilon^*$ besitzen, bezeichnet man mit $V(\varepsilon^*)$. Es ist also

(12) [2] $$V(\varepsilon^*) = \int^{\varepsilon_q = \varepsilon^*} dK\, V_p(\varepsilon^* - \varepsilon_{q_{K}}).$$

Hier ist über alle Konfigurationen zu integrieren und die potentielle Energie als Funktion der jeweiligen Konfiguration anzusehen. An der oberen Grenze $\varepsilon_q = \varepsilon^*$ ist der Integrand $V_p = 0$.

§ 2. Wahrscheinlichkeit der Konfiguration.

Betrachten wir nun die Zeitgesamtheit eines Systemes, das alle möglichen Phasen gleicher Energie ε^* zyklisch durchläuft, und werde auf der Fläche $\varepsilon = \varepsilon^*$ ein kleines Stück gegeben, so wird die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß in einem bestimmten Augenblicke der Phasenpunkt des Systemes sich gerade in diesem Stücke aufhält, durch folgende Vorschrift gefunden: Man suche die benachbarte Energiefläche $\varepsilon = \varepsilon^* + \delta\varepsilon^*$ auf und konstruiere den zwischen den beiden Flächen gelegenen Zylinder, der das gegebene Stück zur Basis hat. Seinem Volumen ist dW proportional; es ist nämlich, wenn

(13) $$\omega = \frac{dV}{d\varepsilon}$$

gesetzt wird

$$dW = \frac{1}{\omega\delta\varepsilon^*}\int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon^* + \delta\varepsilon^*} dq_1 \ldots dp_n \text{ [3]}$$

---

1) Also nach Anm. 1 S. 570 Formel 3

$$V_p = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\, \varepsilon_p^{\frac{n}{2}}$$

(Gibbs Formel 288).

2) Gibbs Formel 304; Ornstein l. c. S. 843 f.

3) A. Einstein. Ann. d. Phys. 14 p. 365. 1904. P. Hertz. Ann. d. Phys. 33 p. 239 f. 1910.

oder nach (8) und (10)

$$dW = \frac{1}{\omega \delta \varepsilon^*} \int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon^* + \delta \varepsilon^*} \int dK g \, dp_1 \ldots dp_n.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System in dK aufhält, beträgt also

(14) $$dW = dK \cdot \varkappa$$

$$\varkappa = \frac{1}{\omega \delta \varepsilon^*} \int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon^* + \delta \varepsilon^*} g \, dp_1 \ldots dp_n,$$

das ist nach der Definition von V_p

(15) [1] $$\varkappa = \frac{1}{\omega} \frac{dV_p}{d\varepsilon_p}.$$

§ 3. Der Boltzmannsche Beweis des zweiten Hauptsatzes.

Wir sind jetzt vorbereitet, den Boltzmannschen Beweis allgemein darzustellen. Denken wir uns ein mechanisches System $\sum$, das nicht aus freien Punkten zu bestehen braucht und zyklisch alle Phasen durchlaufen möge, die mit seiner Energie verträglich sind. Es können nun zwei Arten von Prozessen stattfinden. Erstens kann, ohne daß der Mechanismus sich ändert, dem Systeme Energie zugeführt werden, zweitens können Aenderungen des Mechanismus vorkommen. Eine solche Mechanismusänderung ist wiederum auf zwei Weisen herbeizuführen.

Entweder wird die Kraftfunktion des Systemes $\sum$ geändert, und das ist nur so möglich, daß gewisse Massen M, die während der molekularen Schwankungen nahezu ruhen, in größeren Zeiten eine allmähliche Verschiebung erleiden [2]. Oder die Bedingungsgleichungen und Ungleichungen werden geändert. Doch wollen wir diese zweite Möglichkeit als einen Grenzfall der ersten ansehen. Dazu müssen wir diejenigen Zwangsbedingungen, die einer Aenderung fähig sind, auffassen als hervorgerufen durch Kräfte, die äußerst stark werden,

---

1) L. Boltzmann, Werke I S. 283; Ornstein l. c. S. 842..

2) Damit die M in Ruhe bleiben, müssen auf sie äußere Kräfte wirken, die von festen Massen M_0 ausgehen. Die wechselseitige potentielle Energie zwischen M_0 und M soll nicht in die potentielle Energie ε_q des Systemes $\sum$ einbezogen werden. Geschähe das, so könnten wir nicht durch Arbeitsleistung die Energie vermehren. Wohl aber ist in ε_q die potentielle Energie enthalten, die aus der Wirkung von M auf die Teile von $\sum$ stammt.

sobald eine jener scheinbaren Nebenbedingungen verletzt wird. Wir haben es dann nur mehr mit Verschiebungen der Massen M zu tun[1]).

Sei jetzt die Lage einer solchen Masse M durch a charakterisiert und bezeichne F die äußere[2]) auf Aenderung von a wirkende Kraft, so ist

(16) $$F = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial a} + \frac{\partial \varepsilon_q}{\partial a}.$$

Es ist aber F von vornherein so gewählt, daß die Veränderung von a nur in kleinen periodischen Schwankungen erfolgt. Also ist

(17) $$F = \overline{\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial a}}$$

oder

(18) $$F = \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} - 2\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial a}}$$

Betrachten wir nun den Uebergang zu einem neuen a. Weil nach unserer Annahme die Aenderung von a im Grunde keine Aenderung von Zwangsbedingungen vorstellt, so sind mit dem neuen Werte von a dieselben Lagen, wie früher, verträglich, und es können die q als dieselben Funktionen der cartesischen Koordinaten gewählt werden. ε_p wird dieselbe Funktion der q, also auch der p bleiben, und gleiche Lagenmannigfaltigkeiten haben dieselbe Konfigurationsausdehnung. Dagegen wird ε_q von a abhängen und daher ε eine Funktion von q, p, a sein. Aus diesen Betrachtungen folgt

(19)[3]) $$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial a} = 0.$$

und somit nach (17) und (18)

(20) $$F = \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}}.$$

Bringt man nun durch eine unendlich kleine Ueberkraft einer Verschiebung δa hervor, so geht außen[4]) die potentielle Energie $F\delta a$

1) So wird zum Beispiel die Bedingungsungleichung, der die Moleküle eines abgeschlossenen Gases genügen, durch Niederdrücken eines Stempels (M) verändert. Falls das Sinken durch die Schwerkraft hervorgerufen wird, stellt die Erde das M_0 dar. In einem solchen Vorgange sehen wir aber keine wahre Aenderung von Bedingungsungleichungen, sondern nur eine Aenderung der Kraftfunktion von $\sum$. Gleichwohl führt eine solche Auffassungsweise nicht auf den Fall der freien Punkte zurück. Der Zustand der einzelnen Moleküle muß nach wie vor durch generalisierte Koordinaten gegeben werden, schon damit ihre Rotationen berücksichtigt werden können.

2) Die also von den M_0 herrührt. Vergl. Anm. 2 S. 573.

3) Vergl. J. W. Gibbs l. c. Gl. 104.

4) Dem Systeme M, M_0.

verloren; daher erfährt nach dem Energiesatz[1]) $\sum$ eine Energiezunahme um

$$\delta\varepsilon^* = F\delta a,$$

das ist nach (20)

$$\delta\varepsilon^* = \delta a \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}}.\ ^{2)}$$

Findet zugleich eine äußere Wärmezufuhr δQ statt, so ist

$$\delta\varepsilon^* = \delta Q + \delta a \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}}$$

oder nach (19)

$$\delta Q = \delta\varepsilon^* - \delta a \overline{\frac{\partial \varepsilon_q}{\partial a}}$$

oder

(22)[3]) $$\delta Q = \delta\varepsilon^* - \overline{\delta\varepsilon_q}.$$

wenn $\delta\varepsilon_q$ den Zuwachs der potentiellen Energie für identische Lagen bedeutet, welcher der Verschiebung der M verdankt wird.

Hierfür kann man auch schreiben:

(23) $$\delta Q = \overline{\delta\varepsilon^* - \delta\varepsilon_q}.$$

Also ist nach (15)

(24) $$\delta Q = \frac{1}{\omega}\int dK \frac{dV_p}{d\varepsilon_p}(\delta\varepsilon^* - \delta\varepsilon_q),$$

wo $\varepsilon^* - \varepsilon_q$ als Argument von V_p zu denken ist, oder

(25) $$\delta Q = \frac{1}{\omega}\int dK\,\delta V_p.$$

Berücksichtigt man, daß identische Lagenmannigfaltigkeiten im variierten Systeme dieselbe Konfigurationsausdehnung haben, und zieht (12) hinzu, wobei man noch beachtet, daß im Integrale dieser Gleichung V_p an der oberen Grenze verschwindet, so erhält man

(26) $$\delta Q = \frac{1}{\omega}\delta V.$$

---

1) Die kinetische Energie von M wird nämlich unendlich klein, wenn die Ueberkraft unendlich klein wird.

2) Diese Gleichung wurde schon früher von mir benutzt (Ann. d. Phys. 33. 1910. S. 547), aber fehlerhaft begründet.

3) L. Boltzmann Werke I S. 304 dritte Gleichung. — Wir haben die Gleichung aus dem Energieprinzip abgeleitet, was immerhin einen Umweg bedeutet. Es gibt auch einen direkten Weg, siehe Boltzmann Werke I S. 300—302 vor allem Gleichung (17). Besonders zu beachten ist der Unterschied von $\overline{\delta\varepsilon_q}$ und $\delta\overline{\varepsilon_q}$.

Also ist

$$\frac{\delta Q}{\frac{V}{\omega}} = \delta \ln V \tag{27}$$

und somit ist, da $\frac{V}{\omega}$ die Eigenschaften der Temperatur besitzt [1]), $\ln V$ als Entropie nachgewiesen und der zweite Hauptsatz abgeleitet [2]).

Hamburg, 6. Mai 1912.

---

1) J. W. Gibbs Formel 394. P. Hertz l. c. § 5. Ornstein l. c. S. 845 Anm.

2) Boltzmann Werke I S. 304. Andere Beweise: J. W. Gibbs l. c. Gl. 418. P. Hertz l. c. § 11 und 12. Ornstein l. c. S. 846 Anm. Für den hier gegebenen Beweis ist es garnicht wesentlich, daß dK und V_p invariante Größen sind. Man hätte auch einfach (nicht-invariante) Volumina der q- und p-Räume mit dK und V_p bezeichnen und doch den Beweis ebenso führen können. Dann würde er sich schließlich wohl kaum von dem früher von mir veröffentlichten unterscheiden.

Ueber elektrische und magnetische Doppelbrechung.

I.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1912.

Herr Langevin hat in einer ausgezeichneten Arbeit[1]) eine Theorie der elektrischen und der magnetischen Doppelbrechung aufgestellt, die m. E. einen großen Fortschritt in der Aufklärung der bezüglichen Erscheinungen bezeichnet. Er sieht die Ursache derselben (wie schon vor ihm andere Forscher) in einer Orientierung der von Natur äolotropen und in isotropen Körpern ursprünglich unregelmäßig gerichteten Moleküle durch das elektrische oder magnetische Feld, der die Wärmebewegung entgegenwirkt, gelangt aber von dieser Auffassung aus zum ersten Male zu Formeln, welche durch eine Reihe von Erfahrungstatsachen bestätigt werden.

Wenn ich meinesteils ursprünglich die Erklärung aller elektrischen und magnetischen Doppelbrechung in direkter Anlehnung an die Theorie des Zeeman-Effektes gesucht habe[2]), so bin ich doch durch die Entwickelung der theoretischen und experimentellen Untersuchungen der letzten Jahre davon überzeugt worden, daß jener Weg nicht in allen Fällen zum Ziele führt. Daß ich ihn zunächst beschritten habe, ist nach den vielen Bestätigungen, welche die Theorie der inversen Zeeman-Effekte gefunden hatte, wohl begreiflich; die Vorstellungen, von denen Herr Langevin ausgeht, sind mir indessen wohl vertraut gewesen, und ich habe sie für bestimmte Zwecke ja auch selbst herangezogen.

---

1) P. Langevin, Le Radium, 7, p. 249, 1910.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67, p. 345, 1899; 69, p. 297, 1899; Ann. d. Phys. 4, p. 197, 1901.

Allerdings kann ich Herrn Langevin nicht darin[1]) beipflichten, daß nun jede Art von elektrischer und magnetischer Doppelbrechung durch die Orientierung der Moleküle zu erklären wäre, und ich meine, daß die Beobachtungen über magnetische Doppelbrechung im Bereiche der Zeemanschen Zerlegungen, welche stets auf's Genauste die Theorie der inversen Zeeman-Effekte bestätigt haben, schon allein diesen Anspruch widerlegen. Ich brauche dazu nur auf die kürzlich von mir und Herrn Hansen[2]) veröffentlichten Photogramme hinzuweisen, die mit der Theorie des Herrn Langevin ganz unvereinbar sind.

Nicht minder widerstreben die Beobachtungen über elektrische und magnetische Doppelbrechung an Kristallen zum überwiegenden Teil der Anwendung der Langevinschen Theorie. Denn wenn ein Feld, das parallel einer kristallographischen Symmetrieaxe gerichtet ist, Doppelbrechung hervorruft oder verändert, so kann dabei nach Symmetrie von Drehungen der Moleküle nicht wohl die Rede sein.

Eine besondere Stellung nehmen die Phänomene der elektrischen Doppelbrechung in azentrischen Kristallen ein, z. B. in Quarz und Natriumchlorat, von denen Herr Pockels[3]) nachgewiesen hat, daß in ihnen ein rein elektrooptischer Anteil vorhanden ist. Die Orientierungstheorie muß in solchen Fällen Moleküle annehmen, die von Natur ein elektrisches Moment besitzen. Aber die Symmetrie der genannten elektrooptisch wirksamen Kristalle läßt Moleküle mit polarem Charakter garnicht zu; die einfache Orientierungshypothese ist somit auf sie nicht anwendbar. Man müßte, um die Idee polarisierter Elemente zu verwerten, etwa jedes Molekül aus mehreren derartigen Teilen aufgebaut und diese gegeneinander beweglich annehmen. Aber daß dann auf die Orientierung die Wärmebewegung Einfluß üben könnte, wie die Langevinsche Theorie annimmt, erscheint doch schwer denkbar.

So glaube ich, wird man eine Ergänzung der Langevinschen Theorie durch Gedankengänge, ähnlich den von mir vertretenen, für nötig halten. Zeeman-Effekt und Orientierung der Moleküle wirken m. E. neben einander; in manchen Fällen dominiert der eine, in manchen der andere Umstand, derart, daß seine alleinige Betrachtung zur Erklärung anscheinend ausreicht. Diesen Standpunkt, den auch Herr Cotton einzunehmen scheint, dürfte die

1) P. Langevin, l. c. p. 259.
2) W. Voigt und P. Hansen, Phys. Zeitschr. **13**, p. 217, 1912.
3) Fr. Pockels, Gött. Abh. **39**, p. 1, 1893.

Gesamtheit der Erfahrungen gegenwärtig an die Hand geben, und ihn zu bezeichnen ist der eine Zweck meiner Mitteilung.

2) Ein zweites Ziel ist eine Verallgemeinerung der Langevinschen Theorie und der Hinweis auf einige Folgerungen, die sich aus derselben ergeben.

Herr Langevin geht von einer Boltzmannschen Formel[1]) aus, nach der in einem Gas, dessen Moleküle unter einem Potential stehen, die Anzahl der Moleküle vom Potential w mit $e^{-w/rT}$ proportional ist, wobei r die auf das Molekül bezogene Gaskonstante, T die absolute Temperatur bezeichnet. Indem er sich auf (einaxige) Moleküle vom Habitus eines Rotationsellipsoides beschränkt, kommt er zu dem Ansatz, daß die Anzahl der Moleküle, deren Axe in eine Kegelöffnung do fällt, durch

$$dN = C_0 e^{-w/rT} do$$

gegeben ist, wobei C_0 sich bestimmt aus

$$N = C_0 \int e^{-w/rT} do,$$

das Integral über die ganze Kugel genommen.

Die Begründung, welche Herr Langevin in seinen Publikationen für die Heranziehung der Boltzmannschen Formel gibt, erscheint vielleicht nicht ganz befriedigend, insofern die Stelle der „Vorlesungen über Gastheorie", auf die sie sich bezieht, mit dem hier vorliegenden Problem nicht direkt zusammenhängt. Am angegebenen Orte handelt es sich nämlich um die Begründung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten bei einem System von Molekülen, welche translatorischen Kräften unterliegen. Das Potential dieser Kräfte steht dann anstelle von w in dem obigen Ausdruck. Aber bei der Langevinschen Theorie handelt es sich weder um translatorische Bewegungen, noch um dergleichen Kräfte. Es erscheint demnach, besonders angesichts der bedeutungsvollen Resultate der Langevinschen Theorie, eine direkte Fundierung der Ausgangsformel erwünscht. Herr Langevin hat auf eine bezügliche Anfrage mir eine solche mitgeteilt, und ich bin ermächtigt, dieselbe im Anhang wiederzugeben. Nach derselben kann die Grundlage seiner Rechnung keinen andern Bedenken unterliegen, als er sie selbst in dieser Notiz ausspricht.

Bei den im Folgenden zu machenden Anwendungen der Langevinschen Hypothese will ich eine kleine Aenderung in der

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig 1896, p. 134.

Bezeichnung vornehmen. Wird in dem obigen Ansatz nach Herrn Langevin unter w die potentielle Energie eines Moleküls im Felde verstanden, so ist r nicht die bei Boltzmann unter diesem Symbol geführte Gaskonstante. Denn bei Boltzmann steht anstelle von w das auf die Masseneinheit bezogene Potential. r bei Langevin entspricht also mr bei Boltzmann, wenn m die Molekülmasse ist. Ich will, um in Uebereinstimmung mit Boltzmann zu bleiben, dessen Bezeichnungen ich bei den gastheoretischen Entwickelungen benutze, weiterhin r durch mr ersetzen.

Ich werde nunmehr zunächst die Langevinschen Rechnungen auf (zweiaxige) Moleküle vom Habitus eines dreiaxigen Ellipsoides ausdehnen und dabei auch besonders die Absorptionsverhältnisse erörtern[1]). Reichte in dem Langevinschen Fall der Winkel ϑ zwischen der Rotations- oder Hauptaxe des Moleküles und der Feldrichtung aus, um dessen Orientierung und somit w zu bestimmen, so hat man zu demselben Zweck jetzt zwei Winkel nötig. Wir legen ein $X_0\, Y_0\, Z_0$-Axenkreuz in die drei Hauptaxen des Moleküles und bestimmen dessen Orientierung gemäß der Figur 1

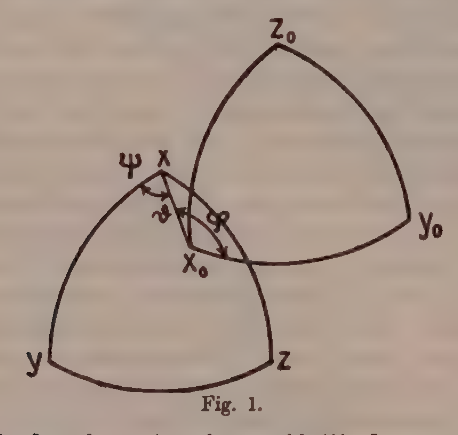


Fig. 1.

gegen das absolut feste Axenkreuz XYZ, dessen X-Axe in die

1) Herr Pockels, dem ich einige der nachstehenden Resultate unterbreitet habe, hat mir mitgeteilt, daß die Erweiterung der Langevinschen Betrachtungen auf Moleküle von rhombischer Symmetrie auf seine Veranlassung von einem seiner Schüler, Herrn A. Enderle, schon im Herbst des vorigen Jahres ausgeführt worden ist und demnächst publiziert werden soll. (Vgl. auch Le Radium, 9, S. 148). Da von jenem die Rechnung anders geleitet ist und auch die Absorptionsverhältnisse nicht diskutiert sind, überdies mir die bezüglichen Formeln für die Vergleichung mit andern Entwicklungen nötig sind, so habe ich ihre Ableitung oben kurz doch mitgeteilt.

Feldrichtung falle, durch die Winkel ϑ, φ, ψ; dann hängt die potentielle Energie w nur von den Winkeln ϑ und φ ab. Für die Anzahl der Moleküle, deren Orientierungen durch Winkelwerte zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, φ und $\varphi + d\varphi$ gegeben sind, liefert dann die Erweiterung des Langevinschen Ansatzes

$$(1) \quad dN = Ce^{-w/mrT} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \quad N = C\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-w/mrT} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi;$$

dabei gilt für w bis auf eine additive irrelevante Konstante, wenn E' das wirksame elektrische (oder auch magnetische) Feld, μ_1, μ_2, μ_3 die Momente des Moleküles nach den Hauptaxen für das Feld Eins bezeichnen,

$$(2) \quad w = -\tfrac{1}{2} E'^2(\mu_1 \cos^2\vartheta + \mu_2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \mu_3 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta).$$

Mit dem von außen ausgeübten Feld E kann man das faktisch wirksame E' in eine angenäherte Beziehung setzen, indem man annimmt, daß die jedes Molekül umgebenden übrigen aequivalent seien einem Kontinuum mit einem kugelförmigen Hohlraum[1]).

Es ist dann

$$(3) \quad E' = E + \frac{4\pi}{3} M,$$

wenn M das Moment der Volumeneinheit an der Stelle des Moleküles bezeichnet, und es kann in ausreichender Annäherung gesetzt werden

$$M = \tfrac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) NE,$$

sodaß resultiert

$$(4) \quad E' = E\left(1 + \frac{4\pi}{9} N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\right).$$

Dabei ist $\frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)N = \eta$, d. h. gleich der Elektrisierungszahl oder $= \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$, wobei ε die Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Aehnliche Beziehungen gelten, wenn ein magnetisches Feld betrachtet wird. Wir wollen weiterhin die Abkürzung E' beibehalten und die Formeln auch in erster Linie auf die elektrische Doppelbrechung beziehen.

Für die Anwendungen erweisen sich statt der Formel (1) die

1) Manche Beobachtungen widersprechen indessen den Konsequenzen dieser Annahme auf optischem Gebiete. (S. dazu z. B. Fr. Pockels, Ann. d. Phys. 7, p. 766 u. f. 1902.)

Annäherungen

$$dN = C\left(1 - \frac{w}{mrT}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

(5)

$$N = C\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{w}{mrT}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

ausreichend. Die letztere Formel ergibt die Bestimmung von C durch

$$N = 4\pi C\left(1 + \frac{E'^2}{6mrT}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\right). \tag{6}$$

3) Für die Elektronenbewegungen in einem Kristall durch eine Lichtwelle gelten bekanntlich allgemein bei Einführung komplexer Lösungen Gleichungen von der Form

$$p_{11}\mathfrak{x} + p_{12}\mathfrak{y} + p_{13}\mathfrak{z} = eX', \ldots \tag{7}$$

Dabei stellen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Komponenten der Elongationen, X', Y', Z' diejenigen der elektrischen Feldstärke in der Lichtwelle dar; die p_{ij} sind Abkürzungen für Ausdrücke von der Form

$$p_{ij} = k_{ij} + ih_{ij}\nu - m\nu^2, \tag{8}$$

wobei ν die Frequenz gibt, k und h die Parameter der quasielastischen und der Dämpfungskräfte sind.

Die p_{ij} sind die Komponenten eines komplexen Tensortripels p_1, p_2, p_3, das aber bei rhombischer Symmetrie reelle Richtungen, nämlich die Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0 des Moleküls, besitzt. Alle Elektronen mit demselben Tripel p_1, p_2, p_3 repräsentieren eine Elektronengattung; es sind im allgemeinen mehrere Gattungen anzunehmen. Für die verschiedenen Elektronen derselben Gattung sind die Hauptaxen nach der hier verfolgten Annahme ursprünglich regellos verteilt, und sie erfahren im Felde einen Orientierungsantrieb.

In den X', Y', Z' sind ebenso, wie oben in E', Anteile, welche von der Einwirkung derjenigen Elektronen herrühren, die das einzelne betrachtete umgeben; sodaß gesetzt werden kann

$$X' = X + \frac{4\pi}{3} M_1', \ldots \tag{9}$$

unter X, Y, Z die direkten Feldkomponenten der Welle, unter M_1', M_2', M_3' die durch die Welle in der Volumeneinheit erregten Momente verstanden. Dabei ist

$$M_1' = \Sigma e\mathfrak{x}, \ldots, \tag{10}$$

die Summe über alle Elektronen der Volumeneinheit erstreckt.

Bei Gasen und Dämpfen sind die $M_1', \ldots$ unmerklich; bei festen und flüssigen Körpern sind sie zu berücksichtigen. Handelt es sich um regelmäßige Kristalle oder streng isotrope Körper, so können zur Erzielung einfacherer Endformeln in vielen Fällen die M_1', M_2', M_3' mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ proportional gesetzt und in (7) sogleich mit den Gliedern links zusammengefaßt werden, wodurch sich dann nur die Parameter der quasielastischen Kräfte ändern. Dies ist völlig einwandfrei dann möglich, wenn entweder faktisch nur ein Absorptionsstreifen vorhanden ist, oder die wirkliche Absorption in Annäherung durch einen solchen ersetzt werden kann. Ich habe diese Darstellung der Regel nach bevorzugt. In dem vorliegenden Falle, wo die Elektronen derselben Gattung verschiedene Elongationen erleiden, ist dies Verfahren nicht angängig, und man muß so verfahren, wie (nach Lorentzschem Vorbilde) Herr Langevin tut.

Löst man die Formel (7) nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auf, so gewinnt man ein System

(11) $$\mathfrak{x} = e(q_{11}X' + q_{12}Y' + q_{13}Z'), \ldots$$

Die q_{ij} sind ebenso wie die p_{ij} komplexe Tensorkomponenten, die bei rhombischer Symmetrie reelle Richtungen haben. Ihre Konstituenten mögen durch q_1, q_2, q_3 bezeichnet werden. Dann gelten, wenn man das System der Richtungskosinus

(12)

	x_0	y_0	z_0
x	α_1	β_1	γ_1
y	α_2	β_2	γ_2
z	α_3	β_3	γ_3

voraussetzt, die Formeln:

(13) $$\begin{aligned} q_{11} &= q_1\alpha_1^2 + q_2\beta_1^2 + q_3\gamma_1^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{23} &= q_1\alpha_2\alpha_3 + q_2\beta_2\beta_3 + q_3\gamma_2\gamma_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hierbei ist gemäß Figur 1

(14) $$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\vartheta, \\ \beta_1 &= \cos\varphi\sin\vartheta, \\ \gamma_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta, \\ \alpha_2 &= \cos\psi\sin\vartheta, \\ \beta_2 &= -\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi, \\ \gamma_2 &= -\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\psi, \\ \alpha_3 &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ \beta_3 &= -\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\psi, \\ \gamma_3 &= -\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta - \cos\varphi\cos\psi. \end{aligned}$$

4) Für das optische Verhalten sind die Mittelwerte der q_{ij} über alle Elektronen derselben Gattung maßgebend. Von diesen Mittelwerten sind nach Symmetrie alle auf $i \neq j$ bezüglichen gleich Null, die von q_{22} und q_{33} genommenen aber einander gleich.

Die komplexen Hauptbrechungsindizes $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ für die parallel X, Y, Z stattfindenden Schwingungen bestimmen sich durch die Beziehungen

$$(15) \qquad \frac{\mathfrak{n}_j^2 - 1}{\mathfrak{n}_j^2 + 2} = \mathfrak{m}_j = \frac{4\pi}{3} \Sigma e^2 q_{jj}, \quad j = 1, 2, 3,$$

wobei $\mathfrak{m}$ eine Abkürzung ist, und die Summen über alle Elektronengattungen und alle Moleküle zu nehmen sind.

Da $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$ ist, unter n den reellen Brechungsindex, unter $\varkappa$ den Absorptionsindex verstanden, so ist

$$(16) \qquad \mathfrak{m} = \frac{n^4(1+\varkappa^2)^2 + n^2(1-\varkappa^2) - 2 - 6in^2\varkappa}{(n^2(1-\varkappa^2)+2)^2 + 4n^4\varkappa^2};$$

sondert man auch in $\Sigma e^2 q_{jj}$ Reelles und Imaginäres, so erhält man zwei Formeln zur Bestimmung von n und $\varkappa$. Diese Beziehungen sind sehr kompliziert. Sie vereinfachen sich, wenn $\varkappa^2$ neben Eins fortbleiben kann, da dann gilt:

$$(17) \qquad \mathfrak{m} = \frac{(n^2+2)(n^2-1) - 6in^2\varkappa}{(n^2+2)^2}.$$

Zerlegt man gemäß dem Schema

$$q_{jj} = q'_{jj} - iq''_{jj}$$

die q in den reellen und den imaginären Teil, so wird hiernach

$$(18) \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4\pi}{3} \Sigma e^2 q'_{jj}, \qquad \frac{6n^2\varkappa}{(n^2+2)^2} = \frac{4\pi}{3} \Sigma e^2 q''_{jj}.$$

Für nur eine Elektronengattung liefert (13), wenn $\cos\vartheta = c$ gesetzt wird, unter Rücksicht auf (5)

$$(19) \quad \mathfrak{m}_j = \frac{4\pi}{3} \Sigma e^2 q_{jj} = \frac{2}{3} C e^2 \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{w}{mrT}\right) q_{jj}\, dc\, d\varphi\, d\psi;$$

denn da alle Winkelwerte ψ gleich wahrscheinlich sind, so ist die Anzahl der Moleküle von dN, deren ψ-Wert zwischen ψ und $\psi + d\psi$ liegt, gegeben durch $dN d\psi/2\pi$.

Unter Benutzung des Wertes (6) von C erhält man hieraus für die außerordentliche Welle (1) und die ordentliche (2) resp. (3)

$$(20) \qquad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} + \mathfrak{q} \qquad \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{q},$$

wobei

(21) $$\mathfrak{m} = \frac{4\pi}{9} Ne^2 (q_1 + q_2 + q_3)$$

für das Medium außerhalb des Feldes gilt, und

(22) $$\mathfrak{q} = \frac{4\pi}{135} \frac{Ne^2 E'^2}{mrT} \Big((q_2 - q_3)(\mu_2 - \mu_3) + (q_3 - q_1)(\mu_3 - \mu_1) + (q_1 - q_2)(\mu_1 - \mu_2)\Big)$$

die Wirkung des Feldes darstellt.

$\mathfrak{q}$ verschwindet sowohl bei dielektrischer (resp. magnetischer), als auch bei optischer Isotropie der Moleküle, d. h. sowohl bei $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, als bei $q_1 = q_2 = q_3$, wie dies ja sein muß. Im Falle der Einaxigkeit der Moleküle, z. B. bei $\mu_2 = \mu_3$, $q_2 = q_3$, ergibt sich:

$$\mathfrak{q} = \frac{8\pi}{135} \frac{Ne^2 E'^2}{mrT} (q_1 - q_2)(\mu_1 - \mu_2),$$

bis auf die komplexe Natur in Uebereinstimmung mit dem Resultat von Herrn Langevin.

Wären alle Moleküle einander streng parallel orientiert, so würden sich die Hauptbrechungsindizes des so erhaltenen kristallinischen Körpers bestimmen durch

(23) $$\mathfrak{m}'_j = \frac{4\pi}{3} Ne^2 q_j;$$

es gilt somit

(24) $$\mathfrak{m} = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{m}'_1 + \mathfrak{m}'_2 + \mathfrak{m}'_3)$$

und es lassen sich auch die in (22) auftretenden q_j wenn man will durch diese $\mathfrak{m}_j$ ersetzen.

Schreibt man kurz $\frac{1}{15}\frac{E'^2}{mrT} = f$, so ergibt sich

(25) $$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= \tfrac{1}{3}[\mathfrak{m}'_1(1 + f(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)) + \cdot\cdot], \\ \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_3 &= \tfrac{1}{3}[\mathfrak{m}'_1(1 - \tfrac{1}{2} f(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)) + \cdot\cdot], \end{aligned}$$

wobei die durch Punkte angedeuteten Glieder aus den hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung zu gewinnen sind.

Die Erweiterung auf mehrere Elektronengattungen bietet keine Schwierigkeiten; es stehen dann nur die Nq_j allenthalben unter Summenzeichen über alle diese Gattungen.

Wegen der Kleinheit der optischen Wirkungen eines Feldes kann man die Formeln (20) auch schreiben

(26) $$\frac{6\mathfrak{n}(\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n})}{(\mathfrak{n}^2 + 2)^2} = \mathfrak{q}, \qquad \frac{6\mathfrak{n}(\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n})}{(\mathfrak{n}^2 + 2)^2} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{q},$$

und es folgt daraus u. a.

(27) $$\frac{\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}}{\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}} = -2,$$

eine Formel, die bis auf die komplexe Form der linken Seite mit einer von Herrn Langevin gegebenen übereinstimmt.

5) Die komplexe Form aller erhaltenen Resultate rührt nach (16) bis (18) von der Zulassung von Absorptionen her, deren Betrachtung an sich Interesse bietet, und die zugleich die Resultate für die durchsichtigen Gebiete eigenartig zu deuten gestatten. Denn die Dispersionsgesetze erscheinen nach der modernen Theorie als bedingt durch die Absorptionsverhältnisse. In Bezug hierauf mag zunächst Folgendes hervorgehoben werden.

Wie die Formel (24) ausdrückt, daß das isotrope Medium in Annäherung dieselben Absorptionsbanden zeigt, wie alle drei Hauptschwingungen in dem Kristall zusammen, so sagen die Formeln (25) aus, daß durch die Feldwirkung im Wesentlichen diese Absorptionsstreifen nur in der ordentlichen und der außerordentlichen Welle verschiedene relative Intensitäten erhalten. Der Gegensatz in den Konsequenzen der Orientierungstheorie gegen die Theorie des Zeeman-Effektes, der die Zerlegungen und Verschiebungen von Absorptionslinien ergibt, tritt hierin plastisch hervor.

Das eigentliche Gesetz der elektrischen Doppelbrechung ist durch

(28) $$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = \tfrac{3}{2}\mathfrak{q}$$

gegeben. Zerlegt man $\mathfrak{q}$ nach dem Schema

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' - i\mathfrak{q}'',$$

so liefert die angenäherte Formel (17)

(29) $$\frac{6n(n_1 - n_2)}{(n^2+2)} = \tfrac{3}{2}\mathfrak{q}', \qquad 6\left(\frac{n_1^2 \varkappa_1}{(n_1^2+2)^2} - \frac{n_2^2 \varkappa_2}{(n_2^2+2)^2}\right) = \tfrac{3}{2}\mathfrak{q}''.$$

$n_1 - n_2$ stellt dabei das Produkt $B\lambda$ der Kerr-Konstante in die Wellenlänge dar. Die zweite Formel, in der meist wohl n_1^2+2 und n_2^2+2 mit n^2+2 vertauscht werden darf, spricht die Notwendigkeit eines elektrischen (resp. magnetischen) Dichroismus in den Absorptionsgebieten aus, dergleichen die Herren Zeeman und Hoogenboom[1]) bei Salmiaknebel, Herr Majorana[2]) in Eisenlösungen gefunden haben.

1) P. Zeeman u. C. M. Hoogeboom, Amst. Proc., 30. Dec. 1911, 27. Jan. 1912.

2) Qu. Majorana, Rend. Linc. (5) 11, I p. 531, 11, II p. 90, 1902; Phys. Zeitschr. 4, p. 145, 1902.

q' nimmt in der Nähe von Absorptionsstreifen exzeptionell große Werte an; der Kerr-Effekt muß also nach der Orientierungstheorie in diesen Bereichen ebenso exzeptionelle Werte annehmen, wie nach der Theorie des Zeeman-Effektes, und der bisher noch nicht gelungene Nachweis solcher Wirkungen gibt an sich keine Entscheidung zwischen beiden Theorien.

Dagegen geben beide Theorien verschiedene Resultate bez. des Verhaltens der elektrischen Doppelbrechung zu beiden Seiten eines Absorptionsstreifens. Hier verlangt die Orientierungstheorie ein entgegengesetztes Verhalten der auf dem bez. Streifen beruhenden Doppelbrechung, die andere ein gleiches.

Dabei ist indessen vorausgesetzt, daß der bezügliche Streifen ein einfacher ist, nämlich nur einer Hauptschwingung des Moleküles zugehört. Ist er zusammengesetzt, d. h., liegen einander die zwei oder die allen drei Hauptschwingungen entsprechenden Streifen so nahe, daß sie zusammenfließen, so kann auch nach der Orientierungshypothese die bez. Wirkung zu beiden Seiten dasselbe Vorzeichen besitzen. Es kommt dabei die Lage und Art der Streifen in Betracht. Leider ist es bisher nicht möglich gewesen, elektrische Doppelbrechung in der unmittelbaren Umgebung von Absorptionsstreifen zu beobachten.

Für ein Spektralgebiet, in welchem das Medium merklich durchsichtig ist, haben die q_j die Form

$$q_j = \frac{1}{k_j - m\nu^2} = \frac{1}{p_j}.$$

Bei kleiner Doppelbrechung der Moleküle kann man für ein Gebiet außerhalb aller Absorption, etwa bei ausschließlich ultravioletter Absorption für das ganze sichtbare Gebiet

$$k_j = k + k_j', \qquad k_1' + k_2' + k_3' = 0$$

und

(30) $$q_j = \frac{1}{k - m\nu^2} - \frac{k_j'}{(k - m\nu)^2} = \frac{1}{p} - \frac{k_j'}{p^2}$$

setzen. Dann wird

(31) $$q = -\frac{4\pi N e^2}{135\, p^2} \frac{E'^2}{m r T}\left[(k_2' - k_3')(\mu_2 - \mu_3) + \cdots\right],$$

und es entsteht ein Gesetz der Dispersion der Doppelbrechung, das mit dem des nicht erregten Körpers, d. h. mit

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{N e^2}{p}$$

in einem einfachen Zusammenhang steht.

Seine Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist mehrfach als eine Stütze für die Hypothese der Molekül-Orientierung betrachtet worden. Indessen ist dieser Schluß doch nicht zwingend. Jede Feldwirkung, die quadratisch in die Grundgleichungen (7) eingeht, führt, wie es scheint, in angemessener Annäherung auf dasselbe Dispersionsgesetz, so auch bei der elektrischen Doppelbrechung die von mir verfolgte, während bei dem magnetischen Effekt die Einführung der direkten Wirkung auf die Elektronen ein in der Feldstärke lineäres Glied gibt und somit zu einem andern Dispersionsgesetz führt. In der Tat folgt aus dem von mir (Magnetooptik S. 377 Formel (13)) gegebenen Gesetz für die Dispersion der Kerr-Konstante B unmittelbar die sogenannte Havelocksche Formel

$$(31) \qquad \frac{B\lambda n}{(n^2-1)^2} = \text{Konst.},$$

wenn man nur (ebenso wie l. c. S. 130 für die longitudinale magnetische Doppelbrechung zur Ableitung der H. Becquerelschen Formel geschehen) alle die Absorptionen durch eine einzige im Ultravioletten ersetzt, resp. nur eine Elektronengattung annimmt.

Aus der Formel (27) ergibt sich durch Sonderung des Reellen und des Imaginären

$$(32) \qquad \frac{n_1-n}{n_2-n} = -2, \qquad \frac{n_1\varkappa_1-n\varkappa}{n_2\varkappa_2-n\varkappa} = -2.$$

Die erste schon von Herrn Langevin gegebene Formel wird durch die Beobachtungen von Herrn Aeckerlein[1]) bestätigt, welche m. E. die wichtigste Stütze der Langevinschen Theorie darstellen. Daß die Bestätigung eine so vollständige ist, trotzdem die Beobachtungen durch die von der Theorie nicht berücksichtigte Elektrostriktion beeinflußt werden, dürfte mit den exzeptionell großen elektrooptischen Wirkungen bei den von Herrn Aeckerlein untersuchten Flüssigkeiten zusammenhängen, denen vielleicht eine analoge exzeptionelle Elektrostriktion nicht entspricht[2]).

Die zweite Formel spricht einen Satz über elektrischen Dichroismus aus, der bisher noch nicht varifiziert ist.

Leichter als eine quantitative Prüfung würde vermutlich die nachstehende qualitative Folgerung zu bestätigen sein.

Die Absorption eines elektrooptisch wirksamen Körpers für natürliches Licht vor Erregung des Feldes sei dargestellt durch

$$J = J_0 e^{-2\nu n\varkappa l/c},$$

1) G. Aeckerlein, Phys. Zeitschr. 7, p. 594, 1906.

2) S. hierzu übrigens T. Pockels l. c.

dann gilt für die Absorption nach Erregung des Feldes

$$J_1 = \tfrac{1}{2} J_0 \left(e^{-2\nu n_1 \varkappa_1 l/c} + e^{-2\nu n_2 \varkappa_2 l/c}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} J \left(e^{-2\nu(n_1 \varkappa_1 - n\varkappa) l/c} + e^{-2\nu(n_2 \varkappa_2 - n\varkappa) l/c}\right)$$

oder, falls $n_2\varkappa_2 - n\varkappa = (\varkappa)$ gesetzt wird,

$$J_1 = \tfrac{1}{2} J \left(e^{+4\nu(\varkappa) l/c} + e^{-2\nu(\varkappa) l/c}\right),$$

wofür der Regel nach geschrieben werden darf

$$J_1 = J(1 + 2\nu(\varkappa) l/c).$$

Diese Formel zeigt, daß nach der Orientierungshypothese ein absorbierender Körper im Felde sein Absorptionsvermögen für natürliches Licht ändern muß. Die Nachweisung eines solchen Effektes würde eine Bestätigung der Theorie auf einem neuen Gebiete darstellen. Herr Zeemann hat nach einer von mir gegebenen Anregung nach einer solchen Wirkung bei Salmiaknebel gesucht und teilt mir mit, daß er sie gefunden habe. Natürlich bleibt zu entscheiden, in wie weit bei diesen Beobachtungen ein Beugungseffekt beteiligt ist.

Was in Bezug auf elektrischen Dichroismus Herr Zeeman beobachtet hat, geht insbesondere dahin, daß dessen Sinn nicht an den Sinn der Doppelbrechung gebunden ist. Diese Wahrnehmung scheint mit den obigen Formeln vereinbar zu sein.

Zusatz

nach einer brieflichen Mitteilung von Prof. P. Langevin.

Je suis très heureux de l'occasion que vous me donnez de correspondre avec vous en vous fournissant les explications qui manquent effectivement dans les travaux que j'ai publiés et qui justifient l'extension de la formule de Boltzmann au cas des rotations.

J'utilise les résultats généraux de la mécanique statistique tels qu'ils se trouvent dans le second volume de l'ouvrage de Boltzmann et dans celui de Gibbs en admettant que la distribution de régime permanent des molécules d'un gaz possédant un nombre quelconque de degrés de liberté est une distribution canonique, c'est-à-dire que le nombre des molécules dont l'état correspond à l'élément d'extension en phase $dp_1 dp_2 \ldots dq_1 dq_2 \ldots$ est de la forme:

$$Ce^{-\frac{E}{rT}}dp_1dp_2\dots dq_1dq_2\dots$$

E étant l'énergie totale d'une molécule, somme de son énergie cinétique W et de son énergie potentielle w correspondante aux actions exterieures qui peuvent s'exercer sur elle, de la part d'un champ électrique ou d'un champ magnétique par exemple.

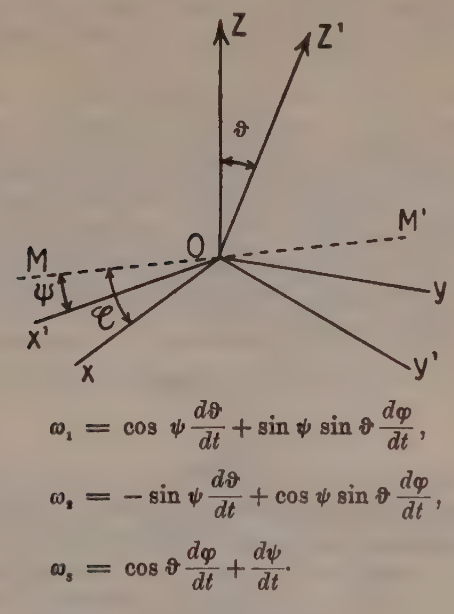
Voyez-vous une difficulté à prendre ceci comme point de départ et à admettre que pour des systèmes satisfaisant comme les nôtres à des équations Hamiltoniennes, la distribution de régime permanent ait nécessairement la forme canonique de Gibbs quelle que soit la nature des paramètres $q_1, q_2, \dots$ qui en fixent la position ou la configuration et des moments correspondants $p_1, p_2 \dots$? Je vous donnerai d'ailleurs en terminant un raisonnement simple qui ramène le cas des mouvements de rotation de molécules possédant un axe principal de symétrie au cas des translations traité particulièrement par Boltzmann dans le premier volume de son ouvrage et pour lequel il a montré en détail que la distribution canonique est la seule compatible avec un régime permanent.

Il est facile de montrer, en prenant le cas de molécules quelconques, et en admettant la distribution canonique, que le nombre des molécules pour lesquelles la direction du champ extérieur H est comprise dans un angle solide $d\omega$ par rapport au trièdre des axes principaux d'inertie, ou à tout système de référence lié à la molécule, est effectivement proportionnel à

$$e^{-\frac{W}{rT}}d\omega.$$

J'envisagerai uniquement les mouvements de rotation de la molécule, qui correspondent dans le cas général à trois degrés de liberté. Fixons au moyen des angles d'Euler la position de la molécule à un moment donné. Soit $x\ y\ z$ un système d'axes fixes dont la direction oz pourra ultérieurement être supposée coïncider avec celle du champ extérieur H, mais qui, pour l'instant peut être quelconque. Soit x', y', z' le trièdre des axes principaux d'inertie de la molécule dont les moments principaux seront I_1, I_2, I_3. Soient ϑ, φ, ψ les angles d'Euler qui fixent la position relative des deux trièdres, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les trois composantes suivant les axes x', y', z' de la vitesse angulaire instantanée. La droite MOM' est l'inter-

section des deux plans xoy et $x'oy'$. On a:



$$\omega_1 = \cos\psi \frac{d\vartheta}{dt} + \sin\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\omega_2 = -\sin\psi \frac{d\vartheta}{dt} + \cos\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\omega_3 = \cos\vartheta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}.$$

L'énergie cinétique W a pour valeur:

$$W = \tfrac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

L'énergie potentielle w est fonction des angles ϑ, φ, ψ que nous prendrons pour paramètres q_1, q_2, q_3.

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)} \qquad p_2 = \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} \qquad p_3 = \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}$$

$$dp_1\, dp_2\, dp_3 = \frac{D(p_1, p_2, p_3)}{D\left(\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)} \frac{D\left(\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)}{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} d\omega\, d\omega_2 d\omega_3$$

$$= I_1 I_2 I_3 \frac{D(\omega_1\, \omega_2\, \omega_3)}{D\left(\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = I_1 I_2 I_3 \sin\vartheta\, d\omega.\, d\omega.\, d\omega_3$$

Le nombre de molécules correspondant à l'élément d'extension en phase $dp_1\, dp_2\, dp_3\;\; dq_1\, dq_2\, dq_3$ est donc:

$$Ce^{-\frac{W+w}{rT}} \sin\vartheta\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi.$$

En tenant compte de l'expression de W, on peut effectuer l'intégration par rapport à $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ et on trouve pour le nombre des molécules qui dans le régime permanent ont l'orientation ϑ, φ, ψ:

$$Ce^{-\frac{W}{rT}} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\psi.$$

Si l'action extérieure, comme celle d'un champ magnétique ou d'un champ électrique, est déterminée par l'orientation de la molécule par rapport à une seule direction, celle du champ, que nous supposerons confondue avec oz, w n'est fonction que de ϑ et de ψ et l'on peut intégrer par rapport à φ, de sorte que le nombre des molécules par rapport auxquelles la direction du champ est déterminée par les angles ϑ et ψ est:

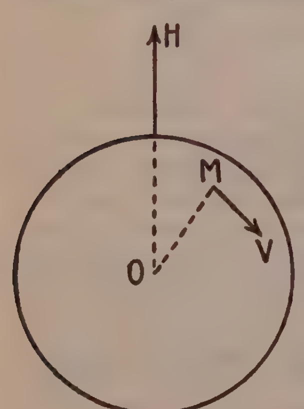
$$Ce^{-\frac{W}{rT}} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi$$

ou:

$$Ce^{-\frac{W}{rT}} d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément d'angle solide correspondant à $d\vartheta \, d\psi$, dans lequel se trouve la direction du champ H par rapport à un trièdre lié à la molécule. A partir de là le calcul de la biréfringence se fait sans difficulté en suivant une marche analogue à celle que j'ai développée pour le cas des molécules qui possèdent un axe principal de symétrie.

Il est d'ailleurs facile, comme je vous le disais au début, de ramener dans ce dernier cas, le problème de la distribution, à celui de molécules ayant seulement deux degrés de liberté de translation, c'est-à-dire au cas traité par Boltzmann sous une forme simple à propos de la loi de répartition de Maxwell.



Menons par un point O une parallèle $O.M$ à la position instantanée de l'axe principal de symétrie d'une molécule et soit M son intersection avec la sphère de rayon unité centrée sur le point O. M représente l'orientation instantanée de la molécule. — Pendant la rotation de celle-ci M se déplace sur la sphère et sa vitesse instantanée est numériquement égale à la vitesse angulaire de rotation Ω de la molécule (en supposant que celle-ci n'a pas de rotation autour de l'axe principal comme on le fait toujours en théorie cinétique — cette hypothèse n'a d'ailleurs rien

d'essentiel puisque l'action du champ ne depend pas de l'orientation autour de cet axe principal). Si I est le moment d'inertie de la molécule par rapport à un diamètre équatorial, l'énergie cinétique est $\frac{1}{2}Iv^2$. L'energie potentielle par rapport au champ dépend de la position du point M par rapport au point où la sphère est traversée par la parallèle OH à la direction du champ.

Le problème de l'orientation de nos molécules est donc ramené à celui de la distribution sur une sphère de points matériels de masse I et soumis à des actions extérieures determinées par leur position sur la sphère — ou encore à celui de molécules en mouvement de translation assujetties à rester dans une couche mince comprise entre deux sphères concentriques et soumises à un champ de force extérieure. La loi établie par Boltzmann pour la distribution d'un semblable gaz est que la densité est proportionnelle à

$$e^{-\frac{W}{rT}}.$$

L'élément de volume de la couche sphérique correspondant à un angle solide au centre $d\omega$ est $\varepsilon\, d\omega$, ε étant l'épaisseur uniforme de la couche. Le nombre des molécules qui correspondent à cet élément $d\omega$ est donc:

$$e^{-\frac{W}{rT}}\, d\omega.$$

La loi de distribution obtenue par Boltzmann étant indépendante de la loi d'action entre les molécules au moment des chocs, il n'y a pas de difficulté provenant de la manière dont les molécules en rotation agissent l'une sur l'autre au moment d'un choc. Il est vrai que les énergies de rotation et de translation peuvent s'échanger. Aussi je vous donne cette comparison pour ce qu'elle vaut et prefère m'en tenir au raisonnement statistique général qui permet d'ailleurs de montrer l'indépendance absolue de la répartition des molécules entre les diverses translations et les diverses rotations possibles.

Je ne crois par conséquent pas que l'emploi fait dans mes raisonnements relatifs à la théorie du magnétisme ou à celle de la biréfingence de la relation de Boltzmann puisse soulever une difficulté.

Plesiosaurus (Thaumatosaurus) aff. megacephalo Stutchbury aus dem unteren Lias von Halberstadt.

Von

Th. Brandes in Göttingen.

Vorgelegt von J. Pompeckj in der Sitzung vom 18. Mai 1912.

Mit 4 Figuren im Text.

Im Jahre 1899 wurde man auf Skelettreste eines relativ großwüchsigen Plesiosauriden im unteren Lias am Kanonenberg bei Halberstadt aufmerksam. Dank der Opferwilligkeit des verstorbenen Apothekers Herrn Johannes Maak konnte ein großer Teil des Tieres geborgen werden; und es bildet jetzt, von ihm restauriert, ein Schaustück des städtischen Museums zu Halberstadt. Die wissenschaftliche Bearbeitung dieses von Maak als Plesiosaurus dolichodeirus Conybeare rekonstruierten, wegen der für diese Spezies ungewöhnlichen Körpergröße und der Abweichungen in den Halsrippen als forma germanica[1]) bezeichneten Sauriers wurde Herrn Professor Pompeckj angeboten, welcher mir die genauere Untersuchung des Skelettes gütigst vorschlug.

Als erster vollständigerer Plesiosauride aus dem nordwestdeutschen Jura erheischt das Exemplar besonderes Interesse. Von den meisten bisher aus Süddeutschland und England bekannten unterscheidet es sich dadurch, daß die verkiesten Skelettelemente

---

1) Johannes Maak veröffentlichte eine Notiz über den Fund in der Illustrierten Zeitung, Leipzig u. Berlin 19. Sept. 1901 p. 426. — Ein angeblich existierendes größeres Manuskript von Herrn Maak über den Saurier hat mir nicht vorgelegen.

nicht wie bei jenen mehr oder minder verdrückt in Kalk oder Schiefer eingebettet waren, sondern, frei im Ton gefunden, ganz von der Matrix befreit werden konnten und größtenteils ihre ursprüngliche Form bewahrt haben.

Es liegen vor:

Vom Kopf: der Gesichtsschädel bis zur Mitte der Orbita, etwa ebensoweit der Unterkiefer, und ein Teil des eingedrückten Hinterhauptes mit dem Condylus occipitalis.

Von der Wirbelsäule: 72 Wirbel, von denen sich 20 als Cervical-, 6 als Pectoral-, 20 als Dorsal- und 26 als Caudalwirbel zu erkennen geben.

Von den ohne Ausnahme zerbrochenen Rippen: nur proximale und distale Enden, sowie vereinzelte Fragmente des Rippenschaftes.

Vom Brustgürtel: die Coracoide und eine Scapula.

Von den Vorderextremitäten: ein Humerus, vom anderen das proximale Ende, ferner eine Ulna und ein Radius, von dem anderen Fragmente.

Vom Becken: die Ilia, die Ischia und Fragmente beider Pubes.

Von den Hinterextremitäten: ein Femur (mit etwas zerbrochenem distalen Ende) und vom zweiten die distale Hälfte, ferner je eine Tibia und Fibula. Außerdem sind noch 6 Extremitätenknochen erhalten, von denen vier ziemlich proximal gelegene Phalangenglieder repräsentieren, während in den beiden übrigen ein Pisiforme und ein Glied aus der proximalen Reihe der Carpalknochen (Ulnare?) bezw. gleichliegende Elemente der Hinterflosse zu erblicken sein mögen.

Es erhellt, daß bei dem lückenhaft überlieferten Material von vornherein auf eine Anzahl für die Fixierung der Gattung und Art wichtiger Daten — Länge von Kopf, Hals, Rumpf und deren Verhältnis zu einander; Bau des clavicularen Bogens am Brustgürtel; absolute Länge der Extremitäten etc. —, die an den süddeutschen und englischen Exemplaren ohne Mühe zu ermitteln sind, verzichtet werden muß.

Auf Grund der Wirbelform — sie ist für die Systematik der Plesiosauriden ein bedeutungsvolles Moment, da Gestalt (und Zahl) der Wirbel den Habitus eines Plesiosaurus in erster Linie bestimmen — lassen sich die Lias-Plesiosaurier in drei Gruppen scheiden: 1. Makrospondyli[1]) (Länge des Wirbels bedeutend

1) Diese Gruppe wurde jüngst von D. M. S. Watson, Mem. and Proceedings of the Manchester Literary and Philosoph. Soc. Sess. 1909—1910. Vol. 54, Part. 1, zu einem neuen Genus, Microcleidus, erhoben.

> Breite). 2. Mesospondyli (Länge annähernd = Breite). 3. Brachyspondyli (Länge erheblich < Breite). Die beiden ersten Gruppen mit einem geringen Teile der dritten umschließt die Gattung Plesiosaurus sens. str., während die überwiegende Zahl der Brachyspondyli auf die Gattung Thaumatosaurus Meyer entfällt.

Der in Rede stehende Saurier gehört der letzten Gruppe an, da er ausgesprochen brachyspondyl ist; die kurzen Wirbelzentren sind fast doppelt so breit wie lang (die Länge schwankt zwischen

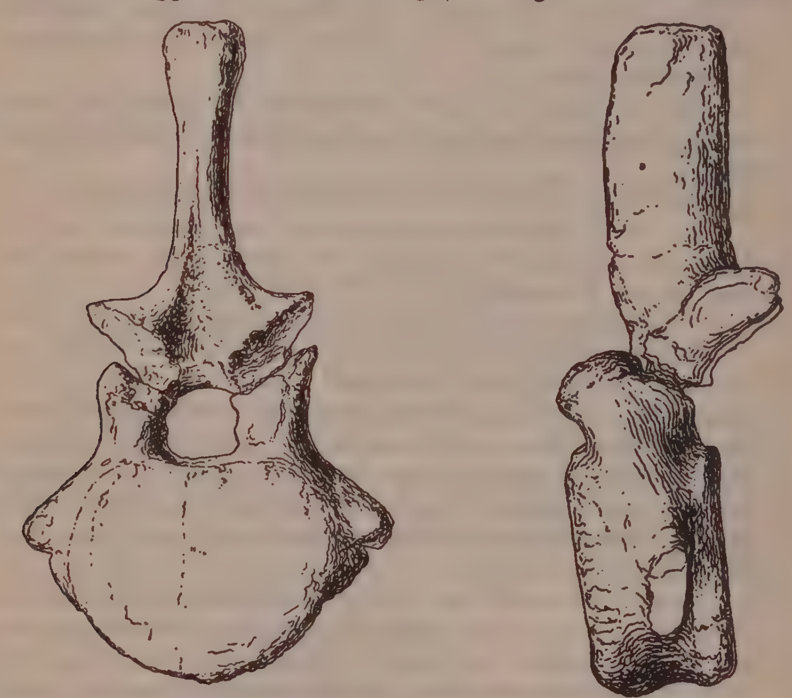


Fig. 1a. Fig. 1b.
II. Pectoralwirbel, a. von hinten gesehen, $^2/_3$ nat. Größe. — b. Seitenansicht.

0,5 und 0,6 der Breite) (Fig. 1a und b). Die Cervical- sind ebenso wie die vorderen Pectoralwirbel mit einem kräftigen Ventralkiel versehen. Der vordere Teil des Schädels ist zu einer im Intermaxillare scharf abgesetzten kurzen Schnauze ausgezogen; ebenso ist der Unterkiefer zu einem Schnauzenteil verlängert. (Fig. 2 u. 3, folgende Seite). Der Brustgürtel ist mit den in der Mitte verdickten Coracoiden küraßartig vorgewölbt (größte Breite des Brustgürtels: 0,36 m). Das Becken ist relativ breit (am vorderen Teil: 0,34 m). Die einzelnen Elemente von Becken- und Brustgürtel sind



Fig. 2. Vorderschädel mit Schnauze, $^2/_3$ nat. Größe.

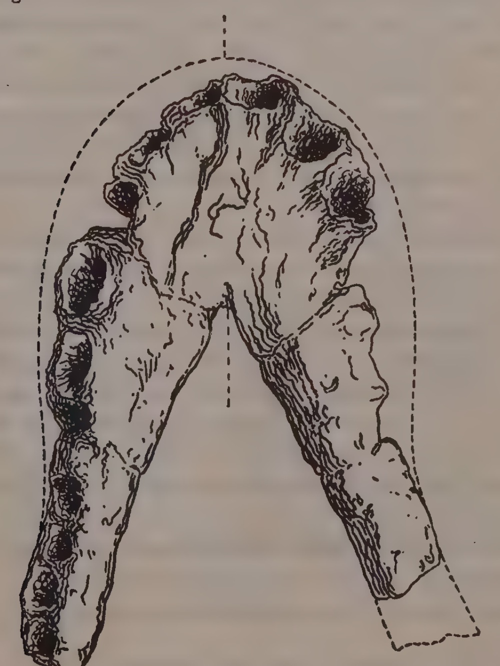


Fig. 3. Schnauzenteil des Unterkiefers, $^2/_3$ nat. Größe.

nicht fest mit einander verwachsen. Humerus und Femur sind von gleicher Länge (0,29 m) und lassen daher auf annähernd gleich lange Extremitäten schließen. Die Gesamtlänge des Tieres ist auf 3—3,25 m zu schätzen.

Es ist anzunehmen, daß die a priori durch innigeren Zusammenhalt ausgezeichnete Reihe der Rumpfwirbel, in der Lücken festzustellen unmöglich ist, durch die den Plesiosaurus-Leichnam benagenden Tiere und andere Vorgänge am wenigsten aus ihrem Verband gebracht und daher am vollständigsten überliefert worden ist. Zudem ist die Möglichkeit, daß selbst die isolierten Rumpfwirbel bei ihrer relativ bedeutenden Größe dem derzeitigen Aufsammler entgangen wären, hier am geringsten. Anders steht es mit den, exponierteren Teilen des Körpers angehörenden, z. T. recht kleinen Hals- und Schwanzwirbeln; von ihnen ist sicher eine verhältnismäßig größere Zahl verloren gegangen, wie auch augenfällige Lücken in der Cervical- und Caudalreihe bezeugen. So fehlt ohne Zweifel das Ende des Schwanzes und der vordere Teil der Halswirbel mit Atlas und Epistropheus. Zieht man dieses Moment in Betracht, so ist bei dem vorliegenden Saurier ein Verhältnis der einzelnen Regionen der Wirbelsäule zu einander ähnlich demjenigen, wie es bei Thaumatosaurus megacephalus Stutchbury (Quarterly Journ. Geol.-Soc. B. 2, 1846 p. 411 Taf. XVIII und Sollas, Quarterly Journ. Geol. Soc. B. 37, 1881 p. 469) statthat, nicht unwahrscheinlich. Da außerdem die Form der Wirbel, der Schädelbau, die Gestalt von Brust- und Beckengürtel sowie die Länge der Extremitäten (Humerus und Femur) des in Rede stehenden Skelettes ganz ähnlich dem von Stutchbury beschriebenen sind, so führe ich dasselbe als Plesiosaurus (Thaumatosaurus) aff. megacephalo Stutchbury in die Literatur ein.

Auch mit Plesiosaurus macrocephalus, und zwar mit dem von Lydekker als Jugendform dieser Spezies erkannten Ples. brachycephalus Owen, hat es große Ähnlichkeit und dürfte bei der ungenügenden Orientierungsmöglichkeit über die Längenverhältnisse in der Wirbelsäule kaum von ihm zu trennen sein, wenn man auf die Tatsache, daß bei Ples. macrocephalus der „humerus much shorter than femur [1])“ ist, kein allzu großes Gewicht legen will. — Die übrigen Verwandtschaftsverhältnisse werden im Anschluß an eine in nächster Zeit erfolgende eingehendere Beschreibung des Skelettes Erörterung finden.

Horizont: Lias α, mittlere Psilonotenschichten mit Psiloceras Johnstoni Sow.

Göttingen, Geolog. palaeontol. Institut, im April 1912.

---

1) R. Lydekker, Catalogue of the fossil Reptilia etc. Part. II, London 1889,

$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen.

(Vorläufige Mitteilung).

Von

Ludwig Bieberbach in Königsberg in Pr.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 2. März 1912.

1) Herr H. A. Schwarz hat im Jahre 1889 darauf hingewiesen, daß man den Beweis der Fundamentaltheoreme in der Theorie der automorphen Funktionen soweit man dabei auf reelle lineare Substitutionsgruppen kommt, — Grenzkreistheorem und Hauptkreistheorem — auf die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ unter gewissen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen zurückführen kann. Die Behandlung dieses Problemes regte darauf die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften an. Es wurde daraufhin in Angriff genommen zuerst von Herrn Picard (Journ. des Math. 1890, 1893, Journ. für Math. 1905) und Herrn Poincaré (Journ. des Math. 1898). Durch die Arbeiten dieser Forscher ist ein Fall bisher unerledigt geblieben, das sogenannte Hauptkreistheorem. Es bezieht sich bekanntlich auf reelle algebraische Kurven. Es handelt sich dabei um die Auffindung von Integralen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$, die längs gewisser Kurven der Riemannschen Fläche in gewisser gegebener Weise unendlich werden, und es ist zu zeigen, daß es immer ein und nur ein solches Integral gibt.

2) In der vorliegenden vorläufigen Mitteilung möchte ich eine Methode angeben, mit der man auch diesen Fall in einfachster Weise erledigen kann, eine Methode die mutatis mutandis auch bei den Fällen der Herren Picard und Poincaré Verwendung finden kann, wie ich in einer ausführlicheren Darstellung auseinander-

setzen werde. Diese Methode will ich hier an dem Beispiele der Integration unserer Differentialgleichung in einem schlichten endlichen ebenen von einer analytischen Kurve begrenzten Gebiete B erläutern. Diese Aufgabe hängt mit der konformen Abbildung dieses Gebietes auf einen Kreisbereich zusammen. Unser Problem ist folgendes: Es soll ein Integral von $\Delta u = e^u$ gefunden werden, das im Inneren des Bereiches B endlich und stetig ist mit seinen ersten und zweiten Ableitungen und das bei Annäherung an den Bereichrand kurz ausgedrückt wie der Logarithmus der Normalen unendlich wird, und es soll gezeigt werden, daß es nur ein solches Integral gibt. Bringt man diese Unstetigkeit in Abzug, so kann das Problem auf folgende Form gebracht werden: Es soll ein im ganzen Bereiche B einschließlich des Randes endliches und im Inneren mit seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetiges Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha(x, y)\, e^u - \beta(x, y)$$

gefunden werden. Dabei sind α, β durchweg positive nirgends verschwindende im Inneren stetige und stetig differentierbare Funktionen, von x und y, die am Rande des Bereiches B beide wie die negative zweite Potenz der Normalen unendlich werden. Außerdem liegt im ganzen Bereich das Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ zwischen endlichen von Null verschiedenen Grenzen. (Schon dieser Ansatz unterscheidet sich von dem der Herren Picard und Poincaré). Unter diesen Voraussetzungen ist weiter zu zeigen, daß es auch nur ein solches Integral gibt. Es wird sich dabei herausstellen, daß diese Unität der Lösung wesentlich durch die Stärke des Unendlichwerdens der Koeffizienten bedingt ist.

3) Vermittelst der von Herrn H. A. Schwarz an dem Beispiel der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ in die Analysis eingeführten Methode des alternierenden Verfahrens hat Herr Picard gezeigt — oder vielmehr man kann es sofort aus seinen Ausführungen, die sich auf eine etwas andere Differentialgleichung beziehen, entnehmen — daß die erste Randwertaufgabe bei $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ in jedem Bereiche in dem α, β endlich sind auf eine und nur eine Weise gelöst werden kann.

Dies Resultat liegt den weiteren Ausführungen zu grunde. Wir suchen nämlich die Lösung unseres Promblemes folgendermaßen zu gewinnen. Wir lösen bei passenden Randwerten für gewisse Teilbereiche $B_1, B_2 \ldots$, die mit wachsendem Index gegen B konvergieren, die erste Randwertaufgabe und zeigen die Kon-

vergenz dieser Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion, die allen unseren Bedingungen genügt.

5) Die eben erwähnten Werte an den Rändern der Teilbereiche wähle ich so, daß sie absolut genommen unter dem nach unseren Annahmen endlichen Maximum von $\left|\log \frac{\alpha}{\beta}\right|$ liegen. Dann liegen die zu diesen Randwerten gehörigen Integrale in ihren Teilbereichen durchweg unter diesen Grenzen; denn anderenfalls müßte z. B. ein solches Integral ein positives Maximum im Bereich besitzen größer als die eben erwähnte Zahl. An dieser Stelle müßte aber dann notwendig $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ negativ oder Null sein, während die rechte Seite an dieser Stelle sicher positiv ist.

6) Für alle die Bereiche B_i denken wir uns nun mit irgend solchen Randwerten die erste Randwertaufgabe gelöst. So erhalten wir eine unendliche Folge von Funktionen $u_1, u_2 \ldots$ Ich zeige, daß diese in jedem Bereiche B_i gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren, die durchweg zwischen den angegebenen Grenzen liegt. Daß diese dann auch die übrigen verlangten Eigenschaften besitzt, kann man zum Schluß mit der Greenschen Formel beweisen. Ich will also zeigen, daß für hinreichend große n und beliebige k und beliebig vorgegebenes ε immer gilt:

$$|u_{n+k} - u_n| < \varepsilon.$$

Zu dem Zwecke mache ich zunächst einen Ansatz, der einem von Herrn Picard beim Beweis der Unität der Randwertaufgabe benutzten analog ist. Nach dem Mittelwertsatz gilt nämlich für die Differenz $u_{n+k} - u_n = v$ in B_n eine lineare Differentialgleichung von der Form $\Delta v = \alpha\gamma v$, wobei γ stetig und stetig differentierbar ist und zwischen endlichen positiven von Null verchiedenen Grenzen liegt, die bei allen diesen Differenzen v die gleichen sind. Bezeichnet man dann mit $G(x, y, \xi, \eta)$ die zum Bereich B_n gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $\Delta v - \alpha\gamma v$, deren Existenz leicht zu beweisen ist, so gilt für v die Darstellung

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int \bar{v}\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds,$$

wobei mit $\bar{v}$ die Randwerte von v am Rande von B_n bezeichnet sind. Diese liegen also nach 5 zwischen endlichen a priori angebbaren Grenzen. Am Rande des Bereiches B_n ist wie man leicht einsieht $\frac{\partial G}{\partial n}$ positiv. Wir haben daher nur zu beweisen,

daß, wenn der Bereich B_n einen genügend hohen Index hat und wir den Parameter x, y der Greenschen Funktion auf einen festen aber willkürlichen Bereich B_i beschränken, notwendig $\int \frac{\partial G}{\partial n} ds$ unter jede vorgegebene Grenze sinkt.

7) Dies kann man wie folgt einsehen. Setzt man in der Greenschen Formel

$$\int\int (u\Delta v - v\Delta u)\, d\xi d\eta = \int \left(v \frac{\partial v}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$$

$v = 1$ und $u = G$ so erhält man

$$2\pi - \int\int \alpha\gamma G d\xi d\eta = \int \frac{\partial G}{\partial n} ds,$$

wobei das Doppelintegral über irgend einen Teilbereich von B_n oder diesen selbst und das Linienintegral über den zugehörigen Rand zu erstrecken ist. Da $\frac{\partial G}{\partial n}$ am Rande von B_n positiv ist, so folgt hieraus einmal, daß für alle unsere Näherungsbereiche, wenn G die jeweilige Greensche Funktion ist, immer $\iint \alpha\gamma G d\xi d\eta \leqq 2\pi$ bleibt. Und weiter kann man daraus schließen, daß das Integral $\int \frac{\partial G}{\partial n} ds$ mit wachsendem Bereiche B_n schließlich unter jede vorgegebene Grenze sinkt. Dies beruht, wenn einmal diese saloppe und nicht ganz korrekte Ausdrucksweise gestattet ist, darauf, daß wegen der Stärke mit der α schließlich unendlich wird, notwendig G so stark Null werden muß, daß seine Normalabteilung am Rande sich immer mehr der Null nähert. Die exakte Begründung dieser Behauptung werde ich in der ausführlichen Darstellung des Gegenstandes geben. Durch ganz analoge Schlüsse läßt sich auch die Unität der so gewonnenen Lösung nachweisen. Dies Verfahren läßt ersichtlich auch manchen interessanten Schluß über die Randwertaufgabe bei der erwähnten linearen Differentialgleichung selbst zu. Ich hoffe auch hierauf zurückzukommen.

Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

(Auszug aus einem Briefe an R. Fricke).

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung am 13. Januar 1912 durch den Vorsitzenden Sekretär.

Sei $\varkappa$ eine Klasse von diskontinuierlichen linearen Gruppen mit einer bestimmten charakteristischen Signatur; es gilt in bezug auf diese Klasse das „allgemeine Kleinsche Fundamentaltheorem“, wenn zu jeder kanonisch zerschnittenen mit n Punkten signierten Riemannschen Fläche vom Geschlechte p ein und nur ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen einer Gruppe der Klasse $\varkappa$ gehört.

Bei der Kontinuitätsmethode, deren Klein sich in Bd. 21 der Mathematischen Annalen und Poincaré in Acta math. Bd. 4 zur Begründung des Fundamentaltheorems bedient, kommt es auf den Beweis folgender sechs Sätze an.

1. Die Klasse $\varkappa$ enthält zu jedem ihr angehörigen kanonischen System von Fundamentalsubstitutionen ohne Ausnahme eine durch $6p-6+2n$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung.

2. Bei stetiger Änderung der Fundamentalsubstitutionen innerhalb der Klasse $\varkappa$ ändert sich die entsprechende kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche ebenfalls stetig.

3. Zwei verschiedene kanonische Systeme von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$ können nicht derselben zerschnittenen Riemannschen Fläche entsprechen.

4. Wenn eine Folge von kanonisch zerschnittenen mit n Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p gegen eine kanonisch zerschnittene mit n Punkten signierte Riemannsche Fläche vom Geschlechte p konvergiert und wenn jeder Fläche der Folge ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$ entspricht, so entspricht der Limesfläche ebenfalls ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$.

5. Die kanonisch zerschnittenen mit n Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p bilden bei Zugrundelegung des Riemannschen Klassenbegriffs eine stetige Mannigfaltigkeit, welche zu jeder ihr angehörigen Fläche ohne Ausnahme eine durch $6p-6+2n$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung enthält.

6. Im r-dimensionalen Raume ist das eineindeutige und stetige Bild eines r-dimensionalen Gebiets wiederum ein Gebiet.

Die Sätze 1, 2, 3, 4 lasse ich hier außer Betracht. Für den Grenzkreisfall sind sie schon von Poincaré in Bd. 4 der Acta Mathematica erledigt worden [1]), während für den allgemeinsten Fall nur die Sätze 3 und 4 noch des erschöpfenden Beweises harren; indes ist es Herrn Koebe gelungen, auch diese Lücke vollständig auszufüllen [2]).

Die Sätze 5 und 6 bilden die von Ihnen hervorgehobenen [3]) topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises. Von diesen ist Satz 6 durch meine unlängst erschienene Arbeit „Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets" [4]) erledigt worden, und die Anwendung von Satz 5 wird am einfachsten umgangen, indem wir den Kontinuitätsbeweis in folgender, abgeänderter Form führen:

---

1) Der Poincaré'sche Beweis des Satzes 4 (l. c. pag. 250—276) bedarf vom jetzigen Standpunkte der Mengenlehre einiger geringfügiger Abänderungen, auf welche ich in einem auf der Naturforscherversammlung in Karlsruhe gehaltenen Vortrage hingewiesen habe.

2) Vgl. dessen vorläufige Note vom 13. Januar 1912 in den Gött. Nachr. „Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung" und „zur Begründung der Kontinuitätsmethode" in den Leipziger Berichten.

3) Fricke-Klein, Theorie der automorphen Funktionen, Bd, 2, S. 413.

4) Mathem. Annalen 71, S. 305—313. Vgl. auch die daselbst S. 314 zitierten Abhandlungen von Baire und Lebesgue, und eine demnächst in Mathem. Annalen 72 erscheinende Arbeit, in welcher der Satz fast unmittelbar aus der Invarianz der Dimensionenzahl gefolgert wird.

Satz 6 ist in der allgemeinen Form des Textes natürlich entbehrlich, wenn man beweisen kann, daß die Beziehung zwischen den Systemen von Fundamentalsubstitutionen und den entsprechenden zerschnittenen Riemannschen Flächen eine analytische ist.

Wir wählen $m > 2p - 2$ [1]) und betrachten auf der einen Seite die Menge M_g der zur Klasse $\varkappa$ gehörigen automorphen Funktionen mit ausschließlich einfachen Verzweigungspunkten und mit m einfachen, außerhalb der singulären Stellen der Gruppe liegenden Polen im Fundamentalbereich [2]), auf der anderen Seite die Menge M_f der aus m numerierten Blättern zusammengesetzten, über die Ebene ausgebreiteten, mit n im Endlichen gelegenen Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p mit $2m + 2p - 2$ numerierten einfachen, im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten [2]); die Numerierung sowohl der Blätter wie der Verzweigungspunkte soll dabei der kanonischen Anordnung im Sinne von Lüroth-Clebsch entsprechen.

Die Menge M_f bildet ein Kontinuum und besitzt zu jeder ihr angehörigen Fläche ohne Ausnahme eine durch $4p - 8 + 2n + 4m$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung.

Zu einer willkürlichen der Menge M_g angehörigen automorphen Funktion φ existiert in M_g eine durch $4p - 8 + 2n + 4m$ reelle Parameter bestimmbare Umgebung u_φ; diese Parameter sind die m komplexen Stellen der Pole im Fundamentalbereich, die $m - p - 1$ komplexen Verhältnisse von $m - p$ willkürlich anzunehmenden Polresiduen und die $6p - 6 + 2n$ Parameter der kanonischen Systeme von Fundamentalsubstitutionen. Das Wertegebiet der zu u_φ gehörigen Parameter bildet ein $(4p - 8 + 2n + 4m)$-dimensionales Gebiet w_φ.

Der Funktion φ entspricht eine diskrete Menge von zu M_f gehörigen Flächen. Weiter folgern wir aus den Sätzen 1, 2, 3 und aus der Bemerkung, daß eventuelle birationale Transformationen einer Riemannschen Fläche in sich (nicht nur für die einzelne Riemannsche Fläche, sondern auch für die Gesamtheit der zu u_φ gehörigen Riemannschen Flächen) nicht beliebig klein werden können [3]),

---

1) Um die Gedanken zu fixieren, setzen wir im Folgenden $p > 1$ voraus.

2) Automorphe Funktionen, bez. über die Ebene ausgebreitete Riemannsche Flächen, welche sich nur um additive und multiplikative Konstanten unterscheiden, betrachten wir als identisch.

3) Birationale Transformationen einer Riemannschen Fläche vom Geschlechte $p > 1$ in sich können nämlich nach Hurwitz (Math. Annalen 41, S. 428) unmöglich ein kanonisches Schnittsystem in ein äquivalentes kanonisches Schnittsystem überführen. (Zwei kanonische Schnittsysteme heißen äquivalent, wenn sie sich durch stetige Variierung auf der als fest gedachten Fläche ineinander überführen lassen). Dasselbe gilt übrigens ganz allgemein von jeder periodischen, eineindeutigen und stetigen Transformation einer Fläche vom Geschlechte $p > 1$ in sich, weil die Überlagerungsfläche, welche sich um die Menge der Fixpunkte aperiodisch herum-

daß einem hinreichend klein gewählten w_φ eine Menge von in M_f gelegenen eineindeutigen und stetigen Bildern, mithin auf Grund von Satz 6 eine in M_f gelegene Gebietsmenge entspricht. Dann aber entspricht auch der ganzen Menge M_g in M_f eine Gebietsmenge G_f.

Wir formulieren nun Satz 4 in folgender Form:

„Wenn eine Folge von kanonisch zerschnittenen Flächen von M_f gegen eine kanonisch zerschnittene Fläche von M_f konvergiert und wenn jeder Fläche der Folge ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$ entspricht, so entspricht der Limesfläche ebenfalls ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$“ [1]).

Diese Eigenschaft zieht unmittelbar nach sich, daß die Gebietsmenge G_f in M_f keine Grenze besitzen kann, mithin die ganze Mannigfaltigkeit M_f ausfüllen muß. Hiermit ist das allgemeine Fundamentaltheorem bewiesen für jede in geeigneter Weise kanonisch zerschnittene, mit n Punkten signierte Riemannsche Fläche vom Geschlechte p, auf welcher algebraische Funktionen mit m außerhalb der Stigmata liegenden einfachen Polen und mit ausschließlich einfachen Verzweigungspunkten existieren, d. h. (für hinreichend großes m) für jede in geeigneter Weise kanonisch zerschnittene, mit n Punkten signierte Riemannsche Fläche vom Geschlechte p überhaupt, dann aber auf Grund Ihres Würfelsatzes [2]) zugleich für jede irgendwie kanonisch zerschnittene, mit n Punkten signierte Riemannsche Fläche vom Geschlechte p.

---

windet, sonst einer periodischen, eineindeutigen und stetigen Transformation ohne Fixpunkte unterliegen würde.

Der im Texte benutzte Satz läßt sich seinerseits auch auf Grund der Uniformisierung beweisen, z. B. im von Poincaré auf Grund eines Schreibens von Klein in Acta Math. 7, S. 15—19 entwickelten Gedankengange.

1) In meinem Karlsruher Vortrage habe ich gezeigt, wie diese Form des Satzes sich für den Grenzkreisfall aus den Acta Math. 4, S. 250—276 enthaltenen Entwicklungen Poincaré's ablesen läßt.

2) Fricke-Klein, Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 2, S. 305.

Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen.

Von

Wilhelm Blaschke in Greifswald.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 18. Mai.

Es soll hier ein einfacher und naheliegender Beweis dafür erbracht werden, daß eine geschlossene konvexe Fläche als Ganzes nicht derart stetig deformiert („verbogen") werden kann, daß bei der Deformation die Bogenlängen der auf der Fläche gezogenen Kurven ungeändert bleiben[1]. Die wesentlichen Hilfsmittel des Beweises sind der von Weingarten eingeführte Begriff der Verschiebungsfunktion und ein von Hilbert bewiesener Satz über eine partielle Differentialgleichung auf der Kugel.

Bezeichnen wir mit t die Zeit und mit u, v Gaußische Parameter auf einer stetig verbogenen Fläche, so können wir die Folge der Deformationen so in Formeln fassen

$$(1) \qquad x = x(u, v, t), \quad y = y(u, v, t), \quad z = z(u, v, t).$$

Diese Funktionen wollen wir als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen. Die Bedingung, daß die Flächen $t = \text{const.}$ durch gleiche Wertepaare u, v isometrisch aufeinander bezogen sein sollen, ergibt die partiellen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &x_u x_{ut} + y_u y_{ut} + z_u z_{ut} = 0, \\ &x_v x_{vt} + y_v y_{vt} + z_v z_{vt} = 0, \\ &x_u x_{vt} + y_u y_{vt} + z_u z_{vt} + \\ &x_v x_{ut} + y_v y_{ut} + z_v z_{ut} = 0. \end{aligned}$$

1) Die ersten Beweise für diesen Satz hat H. Liebmann in den Göttinger Nachrichten (1899) und in den mathematischen Annalen 53 (1900) und 54 (1901) erbracht. Die Unverbiegbarkeit der Kugel hat Hilbert sehr einfach bewiesen. Grundlagen der Geometrie, 3. Auflage (Leipzig 1909), Anhang V, S. 251 u. f.

Um diese Gleichungen symmetrischer schreiben zu können, führt man nach Weingarten die Verschiebungsfunktion

$$\varphi(u, v, t) = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \sum (x_u x_{vt} - x_v x_{ut}) \tag{3}$$

ein[1]).

Man konstruiere nun zu einer Fläche $\mathfrak{F}$ aus der Schar (1), die etwa dem Parameterwert $t = 0$ entsprechen möge, Bianchis assoziierte Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, die Punktweise durch parallele Tangentialebenen auf $\mathfrak{F}$ bezogen ist und deren so zu den Parameterwerten u, v gehörige Tangentialebene vom Koordinatenanfang die Entfernung $\varphi = \varphi(u, v, 0)$ hat. Es seien

$$L\,du + 2M\,du\,dv + N\,dv$$
$$\tilde{L}\,du + 2\tilde{M}\,du\,dv + \tilde{N}\,dv$$

die zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{F}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$. Dann besteht, wie aus (2) und (3) hergeleitet werden kann, die Identität

$$L\tilde{N} - 2M\tilde{M} + N\tilde{L} = 0. \tag{4}$$

Diese Relation wollen wir nun umformen, indem wir zu einer andern analytischen Darstellung für die Flächen $\mathfrak{F}$, $\tilde{\mathfrak{F}}$ übergehen. Wir drücken nämlich die Entfernung p der Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ vom Koordinatenanfang aus als Funktion der Richtungskosinus X, Y, Z der zugehörigen Flächennormalen

$$p = H(X, Y, Z). \tag{5}$$

Dabei benutzen wir die Identität

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \tag{6}$$

um die Funktion H positiv-homogen vom Grade Eins zu machen, daß also für jedes positive k

$$kH(X, Y, Z) = H(kX, kY, kZ) \tag{7}$$

wird. Als Koordinaten des Berührungspunktes findet man durch partielle Differentiation

$$x = H_x(X, Y, Z), \quad y = H_y(X, Y, Z), \quad z = H_z(X, Y, Z). \tag{8}$$

---

1) Man vergleiche hier und im Folgenden den Enzyklopädieartikel von Voß III D 6a, S. 430 oder auch Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Auflage, Leipzig 1910, Kapitel XI.

Wir beschränken unsere Betrachtungen für den Augenblick auf ein Gebiet, in dem $Z > 0$ ist und setzen

$$u = \frac{X}{Z}, \quad v = \frac{Y}{Z}. \tag{9}$$

Dann findet man

$$\begin{aligned} x_u &= ZH_{XX}, \quad y_u = ZH_{YX}, \quad z_u = ZH_{ZX}, \\ x_v &= ZH_{XY}, \quad y_v = ZH_{YY}, \quad z_v = ZH_{ZY}, \end{aligned} \tag{10}$$

wobei zum Beispiel

$$H_{XY} = \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} H(X, Y, Z)$$

ist. Bei der Berechnung der Differentialquotienten soll von der Relation (6) kein Gebrauch gemacht werden; dann werden die ersten Differentialquotienten positiv-homogen vom nullten und die zweiten vom minus ersten Grade. Man findet ferner

$$\begin{aligned} X_u &= Z - XXZ, \quad Y_u = -XYZ, \quad Z_u = -XZZ, \\ X_v &= -XYZ, \quad Y_v = Z - YYZ, \quad Z_v = -YZZ. \end{aligned} \tag{11}$$

Berücksichtigt man die aus der Homogeneität der ersten Differentialquotienten von H folgenden Relationen

$$\begin{aligned} XH_{XX} + YH_{XY} + ZH_{XZ} &= 0, \\ XH_{YX} + YH_{YY} + ZH_{YZ} &= 0, \\ XH_{ZX} + YH_{ZY} + ZH_{ZZ} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

so erhält man für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$L = -\sum x_u X_u, \quad M = -\sum x_u X_v = -\sum x_v X_u, \quad N = -\sum x_v X_v$$

die Ausdrücke

$$L = -Z^2 H_{XX}, \quad M = -Z^2 H_{XY}, \quad N = -Z^2 H_{YY}. \tag{13}$$

Führt man nun für die Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine analoge Darstellung

$$\tilde{p} = \varphi = \tilde{H}(X, Y, Z) \tag{14}$$

ein, so nimmt die Beziehung (4) die neue Form an

$$H_{XX}\tilde{H}_{YY} - 2H_{XY}\tilde{H}_{XY} + H_{YY}\tilde{H}_{XX} = 0. \tag{15}$$

Zufolge der Homogeneität von H und $\tilde{H}$ besteht, wie man sich leicht überzeugt, die Identität

$$\frac{1}{X^2}(H_{YY}\tilde{H}_{ZZ}-2H_{YZ}\tilde{H}_{YZ}+H_{ZZ}\tilde{H}_{YY})=\frac{1}{Y^2}(H_{ZZ}\tilde{H}_{XX}-2H_{ZX}\tilde{H}_{ZX}+H_{XX}\tilde{H}_{ZZ})$$
(16)
$$=\frac{1}{Z^2}(H_{XX}\tilde{H}_{YY}-2H_{XY}\tilde{H}_{XY}+H_{YY}\tilde{H}_{XX}).$$

Alle drei Ausdrücke in Klammern müssen identisch verschwinden.

Nimmt man die Fläche $\mathfrak{F}$ als gegeben und die assoziierte Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ als gesucht an, so hat man für die unbekannte Funktion $\tilde{H}$ eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, und zwar vom elliptischen Typus, da

(17)
$$R_1 R_2 = \frac{1}{X^2}(H_{YY}H_{ZZ}-H_{YZ}^2) = \frac{1}{Y^2}(H_{ZZ}H_{XX}-H_{ZX}^2) = \frac{1}{Z^2}(H_{XX}H_{YY}-H_{XY}^2)$$

der reziproke Wert der Gaußischen Krümmung der konvexen Fläche $\mathfrak{F}$ ist. Von dieser sich selbst adjungierten Differentialgleichung hat Hilbert bewiesen[1]), daß X, Y, Z und deren lineare Kombinationen die einzigen auf der ganzen Kugel stetigen Lösungen sind. Man kann dies auch auf geometrischem Wege unschwer einsehen.

Die Verschiebungsfunktion hat also die Form

(18)
$$\varphi = \tilde{H} = aX + bY + cZ.$$

Dann reduziert sich aber die assoziierte Fläche auf den Punkt

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

und an Stelle der Verbiegung tritt eine bloße Bewegung von $\mathfrak{F}$.

Damit ist der angekündigte Nachweis erbracht. Diese Gedanken sollen an anderer Stelle weiter ausgeführt werden. Dabei wird sich unter anderm auch eine einfache kinematische Deutung für die assoziierte Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ ergeben.

---

1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 6. Mitteilung, Abschnitt XIX (Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche) Göttinger Nachrichten 1910.

Eldena in Pommern, im Mai 1912.

Zur Theorie des Zeemanneffektes in beliebiger Richtung.

Von

K. Försterling.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung am 18. Mai 1912.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung[1]) hatte ich die Fortpflanzung und die Polarisationszustände des Lichtes in einem einaxigen, drehenden absorbierenden Kristall diskutiert. Die Analogie eines solchen Kristalls mit einem in einem Magnetfeld befindlichen isotropen Körper ist schon öfters betont worden. Ich möchte daher in dieser Arbeit dieselben Betrachtungen wie früher auf einen isotropen Körper im Magnetfeld anwenden. In mancher Hinsicht liegen die Verhältnisse hier günstiger, weil aus den Grundlagen der Theorie bestimmte Dispersionsverhältnisse gegeben sind. Untersuchungen über die Theorie des Zeemanneffektes bei beliebiger Beobachtungsrichtung gegen das äußere Feld sind bisher von W. Voigt[2]) und H. A. Lorentz[3]) angestellt worden. Die Resultate werden wir im Folgenden benutzen. Indes ist unsere Fragestellung eine andere. Während H. A. Lorentz nach Aufstellung der allgemeinen Formeln sich im Wesentlichen auf die Mitten der drei Streifen des Zeemannschen Triplets beschränkt (falls dasselbe vollständig getrennt ist) soll uns hauptsächlich folgende Frage beschäftigen:

Parallel und senkrecht zum Magnetfeld pflanzen sich je zwei Wellen fort; wie ordnen sich die Wellen in diesen beiden Rich-

---

1) K. Försterling, Göttinger Nachr. 1912 S. 217.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 1 S. 389, 1910.

3) H. A. Lorentz, Amsterdam Proc. 12 S. 321, 1909.

tungen einander zu, wenn man eine stetige Normalenfläche beim Uebergang von einer dieser Richtungen zur anderen voraussetzt?

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in meiner früheren Arbeit. Der dort hergeleiteten Grundformel (1) entspricht bei Zugrundelegung des allgemeinen Ansatzes von W. Voigt für die komplizierteren Typen des Zeemanneffektes die Beziehung:

$$\begin{aligned} \Xi &= \Theta_1 X - i d_1 Y \qquad & \mathsf{A} &= A \\ H &= \Theta_1 Y + i d_1 X & \mathsf{B} &= B \\ Z &= \Theta_3 Z & \Gamma &= C. \end{aligned}$$

Hierbei ist angenommen, daß das äußere Magnetfeld R_0 in die Z-Axe fällt. Die elektronentheoretische Deutung der Θ und d mag zunächst unerörtert bleiben. Hierzu kommen noch die Maxwellschen Gleichungen. Führt man die Gesamtkomponenten der elektrischen und magnetischen Polarisation Ξ' und A' senkrecht zu der Ebene, welche R_0 und die Wellennormale enthält, den Hauptschnitt, ein und setzt $\Theta_1 c^2 + \Theta_3 s^2 = \Theta_{11}$ (c und s sind hier der Kosinus und Sinus des Winkels ζ der Wellennormale gegen R_0, welcher hier als reell vorausgesetzt werden mag), so erhält man die den Gleichungen (4) (5) in der früheren Arbeit entsprechende Beziehung:

$$(1) \qquad \begin{aligned} B\left(\frac{1}{\mathfrak{n}^2} - \Theta_{11}\right) &= -i d_1 c A' \\ A'\left(\frac{1}{\mathfrak{n}^2} - \Theta_1\right) &= +i d_1 c B. \end{aligned}$$

In seiner Magnetooptik behandelt W. Voigt hauptsächlich den Fall wenig variierender Brechungsindizes, was auf eine Beschränkung auf geringe Absorptionsstärken und kleine Doppelbrechung hinauskommt. Bei Gasen kann man ferner den Brechungsindex mit 1 vertauschen, falls man sich nicht in der unmittelbaren Nähe eines Absorptionsstreifens befindet.

Wir wollen hier dieselben vereinfachenden Annahmen machen. Setzt man dann noch:

$$\frac{1}{\Theta_{11}} - \frac{1}{\Theta_1} = \mathfrak{n}_0^2, \quad \frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_{11}} = \eta, \quad \frac{dc}{\Theta_1 \Theta_{11}} = \vartheta,$$

so erhält man:

$$\mathfrak{n} - 1 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}_0^2 - 1) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}$$

$$\left(\frac{A'}{B_1}\right)\left(\frac{A'}{B_2}\right) = +1$$

$$\frac{A'}{B} = \pm i\left[\pm\frac{\eta}{\vartheta} + \sqrt{1+\frac{\eta^2}{\vartheta^2}}\right].$$

Wir haben also wieder zwei Ellipsen, deren Axe um gleiche aber entgegengesetzte Winkel aus dem Koordinatensystem herausgedreht sind und welche gleiches Axenverhältnis haben und im entgegengesetzten Sinn durchlaufen werden.

Für das durchsichtige Gebiet sagen die Formeln aus, daß, solange η und ϑ nicht Null werden, sich die Normalenflächen für kein ζ schneiden und daß auf jeder Fläche der gleiche Rotationssinn für alle ζ besteht. Diesen Forderungen genügen wir wieder durch die Zuordnung:

$$(2)\quad \begin{aligned} \mathfrak{n}_1 &= \frac{\mathfrak{n}_0^2-1}{2} + \frac{\eta}{2}\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right| \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = +i\frac{\eta}{\vartheta}\left\{1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\} \\ \mathfrak{n}_2 &= \frac{\mathfrak{n}_0^2-1}{2} - \frac{\eta}{2}\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right| \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{B}} = -i\frac{\eta}{\vartheta}\left\{-1+\left|\sqrt{1+\frac{\vartheta^2}{\eta^2}}\right|\right\}. \end{aligned}$$

Die Zuordnung im Absorptionsgebiet soll so getroffen sein, daß sie stetig in die für das durchsichtige getroffene übergeht. Dies wird außer beim Passieren singulärer Stellen, deren Aufsuchung uns ja gerade beschäftigt, immer möglich sein.

Für die Polarisationszustände folgt:

$$(3)\qquad \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} \pm i \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{\vartheta}{\eta}.$$

β Winkel der Ellipsenaxen gegen den Hauptschnitt,
$\operatorname{tg}\alpha$ Axenverhältnis.

(Hierin ist das $\pm$ Zeichen zu wählen, je nachdem die Phasenverzögerung in der betreffenden Ellipse $\lesseqgtr 180^0$ ist.) Wir wollen noch setzen:

$$\Delta = \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2 = n_1 - n_2 - i(k_1 - k_2) = \Delta' - i\Delta''$$
$$\eta = \bar{\eta} s^2 \qquad \vartheta = \bar{\vartheta} c.$$

Dann erhält man:

$$(4)\qquad \Delta = \sqrt{\bar{\vartheta}^2 c^2 + \bar{\eta} s^4}.$$

Offenbar ist $\bar{\eta}$ die Doppelbrechung der linearen Wellen $\perp R_0$, $\bar{\vartheta}$ die der zirkularen $\parallel R_0$. Die Ausdrücke $\bar{\eta}$ und $\bar{\vartheta}$ sind also aus der bekannten Theorie direkt zu übernehmen. Wir behalten hier die Bezeichnung der „Magneto- und Elektrooptik" Voigts bei. Es ist also ϱ eine Konstante des Körpers, μ_0 und μ_0' mißt die Zerlegung der Streifen in der Skala der Frequenzen ν und ist R_0 proportional. Der Ort der unzerlegten Linie sei ν_0, die Dämpfung

der Elektronenbewegung ν'. Wenn wir noch $\nu - \nu_0 = \mu$ setzen und uns auf die unmittelbare Nähe der Linie beschränken, so gilt für das Triplet und das Quadruplet:

$$\overline{\vartheta} = \frac{\varrho}{2\nu_0}\left[\frac{1}{2(\mu+\mu_0) - i\nu'} - \frac{1}{2(\mu-\mu_0) - i\nu'}\right] \tag{5}$$
$$= \frac{2\varrho}{\nu_0}\frac{\mu_0}{[2(\mu+\mu_0) - i\nu'][2(\mu-\mu_0) - i\nu']},$$

ferner für das Triplet:

$$\overline{\eta}_T = \frac{\varrho}{2\nu_0}\left[\frac{1}{2(\mu+\mu_0) - i\nu'} - \frac{1}{2(\mu-\mu_0) - i\nu'} - \frac{2}{2\mu - i\nu'}\right] \tag{6}$$
$$= \frac{\varrho}{\nu_0}\frac{\mu_0^2}{[2(\mu+\mu_0) - i\nu'][2(\mu-\mu_0) - i\nu'][2\mu - i\nu']}$$

und für das Quadruplet:

$$\overline{\eta}_Q = \frac{\varrho}{2\nu_0}\left[\frac{1}{2(\mu+\mu_0) - i\nu'} + \frac{1}{2(\mu-\mu_0) - i\nu'} - \frac{1}{2(\mu+\mu_0') - i\nu'} - \frac{1}{2(\mu-\mu_0') - i\nu}\right.$$
$$= \frac{\varrho}{\nu_0}\frac{[\mu_0^2 - \mu_0'^2][2\mu - i\nu']}{[2(\mu+\mu_0) - i\nu'][2(\mu-\mu_0) - i\nu'][2(\mu+\mu_0') - i\nu'][2(\mu-\mu_0') - i\nu']}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Streifen der Absorptionslinien so weit getrennt sind, daß die Mitte zwischen zwei Streifen als vollkommen durchsichtig angesehen werden kann, also ν' hier als klein neben μ_0 resp. $\mu_0 - \mu_0'$ angenommen werden darf. In dieser Annäherung kann auch in dem letzten Ausdruck für $\overline{\eta}$ beim Quadruplet im Zähler $i\nu'$ wegbleiben, da auch bei $\mu = 0$ diese Größe von der Größenordnung $\frac{\nu'}{\mu_0^2}$ ist, welches nach unserer Annahme als sehr klein mit Null vertauscht werden darf. Der gewöhnlichen Bezeichnung folgend, wollen wir alle elektrisch $\parallel R_0$ (also magnetisch $\perp R_0$) schwingenden Wellen die p-Wellen, alle elektrisch $\perp R_0$ schwingenden Wellen die s-Wellen nennen. Die s-Wellen haben ihre Absorptionsstreifen bei $\mu = \pm\mu_0$, die p-Wellen bei $\mu = 0$ im Triplet, bei $\mu = \pm\mu_0'$ im Quadruplet. Unter unseren Annahmen folgt für $\overline{\vartheta}$ und $\overline{\eta}$:

in den Absorptionsstreifen der s-Wellen:

$$\overline{\vartheta} = \frac{\varrho}{\nu_0}\frac{\mu_0}{\mu \mp \mu_0}\frac{1}{2(\mu\pm\mu_0) - i\nu'}$$
$$\overline{\eta}_T = \frac{\varrho}{4\nu_0}\frac{\mu_0^2}{\mu(\mu\mp\mu_0)}\frac{1}{2(\mu\pm\mu_0) - i\nu'} \tag{8}$$
$$\overline{\eta}_Q = \frac{\varrho}{4\nu_0}\frac{\mu(\mu_0^2 - \mu_0'^2)}{[\mu^2 - \mu_0'^2][\mu\mp\mu_0]}\frac{1}{2(\mu\pm\mu_0) - i\nu'}$$

in einem Absorptionsstreifen der p-Welle:

$$
\begin{aligned}
\overline{\vartheta} &= \frac{\varrho}{2\nu_0} \frac{\mu_0}{\mu^2 - \mu_0^2} \\
\text{(9)} \qquad \overline{\eta_r} &= \frac{\varrho}{4\nu_0} \frac{\mu_0^2}{{}^2 - \mu_0^2} \frac{1}{2\mu - i\nu'} \\
\overline{\eta_\varrho} &= \frac{\varrho}{4\nu_0} \frac{\mu\,(\mu_0^2 - \mu_2'^0)}{(\mu^2 - \mu_0^2)\,(\mu \mp \mu_0')} \frac{1}{2(\mu \pm \mu_0') - i\nu'}
\end{aligned}
$$

in dem durchsichtigen Gebiet außerhalb des Triplets oder Quadruplets oder zwischen den hinreichend weitgetrennten Absorptionslinien:

$$
\begin{aligned}
\overline{\vartheta} &= \frac{\varrho}{2\nu_0} \frac{\mu_0}{\mu^2 - \mu_0^2} \\
\text{(10)} \qquad \overline{\eta_r} &= \frac{\varrho}{8\nu_0} \frac{\mu_0^2}{\mu\,(\mu^2 - \mu_0^2)} \\
\overline{\eta_\varrho} &= \frac{\varrho}{8\nu_0} \frac{\mu\,(\mu_0^2 - \mu_0'^2)}{(\mu^2 - \mu_0^2)\,(\mu \;\; - \mu_0'^2)}
\end{aligned}
$$

Diese drei Fälle gehen wie man sieht in einander über. Sie stellen $\overline{\eta}$ und $\overline{\vartheta}$ für das ganze Gebiet dar.

Sehr einfach werden diese Formeln für die Polarisationsverhältnisse. Im durchsichtigen Gebiet und in den Absorptionsstreifen der s-Welle gilt nach (3)

$$
\text{(11)} \qquad
\begin{aligned}
& 4\frac{\mu}{\mu_0}\frac{c}{s^2} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \beta = 0 \\
& \qquad\qquad \text{für das Triplet,} \\
& 4\frac{\mu_0}{\mu}\frac{\mu^2 - \mu_0'^2}{\mu_0^2 - \mu_0'^2}\frac{c}{s^2} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \beta = 0 \\
& \qquad\qquad \text{für das Quadruplet.}
\end{aligned}
$$

Hier also liegen die Hauptaxen der Ellipsen $\parallel$ und $\perp$ R_0. Das Axenverhältnis $\operatorname{tg}\alpha$ enthält keine auf den Körper bezügliche Konstante mehr, weder ϱ noch ν'.

Anders liegen die Dinge in den Absorptionsstreifen der p-Welle. Hier gilt:

$$
\text{(12)} \qquad
\begin{aligned}
& 2\frac{2\mu - i\nu'}{\mu_0}\frac{c}{s^2} = i\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha} \mp \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta \\
& \qquad\qquad \text{für das Triplet,} \\
& 2\frac{[2(\mu \pm \mu_0') - i\nu']\,\mu_0\,[\mu \mp \mu_0']}{(\mu_0^2 - \mu_0'^2)\,\mu} = i\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha} \mp \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta \\
& \qquad\qquad \text{für das Quadruplet.}
\end{aligned}
$$

Hier ist $\beta \neq 0$ oder 90^0, sondern kann im Gegenteil sehr abweichende Werte annehmen. Zu bemerken ist, daß beim Triplet der Ausdruck $\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha}$ nicht mehr von der Frequenz innerhalb des betrachteten Bereiches abhängt, während $\sin 2\alpha \operatorname{cotg} 2\beta$ unabhängig von ξ ist.

Uns interessieren besonders die Punkte, wo die Ellipsen ihren Rotationssinn mittels Durchganges durch lineare Polarisation ändern können, wo also $\operatorname{tg}\alpha = 0$ ist. Dies ist ersichtlich nur möglich in den Absorptionsstreifen der p-Welle bei der Frequenz $\nu = \nu_0$ im Triplet und bei $\nu = \nu_0 \pm \mu_0'$ im Quadruplet. An dieser Stelle herrscht lineare Polarisation, wenn

$$(13) \qquad 2\frac{\nu'}{\mu_0}\frac{c}{s^2} \leqq 1 \qquad \text{resp.} \qquad 4\left|\frac{\nu'\mu_0}{\mu_0^2 - \mu_0'^2}\right|\frac{c}{s^2} \leqq 1.$$

Ist dagegen die linke Seite dieser Gleichung größer als 1, so kann α nicht $= 0$ sein, sondern es ist $\cos 2\beta = 0$, d. h. pflanzen sich zwei Ellipsen mit den Hauptaxen unter 45^0 gegen den Hauptschnitt fort. Der Winkel ζ_0, welcher beide Bereiche trennt, ist gegeben durch:

$$(14) \qquad 2\frac{\nu'}{\mu_0} = \frac{s^2}{c} \qquad \text{resp.} \qquad 4\left|\frac{\nu'\mu_0}{\mu_0^2 - \mu_0'^2}\right| = \frac{s^2}{c}.$$

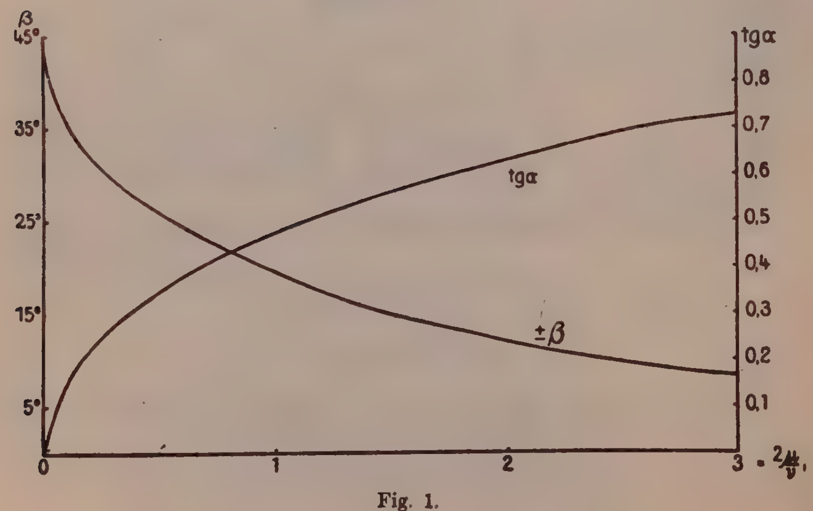


Fig. 1.

In Figur 1 ist — nach (12) berechnet — für diesen Winkel $\operatorname{tg}\alpha$ und β gezeichnet als abhängig von der Frequenz. Hier gilt für das Triplet offenbar:

$$|\sin 2\beta| = |\cos 2\alpha|$$

$$2\frac{\mu}{\nu'} = \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta.$$

Wie man sieht, ist $\operatorname{tg}\alpha$ und β ganz unabhängig vom Felde; es hängt nur ab von dem Abstand der in Frage stehenden Frequenz von ν_0 gemessen in dem halben Halbwertsintervall $\frac{\nu'}{2}$.

Beim Quadruplet liegen die Verhältnisse nicht so einfach.

Wir wenden uns jetzt zu dem Verhalten der Doppelbrechung. Hier interessieren uns besonders die Stellen, wo die reellen Teile von $\overline{\eta}$ und $\overline{\vartheta}$ verschwinden. Die Kurven für diese Größen finden sich in der Magnetooptik von Voigt auf Seite (133), (180) und (206). Nach diesen Figuren kommen in Uebereinstimmung mit den Formeln 8—10 in Frage die Stellen $\mu = 0$, $\mu = \pm \mu_0'$, $\mu = \pm \mu_0$.

1) Bei $\mu = \pm \mu_0$ verschwindet sowohl der reelle Teil von $\overline{\eta}$ wie der von $\overline{\vartheta}$. Beide Größen wechseln ihr Vorzeichen, es behält daher jede Welle ihren Rotationssinn bei, wie dies durch Betrachtung des durchsichtigen Gebietes zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens nach der Formel (2) folgt. Die beiden reellen Normalflächen treten also durcheinander hindurch. Hierbei existieren aber stets zwei gesonderte Wellen, da $\Delta'' \neq 0$.

2) $\mu = 0$ im Triplet und $\mu = \pm \mu_0'$ im Quadruplet. Hier bleibt der reelle Teil von $\overline{\vartheta}$ von Null verschieden (der imaginäre ist Null), aber der reelle Teil von $\overline{\eta}$ ändert sein Vorzeichen, während der imaginäre nicht Null wird. Wir fragen, wann ist $\Delta' = 0$. Die Bedingung hierfür ist, daß $\overline{\eta}^2 s^4 + \overline{\vartheta}^2 c^2 < 0$; denn an den in Rede stehenden Stellen ist dieser Ausdruck reell. Da $\Delta = \vartheta \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\vartheta^2}}$ und η rein imaginär, ϑ reell, so ist Δ rein imaginär, wenn $\left|\frac{\vartheta}{\eta}\right| < 1$ ist. Als Bedingung für $\Delta' = 0$ findet man also die oben abgeleiteten Gleichungen (13):

$$2\frac{\nu'}{\mu_0} \leqq \frac{s^2}{c} \quad \text{resp.} \quad \left|4\frac{\nu' \mu_0}{\mu_0^2 - \mu_0'^2}\right| \leqq \frac{s^2}{c}.$$

Da $\frac{2\nu'}{\mu_0}$ od $4\left|\frac{\nu' \mu_0}{\mu_0^2 - \mu_0'^2}\right| \leqq \frac{s^2}{c}$ $\Delta'' = 0$ bedeutet, so ist für $\zeta < \zeta_0$

die Absorption, für $\zeta > \zeta_0$ die Geschwindigkeit der beiden Wellen die gleiche. In $\zeta = \zeta_0$ sind diese beiden Bedingungen zugleich erfüllt; in ihm ist also $\Delta' = \Delta'' = 0$ und $\operatorname{tg} \alpha = 0$, wie für das Triplet schon H. A. Lorentz zeigte. Die reellen Normalenflächen zwischen $\zeta = 0$ und $\zeta = \zeta_0$ bleiben also für alle Farben vollkommen getrennt und ihr Rotationssinn erhalten. Zwischen $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = 90^0$ treten die Normalenflächen durcheinander hindurch, wobei indessen die Absorption verschieden bleibt, und zugleich kehrt sich der Rotationssinn einer jeden um. Da zu beiden Seiten des betrachteten Absorptionsstreifens sich die Normalenflächen nicht schneiden und jede einzelne für alle ζ den gleichen Rotationssinn trägt, so ist in $\zeta = \zeta_0$ bei $\mu = 0$ resp. $\mu = \pm \mu_0'$ die Verbindung der vier Flächenstücke zu vertauschen. Die Figur 2 stellt das Schema dieses Ueberganges dar.

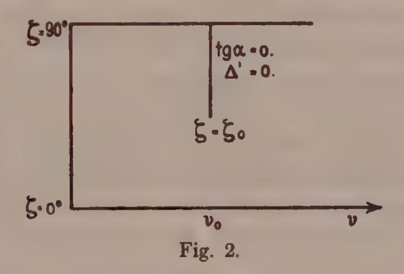


Fig. 2.

3) $\mu = 0$ beim Quadruplet. Hier sind alle Parameter reell, es verschwindet $\overline{\eta}$. Hier ist das Licht für alle ζ zirkular polarisiert. Die Normalenflächen der Wellen (1) und (2), die durch die Gleichung (2) unterschieden sind, bei Kristallen könnte man sagen ordentlicher und außerordentlicher Strahl, nähern sich bis zu einem gewissen Abstand bei $\mu = 0$, der durch $\Delta' = \overline{\vartheta}$ gegeben ist. Hier ist die Festsetzung ordentlicher und außerordentlicher Strahl willkürlich; man hat beim Passieren dieses Punktes die Benennung

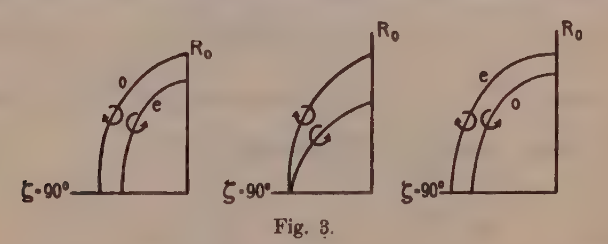


Fig. 3.

umzuändern, wie sich daraus ergibt, daß in der unmittelbaren Umgebung von $\mu = 0$ nach (2) und (10) unter demselben Strahl

derjenige verstanden werden soll, der in $\mu = 0$ seinen Umlaufssinn ändert. Daraus folgt, daß der Strahl, welcher einen bestimmten Umlaufssinn besitzt, auf der einen Seite von $\mu = 0$ in die p-Welle, auf der anderen in die s-Welle übergeht.

Die Figur 3 stellt die Normalenflächen bei drei verschiedenen Frequenzen dar.

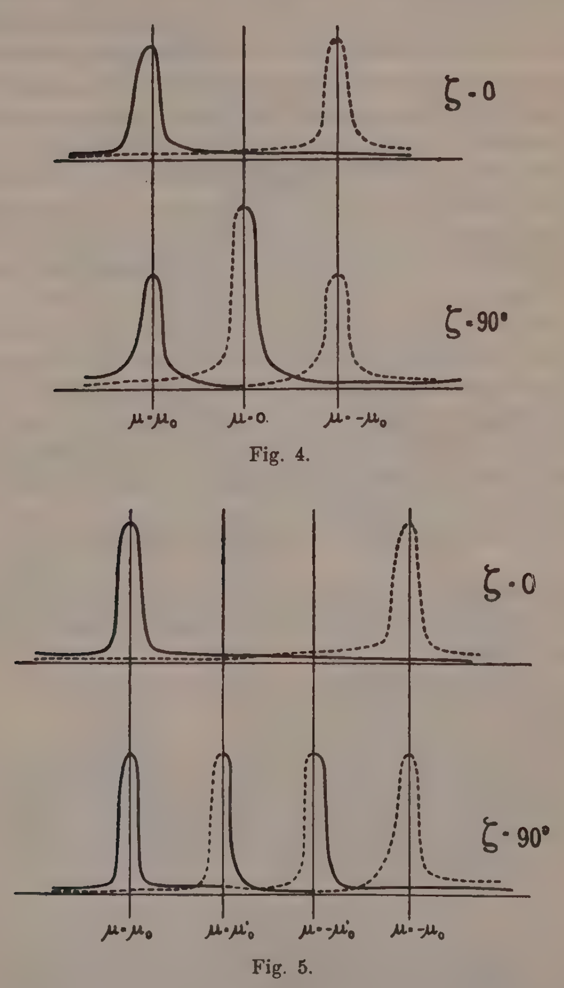


Fig. 4.

Fig. 5.

Nunmehr können wir bei einem vollständig getrennten Triplet und Quadruplet sagen, welche Welle $\perp R_0$ zu einer Welle, z. B. der linksrotierenden, gehört. Die Figuren (4) (5) zeigen die Ab-

sorptionsstreifen der verschiedenen Wellen. Man erkennt leicht die bekannten Schemata. Doch gehört keineswegs die p-Welle zu einer bestimmt rotierenden Welle $\parallel R_0$. Vielmehr gehören die ausgezogenen Kurven $\parallel R_0$ zu den ausgezogenen $\perp R_0$, d. h. gehören derselben stetigen Normalenfläche von $\zeta = 0$ bis $\zeta = 90$ an.

Es sei noch auf eine weitere Analogie aus der Kristalloptik aufmerksam gemacht. Bei zweiaxigen absorbierenden, nicht drehenden Kristallen fallen bekanntlich die optischen Axen und die Absorptionsaxen im allgemeinen nicht zusammen. Wie nun W. Voigt[1]) gezeigt hatte, gibt es in der Umgebung der optischen Axen ein „fächerförmiges Gebiet", wo die Geschwindigkeiten, in der Umgebung der Absorptionsaxen ein ebensolches, wo die Absorptionen gleich sind. Beide Gebiete stoßen in den „Windungsaxen" zusammen, wo also sowohl die Absorptionen wie die Geschwindigkeiten beider Wellen dieselben sind. Man erkennt die Aehnlichkeit dieser Windungsaxen mit unserem singulären Punkte ζ_0; während indes in unserem Falle die Polarisationen der beiden Wellen linear in derselben Richtung schwingen, erhält man bei den pleochroitischen Kristallen zwei zirkulare, gleichsinnig rotierende Wellen.

Wir wollen nun noch einige Bemerkungen für den Fall, daß die Streifen des Triplets und Quadruplets nahe aneinander liegen, anknüpfen. Für die Polarisationszustände gilt dann beim Triplet

$$(15) \qquad 2\,\frac{2\mu - i\nu'}{\mu_0}\,\frac{c}{s^2} = i\,\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha} \mp \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta.$$

Nach dieser Formel gilt die Kurve (1) auch für beliebig schwache Zerlegung für jedes μ, also auch in den Außenkomponenten des Triplets.

Beim Quadruplet gilt:

$$(16) \quad \frac{2\mu_0[2(\mu - \mu_0') - i\nu'][2(\mu + \mu_0') - i\nu']}{(\mu_0^2 - \mu_0'^2)(2\mu - i\nu')}\,\frac{c}{s^2} = i\,\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha} \mp \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta.$$

Der reelle Teil der linken Seite verschwindet im Triplet nur bei $\mu = 0$, und die Bedingung dafür, daß $\operatorname{tg}\alpha = 0$ an dieser Stelle gilt, ist wiederum gegeben durch

$$2\,\frac{\nu'}{\mu_0}\,\frac{c}{s^2} \leqq 1.$$

Anders beim Quadruplet. Hier verschwindet der reelle Teil der linken Seite, außer bei $\mu = 0$, bei

$$(\mu^2 - \mu_0'^2) = -\frac{\nu'^2}{4}$$

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 9 S. 367, 1902.

und damit lineare Polarisation auftritt, muß noch sein

$$\left|\frac{4\nu'\mu_0}{\mu_0^2-\mu_0'^2}\right|\frac{c}{s^2}\leqq 1.$$

Das Gleichheitszeichen definiert den Grenzwinkel ζ_0.

Lineare Polarisation findet also beim Triplet und Quadruplet nur für eine Farbe statt und zwar beim Triplet wieder bei $\mu = 0$, beim Quadruplet dagegen jetzt bei $\mu^2 - \mu_0'^2 = -\frac{\nu'^2}{4}$.

Uns interessiert zunächst die Frage, ob $\operatorname{tg}\alpha = 0$ und $\Delta' = 0$ bei ein und derselben Frequenz möglich ist. Nun ist wieder $\Delta = \vartheta\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\vartheta^2}}$. Hierin ist für die Farbe, in der $\operatorname{tg}\alpha = 0$, die Wurzel entweder rein reell oder rein imaginär. Es ist also hier $\Delta' = 0$, wenn $\bar\vartheta$ rein imaginär oder rein reell ist. Nun gilt für das Triplet bei $\mu = 0$

$$\bar\vartheta_{\mu=0} = \frac{2\varrho}{\nu_0}\,\frac{\mu_0}{\mu_0^2+\nu'^2}.$$

$\bar\vartheta$ ist also rein reell. Die Wurzel aber ist imaginär für $\frac{s^2}{c}\left|\frac{\bar\eta}{\bar\vartheta}\right| > 1$, also für $\zeta > \zeta_0$. Die Verhältnisse beim Triplet sind also in dieser Hinsicht nicht von der Stärke der Zerlegung abhängig. Das Verhalten der Normalenfläche und Polarisationszustände beim Passieren von $\mu = 0$ bleibt durch das Schema Fig. 2 dargestellt.

Im Quadruplet dagegen wird $\operatorname{tg}\alpha = 0$ bei $4\mu^2 = 4\mu_0'^2 - \nu'^2$. Hier aber ist

$$\bar\vartheta_{\mu=\pm\mu_0'} = \frac{\varrho}{2\nu_0}\,\frac{\mu_0}{\mu_0'^2-\mu_0^2-\frac{\nu'^2}{2}-i\mu\nu'}.$$

$\bar\vartheta$ bleibt also komplex. Beim Quadruplet fallen also die Kurven $\operatorname{tg}\alpha = 0$ und $\Delta' = 0$ nicht in dieselbe Farbe. Nur für den Verzweigungspunkt ζ_0 verschwindet die Wurzel $\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\vartheta^2}}$. Hier ist also zugleich $\operatorname{tg}\alpha = 0$ und $\Delta' = 0$.

Der Ausdruck für die Kurve $\Delta' = 0$ in der $\nu\zeta$-Ebene ist recht kompliziert, wir wollen nicht näher darauf eingehen. Der Uebergang beim Passieren der betrachteten Stelle spielt sich also so ab: Zunächst beim Durchlaufen der Frequenzskala werde die Stelle $\mu^2 = \mu_0'^2 - \frac{\nu'^2}{4}$ erreicht. Dann ist für $\zeta > \zeta_0$ das Licht linear polarisiert. Der Rotationssinn kehrt sich um. Gleichzeitig lösen

die Stücke der Normalenfläche, für die $\zeta > \zeta_0$, in $\zeta = \zeta_0$ ihre Verbindung mit den Stücken $\zeta < \zeta_0$, die ihnen bisher zugehörten und verbinden sich mit den anderen. Schreitet man in derselben Richtung in ν weiter, so werden sich die reellen Flächen der Wellennormale durchschneiden bei einem $\zeta > \zeta_0$. Dieses ζ wächst beim Fortschreiten in ν, bis $\zeta = 90^0$ erreicht ist. Von da ab verlaufen zunächst die Normalenflächen getrennt. Die Figur (6) veranschaulicht diesen Uebergang.

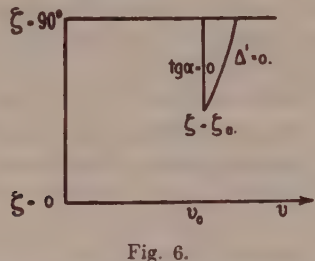


Fig. 6.

Diese speziellen Ueberlegungen sind im Einklang mit den auf S. 16 der früheren Arbeit entwickelten allgemeinen Betrachtungen, nach denen die Kurven $\operatorname{tg} \alpha = 0$ und $\varDelta' = 0$ nur dann vollkommen zusammenfallen können, wenn der imaginäre Teil von $\bar{\vartheta}$ für die betreffende Farbe verschwindet.

Ein Versuch, die Aussagen der Theorie betreffend die Polarisationszustände in der Mitte der Streifen des Quadruplets zu prüfen ist von Zeemann gemacht.

Unsere Kurve (1) zeigt, daß in der Mitte der Mittelkomponenten die Polarisationszustände des Lichtes sich ungemein rasch mit der Frequenz ändern. Es dürfte daher schwierig sein, den Lorentzschen Grenzwinkel ζ_0 experimentell sicher zu bestimmen.

Das für die Beobachtung wichtigste Resultat der Theorie scheinen mir die Formeln (15) und (16) zu sein. Nach Figur 1, welche gemäß S. 621 die Polarisationszustände in der ganzen Umgebung des Triplets darstellt, ändern sich die Polarisationszustände in den Außenkomponenten des Triplets bei hinreichend großer Zerlegung nur wenig mit μ, während β und α noch gut meßbar sind. Auf diese Weise ist es vielleicht möglich, die Dämpfung ν' zu bestimmen. Von Bedeutung scheint zu sein, daß dies auch für solche Emissionslinien geschehen kann, deren Umkehrung bisher noch nicht gelungen ist, auf die aber nach dem Kirchhoffschen Satz unsere Resultate direkt übertragbar sind.

Ueber Erdbebenwellen.

VI. Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen, und einige Beobachtungen an den Vorläufern.

Von

Ludwig Geiger und **Beno Gutenberg.**

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 18. Februar 1912.

Mit 13 Figuren im Text.

§ 1. Einleitung.

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung der Arbeiten über Erdbebenwellen von Wiechert, Zoeppritz, Geiger und Gutenberg[1]), die ebenfalls in diesen Nachrichten erschienen sind, und die weiterhin als „Erdbebenwellen I, II, III, IV, V" zitiert werden sollen.

Inhalt von I: Theorie der Ausbreitung der Erdbebenwellen.
„ „ II: Empirisch gewonnene Laufzeitfunktionen der 1. und 2. Vorläufer bis zu 13000 km Herddistanz, und Sinus des Einfallswinkels i als Funktion der Herddistanz.
„ „ III: Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern.

---

1) E. Wiechert und K. Zoeppritz, Ueber Erdbebenwellen I und II, Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 1907.

K. Zoeppritz und L. Geiger, Ueber Erdbebenwellen III, ebenda 1909.

E. Wiechert, Ueber Erdbebenwellen IV, ebenda (im Druck).

K. Zoeppritz, L. Geiger und B. Gutenberg, Ueber Erdbebenwellen V, ebenda 1912.

Inhalt von IV: Herglotzsche Methode zur Strahlenberechnung. Referenzfunktion.

„ „ V: Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus der Intensität longitudinaler Erdbebenwellen. Erdbebentypen.

Dieser vorliegende VI. Teil bildet die direkte Fortsetzung von Teil V und setzt dessen Kenntnis unbedingt voraus. In ihm werden Beobachtungen über die Intensitätsverhältnisse verschiedener transversaler und longitudinaler Erdbebenwellen mitgeteilt. Dazu wurden die Perioden dieser Wellen und der Schwingungswinkel der Transversalwellen (cf. § 2) untersucht. Es wird gezeigt, daß man für die longitudinalen und transversalen Wellen je eine Sinusfunktion annehmen kann, die sich sowohl mit den beobachteten Intensitätsverhältnissen als auch mit den von Wiechert-Zoeppritz beobachteten Laufzeiten verträgt. Die Berechnung der Wege der 2. Vorläufer bestätigt die von uns aus Longitudinalwellen früher gefundenen drei Unstetigkeitsflächen im Erdinnern. Schließlich werden neue Laufzeitfunktionen für die direkten und die wichtigsten reflektierten Vorläufer aufgestellt.

§ 2. Symbole.

Symbole, die sich auf Longitudinalwellen beziehen, werden durch lateinische, solche, die sich auf Transversalwellen beziehen, durch deutsche Buchstaben bezeichnet, und zwar setzen wir

Energie = E resp. $\mathfrak{E}$,
Amplitude = A resp. $\mathfrak{A}$,
Geschwindigkeit = V resp. $\mathfrak{B}$.

Strahlebene = Ebene durch Herd, Erdmittelpunkt, Station.

Schwingungswinkel β = Winkel zwischen Strahlebene und Schwingungsebene einer Transversalwelle.

Winkel zwischen Strahl und der Normalen = i resp. $\mathfrak{i}$.

Bodenverrückungen = u, v, w resp. $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, wobei

$u, \mathfrak{u}$ = horizontale Komponente in der } Strahlebene
$v, \mathfrak{v}$ = „ „ quer zur } Strahlebene
$w, \mathfrak{w}$ = vertikale „ ist.

Vorläufer: Longitudinalwellen werden mit P, Transversalwellen mit S bezeichnet. Bei reflektierten Wellen werden diese Symbole in der zeitlichen Reihenfolge der einzelnen Bögen gesetzt, z. B. heißt PPP die zweimal reflektierte Longitudinalwelle, SPS eine zweimal reflektierte Welle, die zuerst transversal, dann longitudinal und zuletzt wieder transversal schwingt. Solche Wellen

mit wechselndem Charakter heißen Wechselwellen. Symbole, die sich auf solche Vorläufer beziehen, erhalten nötigenfalls als unteren Index das Symbol dieser Welle: z. B. i_{PS}.

Reflexion: Bei einer Reflexion erhalten die Symbole den unteren Index i, r, f, je nachdem die einfallende (incidens), reflektierte (reflecta) oder die gebrochene (fracta) Welle gemeint ist. Symbole, die sich auf die n-te Reflexion an der Grenzfläche beziehen, erhalten den oberen eingeklammerten Index (n), z. B. $(\mathfrak{E}_r)^{(2)}_{SPS}$ bedeutet die transversal reflektierte Energie einer Wechselwelle SPS bei der 2. Reflexion.

Die weiteren in der vorliegenden Arbeit benutzten Symbole haben keine allgemeine Bedeutung; sie werden deshalb erst in den betreffenden Paragraphen definiert.

§ 3. Theoretisches.

(Von B. Gutenberg.)

Allgemeine Behandlung der Zoeppritzschen Methode. In § 3 der „Erdbebenwellen V" wurden die theoretischen Grundlagen der Zoeppritzschen Methode bei Verwendung von Longitudinalwellen gegeben. Die dort erhaltenen Gleichungen müssen nun so erweitert werden, daß sie auch für Transversal- und Wechselwellen brauchbar sind.

Bei Anwendung der Zoeppritzschen Methode macht man folgende drei Annahmen:

1) Am Herde breiten sich die Wellen kugelförmig aus. Auf jeder Kugel ist die Energiedichte konstant.

2) Die Reflexionen an der Erdoberfläche finden so statt, als ob die Wellen auf eine Ebene gegen den leeren Raum träfen.

3) Alle Wellen erleiden gleich starke Absorption.

Wie in „Erdbebenwellen V" so wird auch jetzt die Bedingung, daß sich die Wellen am Herde kugelförmig ausbreiten, durch die Zonenbetrachtung (Erdbebenwellen V, § 3) eingeführt. Wir wollen „Abgangswinkel" die Winkel nennen, die die abgehenden Wellen im Herde mit dem Lote bilden; sie sind gleich dem Einfallswinkel i. Die Abgangswinkel derjenigen Randstrahlen, die zwei Zonen der Elementarkugel mit gleicher Oberfläche ausschneiden, finden wir analog wie früher (Erdbebenwellen V, Figur 2) nach der Gleichung

$$(1) \qquad \cos\alpha_{I-} - \cos\alpha_I = \cos\alpha_I - \cos\alpha_{I+} = \cos\alpha_{II-} - \cos\alpha_{II} = \cos\alpha_{II} - \cos\alpha_{II+} = \frac{1}{2N}.$$

Hierbei sind α_{I-} und α_{I+} bezw. α_{II-} und α_{II+} die Abgangswinkel der Strahlen, die auf den Rand der Zonen I und II treffen. Die

Strahlen mit den Abgangswinkeln α_{I} und α_{II} schneiden auf der Erdoberfläche je einen Kreis aus, der die durch α_{-} und α_{+} gebildeten Zonen in 2 flächengleiche Teile zerlegt. Die Energiedichte $\varkappa^2$ auf diesen Kreisen wird umgekehrt proportional gesetzt den zugehörigen Zonenflächen, die durch α_{-} und α_{+} gegeben sind. Für $2N$ in Gleichung (1) muß ein konstanter Wert gewählt werden.

Die Oberfläche einer durch α_{-} und α_{+} gebildeten Elementarzone sei z, die Energiedichte auf ihr sei $\varkappa^2$. Es sei $\varkappa = k$ für longitudinale, $\varkappa = \mathfrak{k}$ für transversale Wellen. Die gesamte durch z strömende Energie ist dann $\varkappa^2 z$. Diese Energie trifft auf die Erdoberfläche auf, die Randstrahlen schneiden hierbei eine Zone $Z^{(1)}$ auf der Erde aus. Die Energiedichte auf $Z^{(1)}$ ist dann

$$(2) \qquad E_i^{(1)} = \frac{\varkappa^2 . z}{Z^{(1)}},$$

wobei $\varkappa = k$ oder $\mathfrak{k}$ zu setzen ist, je nachdem die vom Herde ausgehende Welle longitudinal oder transversal war. In $Z^{(1)}$ wird die einfallende Energie reflektiert, sie kann sich dabei auf 2 Wellen, eine von gleicher und eine von der andern Schwingungsart verteilen. Das Auftreten von gebrochenen Wellen ist nach der 2. Zoeppritzschen Annahme ausgeschlossen. Die Energiedichte der abgehenden Welle, die wir betrachten wollen, sei $E_r^{(1)}$, dann ist

$$(3) \qquad E_r^{(1)} = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(1)} \cdot \frac{\varkappa^2 z}{Z^{(1)}}.$$

Der Faktor $\frac{E_r}{E_i}$ hängt ab 1) vom Verhältnis der Geschwindigkeiten longitudinaler und transversaler Wellen an der Reflexionsstelle, also vom Material, 2) von der Schwingungsart und 3) vom Einfallswinkel der auftreffenden Welle. Die in $Z^{(1)}$ reflektierte Energie möge auf eine Zone $Z^{(2)}$ treffen. Dann ist

$$(4) \qquad E_i^{(2)} = \frac{E_r^{(1)} . Z^{(1)}}{Z^{(2)}} = \varkappa^2 \cdot \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(1)} \cdot \frac{z}{Z^{(2)}}.$$

Die in $Z^{(2)}$ reflektierte Energie wird gegeben durch

$$(5) \qquad E_r^{(2)} = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(2)} \cdot E_i^{(2)} = \varkappa^2 \cdot \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(1)} \cdot \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(2)} \cdot \frac{z}{Z^{(2)}}.$$

Man sieht, daß nach n-maliger Reflexion, also beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Auftreffen, die Energiedichte $E_i^{(n+1)}$ auf $Z^{(n+1)}$ gegeben wird durch

$$E_i^{(n+1)} = \varkappa^2 \cdot \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(1)} \cdot \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(2)} \cdots \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(n)} \cdot \frac{z}{Z^{(n+1)}},$$

$$(6) \qquad E_i^{(n+1)} = \varkappa^2 \cdot \frac{z}{Z^{(n+1)}} \cdot \prod_n \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(n)}.$$

Hierbei ist $\prod\limits_n$ zu lesen „Produkt über alle Werte des dahinter stehenden Ausdrucks, wenn man für n die ganzen Zahlen von 1 bis n der Reihe nach einsetzt“. Ein oberer Index (n) bedeutet, daß der Wert der betr. Größe beim n^{ten} Auftreffen auf die Erdoberfläche zu bilden ist.

Um die Amplitude einer Welle zu finden, deren Energie bekannt ist, müssen wir zur Schwingungsgleichung gehen:

(7) $$a = A . \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t.$$

Hierbei ist a die momentane, A die maximale Amplitude, T die Periode der Schwingung, t die Zeit seit ihrem Beginn. Durch Differenzieren von (7) erhält man die momentane Geschwindigkeit V, gemessen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Es ist:

(8) $$V = \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{2\pi A}{T} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Die Energie E ist proportional V^2; es ist demnach

(9) $$A = \gamma T \sqrt{E}.$$

Der Proportionalitätsfaktor γ sei $= c$ für longitudinale, $= \mathfrak{c}$ für transversale Wellen. Berücksichtigt man, daß E zur Bestimmung der Amplitude senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle gemessen sein muß, daß also die Zone, auf der die auftreffende Energie nach (6) bestimmt werden muß, nicht $Z^{(n+1)}$, sondern $Z^{(n+1)} \cos \alpha^{(n+1)}$ ist, wo $\alpha =$ Einfallswinkel, so ergibt sich

(10) $$A_i^{(n+1)} = \gamma \varkappa T . \sqrt{z} \sqrt{\frac{1}{(Z . \cos \alpha)^{(n+1)}} \cdot \prod_n \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(n)}}$$

$u^{(n+1)}$, die horizontale Bodenverrückung, die durch $A_i^{(n+1)}$ hervorgerufen wird, ist gegeben durch

(11) $$u^{(n+1)} = \left(\frac{u}{A_i}\right)^{(n+1)} A_i^{(n+1)}$$
$$= \gamma \varkappa T . \sqrt{z} \cdot \left(\frac{u}{A_i}\right)^{(n+1)} \sqrt{\frac{1}{(Z . \cos \alpha)^{(n+1)}} \cdot \prod_n \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^{(n)}}$$

Analoges gilt für die vertikale Bewegung; bei ihr ist nur u durch w zu ersetzen. $\left(\frac{u}{A_i}\right)$ hängt genau wie $\left(\frac{E_r}{E_i}\right)$ vom Material an der Stelle, an der die Welle auftrifft, von der Schwingungsart und dem Einfallswinkel der Welle ab.

Will man die Bodenverrückungen vergleichen, die zwei Wellen I und II des gleichen Bebens am gleichen Orte hervorrufen, so wählt man unter Benutzung der Gleichung (1) gleiche Elementarzonen; es fällt dann z bei der Division der Bodenverrückungen aus der Rechnung heraus. $\varkappa$ und γ sind zwei Konstanten (vgl. folgende Seite). T ist die Periode der zu untersuchenden Welle. Die Verhältnisse $\left(\frac{E_r}{E_i}\right)$ und $\left(\frac{u}{A_i}\right)$ werden unten behandelt werden, soweit dies nicht schon in „Erdbebenwellen V“ geschehen ist. Es bleibt also nur noch die Berechnung der Zone $Z^{(n+1)}$. Diese tritt jedoch bei der Ausführung der Zoeppritzschen Methode nicht selbst auf, sondern es kommt beim Vergleichen zweier Bodenverrückungen u_{I} und u_{II}, die durch zwei Wellen I bezw. II aus der Herddistanz $\varDelta$ hervorgerufen werden, das Zonenverhältnis $Z_{\text{II}} : Z_{\text{I}}$ in Rechnung. Die Fläche einer Zone auf einer Kugel mit dem Radius R ist gegeben durch:

$$Z = 2\pi R^2 (\cos \varDelta_- - \cos \varDelta_+),$$

also ist

$$\frac{Z_{\text{II}}}{Z_{\text{I}}} = \frac{\cos \varDelta_{\text{II}-} - \cos \varDelta_{\text{II}+}}{\cos \varDelta_{\text{I}-} - \cos \varDelta_{\text{I}+}},$$

wobei $\varDelta_{\text{I}-}, \varDelta_{\text{I}+}, \varDelta_{\text{II}-}, \varDelta_{\text{II}+}$ die Zentriwinkel zwischen dem Radius nach dem Herde und den Strahlen sind, welche die Zonen Z_{I} bezw. Z_{II} bilden.

$$\frac{Z_{\text{II}}}{Z_{\text{I}}} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varDelta_{\text{II}-} + \varDelta_{\text{II}+}) \sin \frac{1}{2} (\varDelta_{\text{II}-} - \varDelta_{\text{II}+})}{\sin \frac{1}{2} (\varDelta_{\text{I}-} + \varDelta_{\text{I}+}) \sin \frac{1}{2} (\varDelta_{\text{I}-} - \varDelta_{\text{I}+})}.$$

Es ist mit großer Annäherung

$$\varDelta_{\text{II}-} + \varDelta_{\text{II}+} = \varDelta_{\text{I}-} + \varDelta_{\text{I}+} = 2\varDelta,$$

daher auch, falls $\varDelta$ nicht nahe an 0° oder 180° liegt,

$$\sin \tfrac{1}{2} (\varDelta_{\text{II}-} + \varDelta_{\text{II}+}) = \sin \tfrac{1}{2} (\varDelta_{\text{I}-} + \varDelta_{\text{I}+}).$$

Da die Zonenbreiten

$$\delta_{\text{I}} = \varDelta_{\text{I}-} - \varDelta_{\text{I}+} \quad \text{und} \quad \delta_{\text{II}} = \varDelta_{\text{II}-} - \varDelta_{\text{II}+}$$

bei großem N in (1) sehr klein werden, so kann das Sinusverhältnis durch das Verhältnis der Winkel ersetzt werden, und es ist

(12) $$\frac{Z_{\text{II}}}{Z_{\text{I}}} = \frac{\delta_{\text{II}}}{\delta_{\text{I}}}.$$

Sei $u_{\text{I}}^{(n+1)}$ die Bodenverrückung einer n-mal, $u_{\text{II}}^{(m+1)}$ die einer m-mal reflektierten Welle, so ergibt sich aus (11) und (12):

$$(13)\quad \frac{u_{\mathrm{I}}^{(n+1)}}{u_{\mathrm{II}}^{(m+1)}} = \frac{\gamma_{\mathrm{I}}}{\gamma_{\mathrm{II}}}\cdot\frac{\varkappa_{\mathrm{I}}}{\varkappa_{\mathrm{II}}}\cdot\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}}\cdot\frac{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\mathrm{I}}^{(n+1)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{\mathrm{II}}^{(m+1)}}\cdot\sqrt{\frac{\prod\limits_{n}\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\mathrm{I}}^{(n)}}{\prod\limits_{m}\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\mathrm{II}}^{(m)}}\cdot\frac{\cos\alpha_{\mathrm{II}}^{(m+1)}}{\cos\alpha_{\mathrm{I}}^{(n+1)}}\cdot\frac{\delta_{\mathrm{II}}^{(m+1)}}{\delta_{\mathrm{I}}^{(n+1)}}}.$$

In (13) ist $\frac{\varkappa_{\mathrm{I}}}{\varkappa_{\mathrm{II}}} = 1$, wenn die beiden verglichenen Wellen bei ihrem Fortgange vom Herd gleichartig schwingen. Im andern Fall wollen wir annehmen, daß $k:\mathfrak{k}$ bezw. $\mathfrak{k}:k$, also auch das Verhältnis der am Herde longitudinal und transversal ausgehenden Energie, für alle Beben dasselbe ist und werden die Zulässigkeit dieser Annahme in § 9 diskutieren. Es ist $\gamma_{\mathrm{I}}:\gamma_{\mathrm{II}} = 1$, wenn beide Wellen mit der gleichen Schwingungsart am Beobachtungsorte ankommen, sonst ist es von 1 verschieden, aber konstant.

Die Verwendung der Gleichung (13) möge an drei Beispielen gezeigt werden. Zunächst: Welchen Wert hat $\frac{u_{PP}}{u_P}$? $\frac{\gamma_{\mathrm{I}}}{\gamma_{\mathrm{II}}}$ und $\frac{\varkappa_{\mathrm{I}}}{\varkappa_{\mathrm{II}}}$ sind 1, ferner zeigt die Beobachtung: $T_P = T_{PP}$. PP ist einmal, P überhaupt nicht reflektiert. Es ist daher, falls jetzt i = Einfallswinkel:

$$(14)\quad \frac{u_{PP}}{u_P} = \frac{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{PP}^{(2)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{P}^{(1)}}\cdot\sqrt{\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{PP}^{(1)}\cdot\frac{\cos i_P}{\cos i_{PP}}\cdot\frac{\delta_P^{(1)}}{\delta_{PP}^{(2)}}}.$$

Es ist dies genau die Gleichung (8a) in „Erdbebenwellen V“, nur in etwas anderer Bezeichnung. Analog (14) ergibt sich die Gleichung für $\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{\mathfrak{u}_S}$. Für die vorliegende Arbeit werden die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}}$ und $\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}$ gebraucht. Sieht man $\frac{T_{SPS}}{T_{PP}}$ und $\frac{T_S}{T_P}$ je als konstant an, was im folgenden begründet wird, und faßt man alle Konstanten zusammen, so ergibt sich nach (13):

$$(15)\quad \frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}} = c_1\cdot\frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)_{SPS}^{(3)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{PP}^{(2)}}\cdot\sqrt{\frac{\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)_{SPS}^{(1)}\cdot\left(\frac{\mathfrak{E}_r}{E_i}\right)_{SPS}^{(2)}}{\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{PP}^{(1)}}\cdot\frac{\cos i_{PP}^{(2)}}{\cos i_{SPS}^{(3)}}\cdot\frac{\delta_{PP}^{(2)}}{\delta_{SPS}^{(3)}}},$$

wobei

$$c_1 = \frac{\mathfrak{c}}{c}\cdot\frac{\mathfrak{k}}{k}\cdot\frac{T_{SPS}}{T_{PP}};$$

$$(16)\quad \frac{\mathfrak{u}_S}{u_P} = c_2\cdot\frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}}\right)_{S}^{(1)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_{P}^{(1)}}\cdot\sqrt{\frac{\cos i_P^{(1)}}{\cos i_S^{(1)}}\cdot\frac{\delta_P^{(1)}}{\delta_S^{(2)}}},$$

wobei

$$c_2 = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k} \cdot \frac{T_S}{T_P}.$$

Die bei dem Reflexionsvorgange auftretenden Größen ergeben sich aus „Erdbebenwellen I". Soweit nur Longitudinalwellen in Betracht kommen, sind sie in „Erdbebenwellen V" in § 3 berechnet. Für die bei Benutzung von Transversalwellen hinzukommenden sind unter der Voraussetzung, daß die Transversalwellen in der Strahlebene (= Ebene durch Herd, Erdmittelpunkt, Station) schwingen, zwei Fälle möglich:

$$\text{1) } \sin i_{\mathfrak{V}} \leqq \frac{\mathfrak{V}}{V},$$

wo $i_{\mathfrak{V}}$ der Einfallswinkel einer Transversalwelle ist.

Setzt man wie in „Erdbebenwellen V" $\frac{V}{\mathfrak{V}} = 1{,}789$, so ergibt sich

$$i_{\mathfrak{V}} \leqq 33^\circ\, 59',1.$$

Fällt eine Transversalwelle unter dem Winkel $i_{\mathfrak{V}}$ ein, so wird eine Transversalwelle unter dem gleichen Winkel, eine Longitudinalwelle unter dem Winkel i_V reflektiert. Nach Erdbebenwellen I, (132), ist

$$\text{(17)} \qquad \frac{\sin i_V}{\sin i_{\mathfrak{V}}} = \frac{V}{\mathfrak{V}},$$

wo V und $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeiten der beiden Wellen an der Reflexionsstelle sind. Die Gleichung (17) gilt auch, wenn eine longitudinale Welle unter i_V einfällt, und eine transversale unter $i_{\mathfrak{V}}$ reflektiert wird. Die ankommende und die beiden abgehenden Wellen bewirken, daß die Bodenverrückung weder den Einfallswinkel $i_{\mathfrak{V}}$ noch i_V zeigt, sondern der scheinbare Einfallswinkel $\bar{i}_{\mathfrak{V}}$ einer Transversalwelle wird gegeben nach I (142) durch

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{tg} \bar{i}_{\mathfrak{V}} = \frac{\operatorname{tg} i_{\mathfrak{V}}}{\operatorname{tg} i_V} \cdot \operatorname{tg} 2 i_{\mathfrak{V}}.$$

Für die weiteren Gleichungen empfiehlt es sich, eine Hilfsgröße einzuführen, und nach I (137) zu setzen:

$$\text{(19)} \qquad \mathfrak{m} = \frac{\operatorname{tg} i_V}{\operatorname{tg} i_{\mathfrak{V}}} \cdot \cot^2 2 i_{\mathfrak{V}} = \cot \bar{i}_{\mathfrak{V}} \cot 2 i_{\mathfrak{V}}.$$

Dann ist nach I (140), (138):

$$\text{(20)} \qquad \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i} = \frac{2\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}+1} \cdot \frac{\cos i_{\mathfrak{V}}}{\cos 2 i_{\mathfrak{V}}}$$

(21) $$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i} = \frac{1}{(\mathfrak{m}+1)\sin i_{\mathfrak{V}}}$$

nach I (136):

(22) $$\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i} = \frac{\mathfrak{m}-1}{\mathfrak{m}+1},$$

also

(23) $$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i} = \left(\frac{\mathfrak{m}-1}{\mathfrak{m}+1}\right)^2.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{E}_r + E_r = \mathfrak{E}_i,$$

also

(24) $$\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i} = 1 - \frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i} = 1 - \left(\frac{\mathfrak{m}-1}{\mathfrak{m}+1}\right)^2 = \frac{4\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}+1)^2}.$$

Fällt einmal longitudinal E_i unter dem Winkel i_V, dann transversal $\mathfrak{E}_i$ unter dem Winkel $i_{\mathfrak{V}}$ ein, so sieht man durch Vergleichen von I (122), (123) mit I (136), (137), daß die folgenden beiden Beziehungen bestehen, falls (17) erfüllt ist:

(25) $$\left(\frac{\mathfrak{E}_r}{E_i}\right)_{i_V} = \left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)_{i_{\mathfrak{V}}}$$

(26) $$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{i_V} = \left(\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i}\right)_{i_{\mathfrak{V}}}.$$

Die Gleichungen (25) und (26) bilden ein Analogon zum optischen Reziprozitätsgesetz. Aus ihnen folgt, daß in Gleichung (13) in den Produkten über $\left(\frac{E_r}{E_i}\right)$ die einzelnen Faktoren je nur höchstens zwei verschiedene Werte annehmen können, einen bei wechselnder, einen zweiten bei gleichartiger Schwingungsart vor und nach der Reflexion. Insbesondere folgt für die Gleichung (15):

$$\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS} \cdot \left(\frac{\mathfrak{E}_r}{E_i}\right)^{(2)}_{SPS} = \left(\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS}\right)^2,$$

sodaß sich (15) auch in folgender Form schreiben läßt:

(27) $$\frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}} = c_1 \cdot \frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(3)}_{SPS}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(3)}_{PP}} \cdot \frac{\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS}}{\left(\frac{A_r}{A_i}\right)^{(1)}_{PP}} \cdot \sqrt{\frac{\cos i^{(3)}_{PP}}{\cos i^{(3)}_{SPS}} \cdot \frac{\delta^{(3)}_{PP}}{\delta^{(3)}_{SPS}}}.$$

$$2)\ \sin i > \frac{\mathfrak{B}}{V}.$$

Es wird nur eine transversale Welle reflektiert. Nach I (160) beschreiben die Oberflächenteilchen Ellipsen, deren Achsen parallel und senkrecht zur Erdoberfläche stehen. Die Bodenverrückungen auszurechnen, hat wegen der Kompliziertheit der Bewegungen wenig Zweck. Theoretisch von Interesse ist der scheinbare Austrittswinkel $\bar{i}_{\mathfrak{B}}$. Nach I (163) ist

$$\operatorname{tg} \bar{i}_{\mathfrak{B}} = -\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\operatorname{tg} i_{\mathfrak{B}}}{\operatorname{tg} i_V} \operatorname{tg} 2 i_{\mathfrak{B}}. \tag{28}$$

Tabelle 1.

Berechnung von Werten $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}$, sowie von $\bar{i}_{\mathfrak{B}}$ bei gegebenem $i_{\mathfrak{B}}$ unter der Annahme $\frac{V}{\mathfrak{B}} = 1{,}789$ für $i_{\mathfrak{B}} \leqq 33^\circ\, 59',1$.

$i_{\mathfrak{B}}$	i_V	$\bar{i}_{\mathfrak{B}}$	$\mathfrak{m}$	$\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}$	$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}$	$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}$
0°	0° 0′	0° 0′ 0″	∞	1,00000	2,0000	0,00000
2 1/2	4 29	2 47 38	234,21	0,99150	1,9972	0,09747
5	8 58	5 34 8	58,034	0,96612	1,9888	0,19436
7 1/2	13 30	8 21 24	25,406	0,92426	1,9752	0,29013
10	18 6	11 6 35	13,991	0,86659	1,9562	0,38415
12 1/2	22 47	13 49 43	8,7120	0,79406	1,9326	0,47572
15	27 35	16 29 43	5,8491	0,70799	1,9050	0,56410
17 1/2	32 33	19 4 58	4,1282	0,61000	1,8745	0,64847
20	37 44	21 32 36	3,0187	0,50232	1,8429	0,72755
22	42 5	23 22 8	2,3965	0,41115	1,8189	0,78592
23 1/2	45 30	24 26 38	2,0358	0,34120	1,8035	0,82610
25	49 7	25 41 30	1,74417	0,27118	1,7923	0,86224
26 1/2	52 58	26 31 49	1,50937	0,20299	1,7890	0,89312
28	57 8	26 59 41	1,32410	0,13946	1,7992	0,91654
29	60 9	26 58 54	1,22735	0,10208	1,8190	0,92606
30	63 27	26 33 20	1,15517	0,072000	1,8568	0,92802
31	67 8	25 28 54	1,11568	0,054678	1,9256	0,91772
31 1/2	69 12	24 33 53	1,11475	0,054261	1,9800	0,90500
32	71 27	23 16 16	1,13408	0,062827	2,0561	0,88426
32 1/2	73 59	21 23 48	1,19005	0,08678	2,1689	0,85100
33° 0′	77 0	18 36 37	1,32215	0,13841	2,3427	0,78886
33 20	79 26	15 52 10	1,51737	0,20552	2,5428	0,72288
33 40	82 38	11 39 2	2,0254	0,33892	2,8917	0,59624
33 50	84 56	8 14 58	2,8335	0,47828	3,2314	0,46851
33 55	86 36	5 36 0	4,1552	0,61204	3,5453	0,34763
33 58	88 16	2 52 44	8,0610	0,77928	3,9279	0,19753
33 59,1	90 0	0 0 0	∞	1,00000	4,4212	0,00000

Tabelle 2.

Berechnung von $\bar{i}_{\mathfrak{V}}$ bei gegebenem $i_{\mathfrak{V}}$ unter der Annahme $\frac{V}{\mathfrak{V}} = 1{,}789$ für $i_{\mathfrak{V}} \geqq 33^{\circ}\,59',1$.

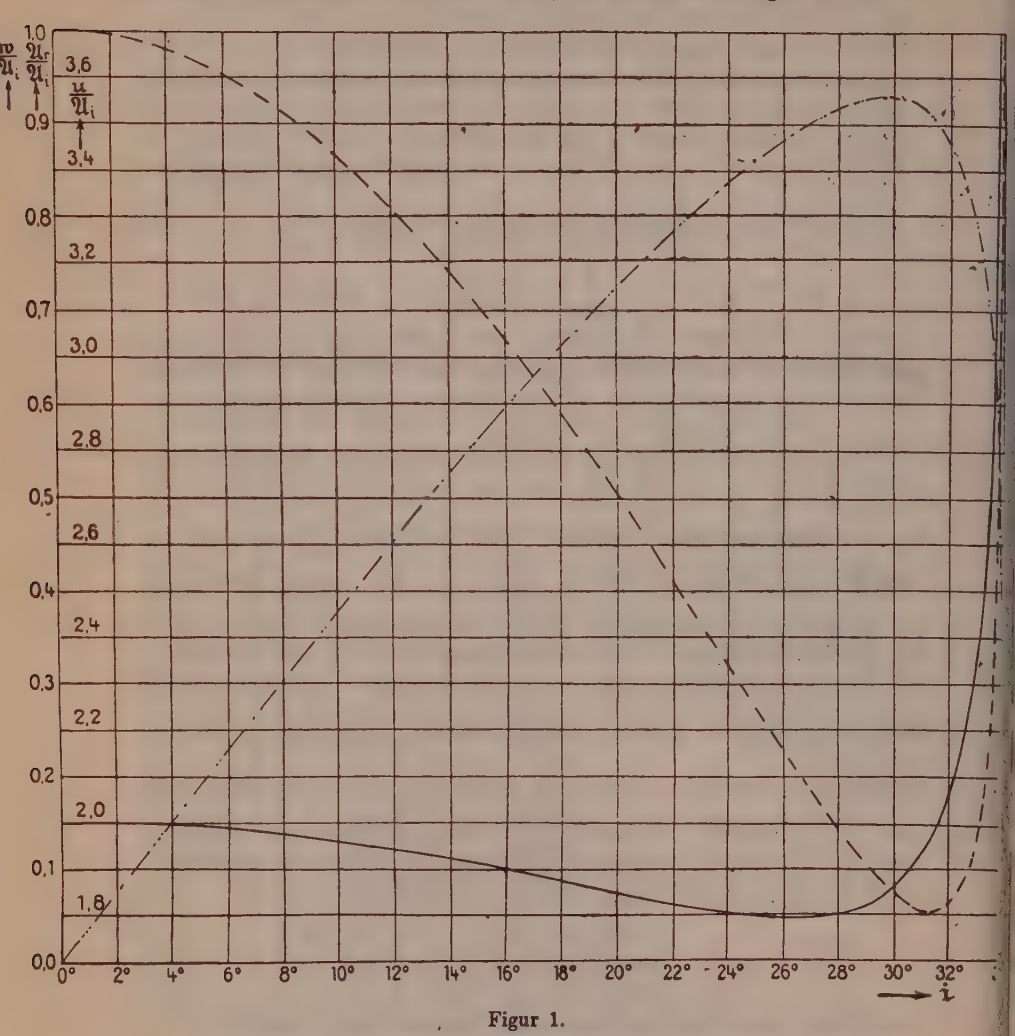
$i_{\mathfrak{V}}$	90°	80°	70°	60°	50°	45°
$\bar{i}_{\mathfrak{V}}$	58° 55′	59° 32′	61° 39′	66° 25′	77° 47′	± 90°
$i_{\mathfrak{V}}$	44°	43°	40°	37°	35°	33° 59′,1
$\bar{i}_{\mathfrak{V}}$	— 86° 31′	— 82° 33′	— 66° 56′	— 44° 14′	— 23° 19′	0°

Da die Werte von $\left(\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)$ oft gebraucht werden, wurden sie tabuliert (Tabelle 1). In dieser Tabelle findet man außerdem den Winkel $\bar{i}_{\mathfrak{V}}$ für wahre Einfallswinkel unter 34°, während Tabelle 2 die Werte $\bar{i}_{\mathfrak{V}}$ für $i_{\mathfrak{V}} > 34^{\circ}$ liefert. Schließlich geben die Figuren 1—3 ein Bild des Verlaufs von $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i} = \left(\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}\right)^2$, $\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i} = 1 - \frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i}$, i_V und des scheinbaren Einfallswinkels $\bar{i}_{\mathfrak{V}}$ als Funktion des wirklichen Einfallswinkels $i_{\mathfrak{V}}$ transversaler Wellen. In Figur 1 wurden $\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}$, $\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}$ unter Benutzung der in Tabelle 1 gefundenen Werte eingezeichnet. Figur 2 gibt die Energieverteilung in den reflektierten Wellen. Es wurden in ihr die Zusammenhänge (25) und (26) benutzt. Die linke Ordinatenskala gibt in % die Energieverhältnisse $\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i}$ bezw. $\frac{E_r}{E_i}$, die rechte Ordinatenskala analog $\frac{\mathrm{E}_r}{\mathfrak{E}_i}$ bezw. $\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathrm{E}_i}$; die linke Skala gilt also für gleichartig reflektierte Wellen, die rechte für Wechselwellen. Die beiden unteren Abszissenskalen geben die zusammengehörigen Einfallswinkel $i_{\mathfrak{V}}$ und i_V. Nach (26) ist

$$\left(\frac{\mathrm{E}_r}{\mathrm{E}_i}\right)_{i_V} = \left(\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_i}\right)_{i_{\mathfrak{V}}},$$

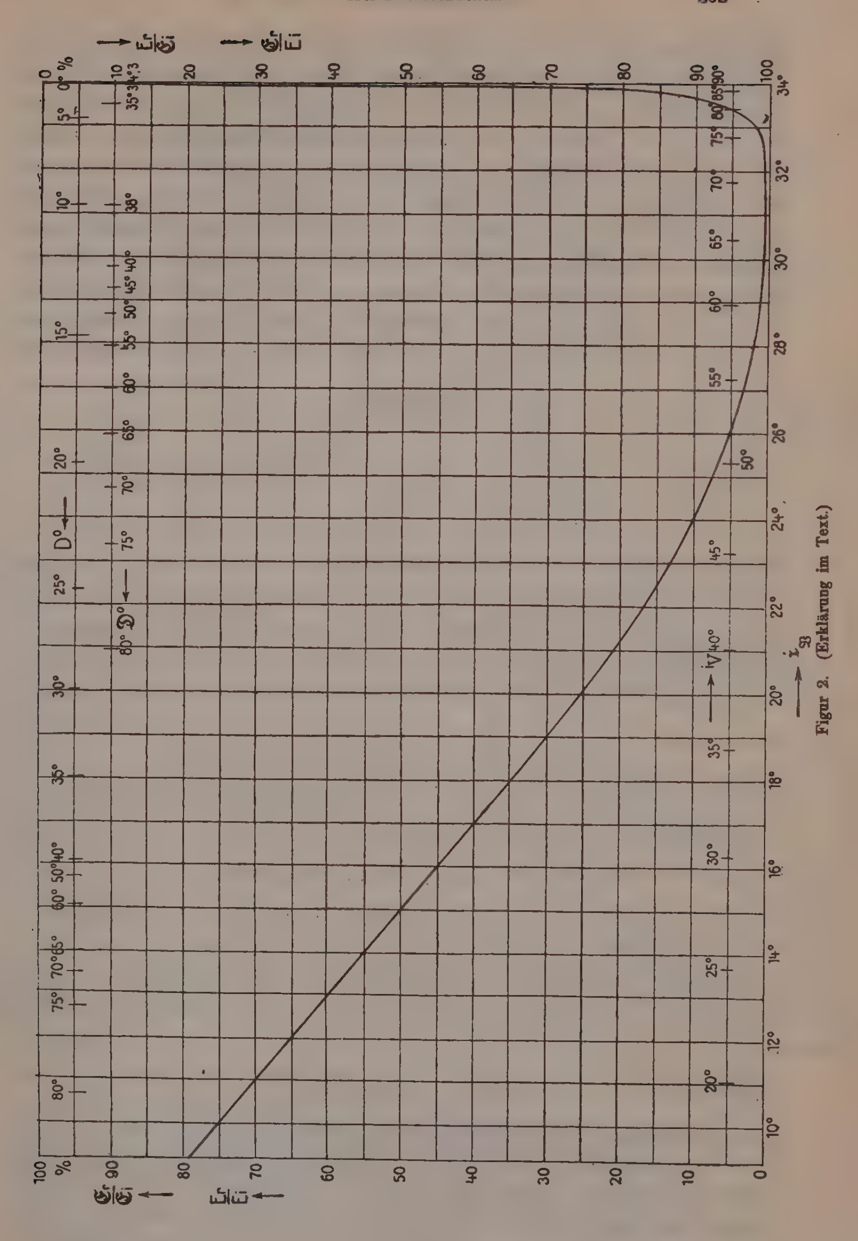
so daß in Figur 2 beide Energieverhältnisse durch dieselbe Kurve dargestellt werden, da die Abszissenskalen für i und *i* so gelegt sind, daß entsprechende $i_{\mathfrak{V}}$ und i_V an die gleiche Stelle fallen. Analoges gilt unter Benutzung von (25) für die Energie der Wechselwellen. Je ein gleich hoher Ordinatenwert der rechten und linken Skala ergänzen sich zu 100 gemäß der Tatsache, daß die Energie der einfallenden Welle gleich der Energie der reflek-

tierten gleichartigen Welle plus der Energie der reflektierten Wechselwelle ist. Schließlich geben die beiden oberen Abszissenskalen die Zentriwinkel D bezw. $\mathfrak{D}$, die zum Strahlbogen mit den



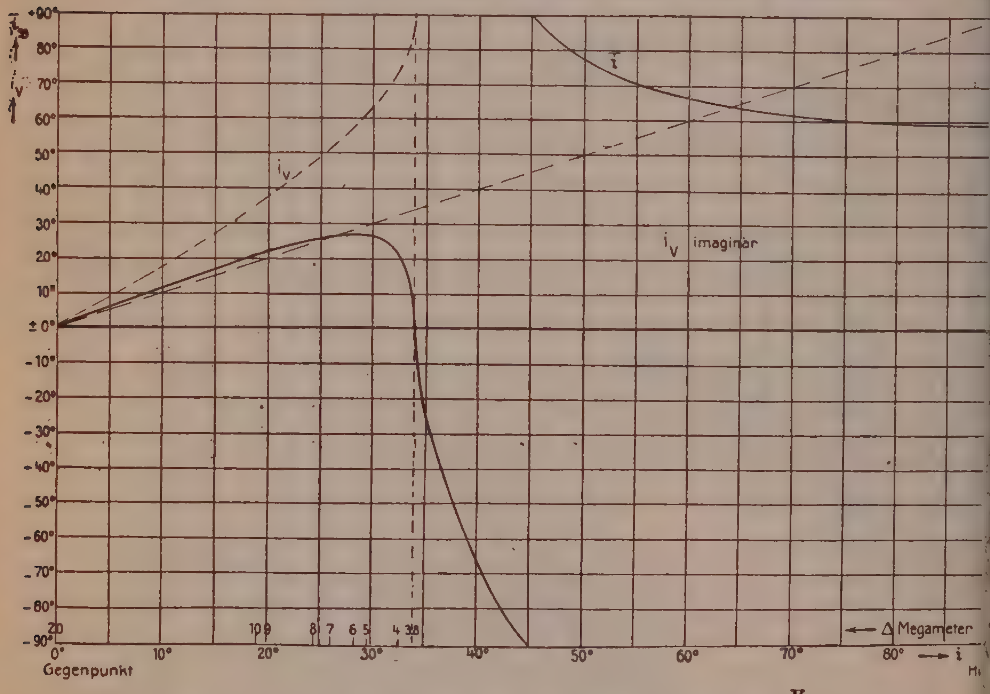
Figur 1.

Verhältnis der Amplitude der reflektierten zu derjenigen der einfallenden Welle $\left(\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}\ ----\right)$ und Verhältnis der horizontalen und vertikalen Bodenverrückung zur einfallenden Amplitude $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\ \text{———}\right.$ bezw. $\left.\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}\ -\cdot-\cdot\right)$ bei verschiedenem Austrittswinkel i für transversale Wellen unter der Annahme $\frac{V}{\mathfrak{B}} = 1{,}789$.



Figur 2. (Erklärung im Text.)

Einfallswinkeln i bezw. i gehören. — Die Figur 2 gibt z. B. eine Antwort auf die Frage: Wie wird eine Longitudinalwelle in der Herddistanz $\varDelta = 20°$ reflektiert? Es ist $D = \varDelta = 20°$; diesem Werte in der oberen Skala entspricht unten der Wert $i = 49°,7$. Es werden zwei Wellen reflektiert: eine Longitudinalwelle unter dem Winkel $i = 49°,7$, eine transversale unter dem Winkel i = 25°,2. Die linke Skala zeigt, daß 7 % der Energie longitudinal, die rechte, daß 93 % transversal weitergehen. Die abgehende Longitudinalwelle besitzt wieder einen Zentriwinkel $D = 20°$, die abgehende Transversalwelle einen solchen von $\mathfrak{D} = 67°$, da dieser Wert von $\mathfrak{D}$ dem Werte i = 25°,3 entspricht.

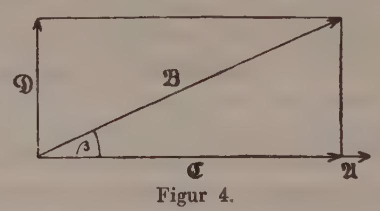


Figur 3. i_V (— — —) und $\bar{i}_{\mathfrak{B}}$ (————) als Funktion von $i_{\mathfrak{B}}$ für $\dfrac{V}{\mathfrak{B}} = 1,789$.

Schließlich zeigt Figur 3 die Kurve für den Winkel i_V, unter dem die longitudinale Welle reflektiert wird, sowie den Verlauf des scheinbaren Austrittswinkels $\bar{i}_{\mathfrak{B}}$ als Funktion von $i_{\mathfrak{B}}$. Man sieht, daß bei streifendem Einfall der transversalen Welle (i = 90°) der scheinbare Einfallswinkel $\bar{\mathrm{i}} = 59°$ beträgt. Bei steiler werdendem Einfall der Welle scheint diese jedoch immer flacher auszutreten; trifft sie unter 45° auf, so scheint der Stoß streifend

anzukommen. Zwischen $45^\circ > i > 34^\circ$ ist $\bar{i}$ negativ, und erst bei $30^\circ > i \geqq 0^\circ$, oder bei Herddistanzen von über 5000 km, wie die obere Abszissenskala zeigt, sind der wahre und der scheinbare Austrittswinkel ungefähr gleich.

Der Schwingungswinkel. Alle seitherigen Betrachtungen wurden unter der Annahme durchgeführt, daß der Schwingungswinkel der Transversalwellen 0° ist, d. h., daß die Transversalwellen in der Strahlebene schwingen. Es fragt sich nun, wie groß ist der Fehler bei der Berechnung der Bodenverrückungen, wenn der Schwingungswinkel den Wert β hat? Figur 4 möge einen



Figur 4.

Schnitt senkrecht zur Strahlebene darstellen, $\mathfrak{A}$ sei die Amplitude einer Transversalwelle, die in der Strahlebene schwingt, $\mathfrak{B}$ diejenige einer der ersten Welle gleichen Transversalwelle, die den Schwingungswinkel β besitzt. $\mathfrak{B}$ kann in zwei Komponenten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ mit den Schwingungswinkeln 0° bezw. 90° zerlegt werden. Es ist

(29) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}\cos\beta, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{B}\sin\beta.$$

Die weitere Rechnung soll nur für S und SPS durchgeführt werden. Zunächst ergibt sich, daß in Gleichung (13) nur die Ausdrücke $\left(\frac{\mathfrak{C}_r}{\mathfrak{C}_i}\right)$ und $\left(\frac{u}{A_i}\right)$ von β abhängen. Seien $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{D}_i$ die Oberflächenwerte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, seien ferner $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Bodenverrückungen, und zwar $\mathfrak{a}$ hervorgerufen durch $\mathfrak{A}_i$ in der Einfallsebene, $\mathfrak{b}$ hervorgerufen durch $\mathfrak{B}_i$ ($\mathfrak{b}$ ist im allgemeinen nicht $\parallel \mathfrak{B}_i$), $\mathfrak{c}$ die Komponente von $\mathfrak{b}$ parallel zur Einfallsebene, $\mathfrak{d}$ diejenige senkrecht zur Einfallsebene, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2}}\right)_s,$$

da weder $\mathfrak{c}$ noch $\mathfrak{d}$ eine Phasenverschiebung erleiden, wenn die Amplituden $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{D}_i$ auf die Erde auftreffen.

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s = \frac{\mathfrak{A}_i \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i}\right)}{\sqrt{\mathfrak{C}_i^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}_i}\right)^2 + \mathfrak{D}_i^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{D}_i}\right)^2}} = \frac{\mathfrak{A} \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i}\right)}{\sqrt{\mathfrak{C}^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}_i}\right)^2 + \mathfrak{D}^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{D}_i}\right)^2}},$$

da

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} : \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_i : \mathfrak{B}_i : \mathfrak{C}_i : \mathfrak{D}_i.$$

Nach Erdbebenwellen I (169) ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{D}_i} = 2.$

Ferner ist $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}_i}$, demnach

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{C}^2 + 4\mathfrak{D}^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{a}}\right)^2}},$$

und nach (29):

(30) $$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\beta + 4\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{a}}\right)^2 \sin^2\beta}}.$$

Nach Figur 1 liegt $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}_i}\right)^2}$, wenn man von dem praktisch unbrauchbaren Gebiet mit $34^\circ < i < 32^\circ$ absieht, zwischen 1,98 und 2,24. Für $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i} = 2{,}0$ ist nach (30) $\mathfrak{a}_S = \mathfrak{b}_S$, wo $\mathfrak{a}$ durch eine transversale Welle mit dem Schwingungswinkel 0°, $\mathfrak{b}$ durch eine gleich starke Welle mit dem Schwingungswinkel β hervorgerufen wird. Für $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}_i} = 2{,}24$ ist

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\beta + (0{,}9)^2 \sin^2\beta}};$$

für $\beta = 90^\circ$, im ungünstigsten Falle, ist $\mathfrak{a}_S = 1{,}1\,\mathfrak{b}_S$, also $\mathfrak{a}_S$ um 10 % falsch. Für $\beta = 20^\circ$ z. B. ist $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_S = 1{,}011$, also $\mathfrak{a}_S$ um 1,1 % falsch. Demnach hat selbst ein von 0° wesentlich verschiedener Schwingungswinkel keinen wesentlichen Einfluß auf die Berechnung der durch S hervorgerufenen Gesamtbodenverrückung. Anders liegen die Verhältnisse bei der Berechnung von $\mathfrak{a}_{SPS}$. Benutzen wir die gleichen Bezeichnungen wie bei S, so ist jetzt

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \mathfrak{A}_i : \mathfrak{C}_i = \mathfrak{A} : \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{D}_i = 0,$$

da nach der zweiten Reflexion aus Symmetriegründen $\beta = 0$ sein muß. Demnach ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, und für eine beliebige Komponente gilt:

(31) $$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_{SPS} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\cos\beta},$$

d. h. $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_{SPS}$ ist unabhängig vom Einfallswinkel. Der Fehler in der

Bestimmung von a_{SPS}, wenn man $\beta = 0$ anstelle eines Wertes β setzt, ist ein Cosinusfehler, also klein, wenn β klein ist. Für $\beta = 20^\circ$ z. B. ist $\left(\frac{a}{b}\right)_{SPS} = \frac{1}{0,940} = 1,065$, es ist also bei $\beta = 20^\circ$ u um $6^1/_2$ % falsch.

§ 4. Beobachtungen über den Schwingungswinkel der S-Wellen.

(Von B. Gutenberg.)

Zur Untersuchung des Schwingungswinkels der S-Wellen standen als Beobachtungsmaterial die Registrierungen der Göttinger Seismographen von 1904 bis 1911 zur Verfügung. Es zeigte sich jedoch, daß für die Beobachtungen über Transversalwellen nur die Aufzeichnungen des Wiechertschen astatischen 1200 kg-Horizontalpendels verwandt werden konnten. Die Vertikalbewegungen durch die Transversalwellen geben infolge ihrer meist hohen Periode, die wesentlich über der Eigenperiode des Vertikalpendels liegt, keine hinreichend genau bestimmbaren Bodenverrückungen. Nach den früheren Erfahrungen wurden nur Beben mit gut ausgeprägten Registrierungen benutzt. Es wurden von vornherein keine solchen Wellen ausgemessen, denen nach Analogie der in „Erdbebenwellen V“ eingeführten Gewichte 1—4 das Gewicht 1 zugekommen wäre. Ferner wurden solche Wellen nicht berücksichtigt, die eine deutliche Ueberlagerung durch andere Wellen zeigten, oder bei denen die Gefahr einer Verwechslung mit andern Wellen bestand; alle Beben wurden ausgeschieden, bei denen die stärkste P-Welle in solcher Entfernung von iP auftrat, daß die Möglichkeit eines zweiten Stoßes vorhanden war, sowie alle, die eine ausgesprochenes „Reißen“ (eP) zeigten. Schließlich wurden nur Wellen verwandt, bei denen die Bodenverrückungen in einer Geraden stattfanden, d. h. solche, bei denen einem Maximum oder Minimum in der EW-Komponente ein solches in der NS-Komponente entsprach, und bei denen in beiden Komponenten die Ruhelage gleichzeitig passiert wurde. Es zeigte sich zunächst, daß bei Beben mit Herddistanzen unter 35° dieser letzten Bedingung bei S in den seltensten Fällen entsprochen wurde. War sie doch erfüllt, so wechselte meist die Richtung der Bodenverrückung der S-Wellen in aufeinanderfolgenden Wellen und war stets wesentlich von der Richtung der Longitudinalwellen verschieden. Bei Herddistanzen unter 35° liegen also die Verhältnisse sehr kompliziert. Nach der Theorie (§ 3) müßten bei einem

Schwingungswinkel der S-Wellen von 0° in diesen Distanzen die Bodenteilchen Ellipsen beschreiben, deren Achsen senkrecht und parallel zur Erdoberfläche stehen, während sie sich bei einem Schwingungswinkel β_S der S-Wellen von 90° horizontal in einer Richtung verschieben müßten, die senkrecht zu der Strahlebene steht (Erdbebenwellen I, (169)). Die tatsächlichen Verrückungen lassen keinen Schluß auf β_S in diesen Distanzen zu. Die Kompliziertheit der Verhältnisse bei der „Totalreflexion" der S-Wellen in Distanzen unter 34° rührt vielleicht daher, daß die Theorie für Sinusschwingungen gilt, solche aber in Wirklichkeit nicht vorhanden sind. Es waren hiernach für die Untersuchung nur brauchbar S, PS in Distanzen über 34°, SS, SPS u. a. über 68°. Nun liegen aber S und PS bezw. SS und SPS in den Distanzen $34° < \Delta < 63°$ bezw. $\Delta < 68°$ außerordentlich nahe zusammen, so daß sehr leicht Verwechslungen vorkommen können. PS und SP überlagern einander und sind beide stark, so daß deswegen von ihrer Betrachtung abgesehen wurde. SS, PSS und SSP ergeben sich bereits bei $\Delta = 71°$ sehr schwach, falls man β_S zu 0° annimmt. Es kann daher die Welle, deren Laufzeit etwa gleich derjenigen von SS ist, bei Distanzen über 71° als SPS angesprochen werden, wie dies weiter unten (§ 6) noch näher ausgeführt wird. Es sind jedoch alle Folgerungen, die aus der Betrachtung der SPS-Welle gezogen werden, nicht sehr sicher, und zwar aus folgenden Gründen: 1) Die ziemlich starken SPSP- und PSPS-Wellen liegen dicht hinter SPS; 2) schon bei kleinem β_S nähert sich die Bodenverrückung von SS derjenigen von SPS; 3) schon von etwa $\Delta = 80°$ ab können SSP und PSS merklichen Einfluß auf die SPS-Welle haben; 4) die Bestimmung der Bodenverrückung durch die SPS-Welle ist ziemlich ungenau, da die Perioden der SPS-Wellen über der Eigenperiode des Instrumentes liegen. — Bei Herddistanzen über 82° sind S und PS infolge der Unsicherheit der Laufzeiten möglicherweise zu verwechseln, falls S (analog wie P) dort schwach ist. In welchen Distanzen die einzelnen Wellen verwendbar sind, zeigt Tabelle 3. Es fanden sich für $63° < \Delta < 90°$ im ganzen 20 brauchbare Beben für S oder SPS, während Geiger in „Erdbebenwellen V" für die Longitudinalwellen 34 Beben aus den gleichen Herddistanzen mit Gewicht 2 bis 4 benutzte. Tabelle 4 gibt eine Zusammenstellung der Meßresultate. In ihr findet sich zunächst die Nummer des Bebens; die Nummerierung ist die gleiche wie in „Erdbebenwellen V". Neu hinzugekommen sind No. 73 und No. 74. Die Bestimmung der Herddistanz Δ ist in § 10 angegeben. Es wurden je die ersten

Tabelle 3.

Welle	$\varDelta$
P	unter 82°
PP	40° bis 164°
PPP	61° „ 246°
S	63° „ 82°
SPS	71° „ 90°

Einsätze der Wellen P, PP, S und SPS in beiden Komponenten von der Ruhelage aus gemessen. Bei den am besten ausgeprägten wurde dann je die Bodenverrückung berechnet; die so erhaltenen Werte sind ebenfalls in Tabelle 4 eingetragen. Wie man den Schwingungswinkel β_S der S-Wellen finden kann, wenn man die EW- und NS-Komponente der Bodenverrückungen durch P und S kennt, hat Galitzin[1]) gezeigt: Sind x_E und x_N die EW- bezw. NS-Komponente der Bodenverrückung einer Welle, α das Azimut ihrer Bodenverrückung gegen die NS-Richtung, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N}.$$

Der Winkel α ist in Tabelle 4 für P, PP und S angegeben; er ist von N aus gerechnet, und zwar positiv nach Osten, negativ nach Westen. Ferner findet man $\gamma_{PP} = \alpha_{PP} - \alpha_P$ und $\gamma_S = \alpha_S - \alpha_P$. Es müßte stets $\gamma_{PP} = 0$ sein, da P und PP in der gleichen Strahlebene schwingen. γ_{PP} schwankt jedoch infolge der Ungenauigkeit der Beobachtung zwischen $+7^1/_2{}^0$ und $-7^1/_2{}^0$. Da γ_S zwischen $+6^0$ und $-7^1/_2{}^0$ beobachtet ist, so sind wir zu dem Schlusse berechtigt, daß auch $\gamma_S = 0$ ist. Nach Galitzin gilt für β_S:

$$\operatorname{tg} \beta_S = \operatorname{tg} \gamma_S \cos i_P.$$

Der cos des Einfallswinkels i_P longitudinaler Wellen ist bei den benutzten Herddistanzen etwa 0,9. Es liegen demnach die Werte für den Schwingungswinkel β_S zwischen $+5^1/_2{}^0$ und -7^0.

Das Gesamtresultat der obigen Untersuchungen stimmt gut mit dem von Galitzin gefundenen überein. Galitzin sagt:

„Für kleine Epizentralentfernungen ist der Winkel β im allgemeinen groß, wobei β zwischen ziemlich weiten Grenzen schwankt

1) Fürst B. Galitzin, Ueber die Schwingungsrichtung eines Bodenteilchens in den transversalen Wellen der zweiten Vorphase eines Bebens. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 1911, S. 1019—1028.

Tabelle 4.

No.	Datum	Δ Meg.	Komponenten	P μ	PP μ	S μ	SPS μ	α_P 0	α_{PP} 0	α_S 0	γ_{PP} 0	γ_S 0
4[1]	1904 Juni 25 15h	8,2	EW	— 6,3	+ 3,2	+ 8,0						
			NS	—12,6	+ 5,6	+15,4						
			EW:NS	+ 0,50	+ 0,57	+ 0,52		26½	29½	27½	+3	+1
6[1]	„ Juni 27	8,2	EW	— 7,5	+ 3,2	+ 5,4						
			NS	—14,3	+ 5,5	+13,5						
			EW:NS	+ 0,52	+ 0,58	+ 0,40		27½	30	22	+2½	—5½
7[1]	„ Juli 24	8,2	EW	+ 5,0	+ 1,5	+ 3,9						
			NS	+ 8,5	+ 2,5	+ 6,5						
			EW:NS	+ 0,59	+ 0,60	+ 0,60		30½	31	31	+ ½	+ ½
9	1905 Juni 2	9,0	EW	— 2,1	+ 0,7	+ 7,7						
			NS	— 0,6	+ 0,3	+ 3,4						
			EW:NS	+ 3,5	+ 2,3	+ 2,3		74	66½	66½	—7½	—7½
23	1907 April 15	9,7	EW	+22,4	—51,3		+202					
			NS	— 9,6	+24,0		— 83					
			EW:NS	— 2,33	— 2,14		— 2,43	—67	—65		+2	
24	„ Mai 25	7,4	EW	— 2,9	+ 3,8	+20,8						
			NS	— 4,8	+ 6,0	+39,2						
			EW:NS	+ 0,60	+ 0,63	+ 0,53		31	32	28	+1	—3
26	„ Juli 1	9,1	EW	+ 1,3	+ 4,25	+ 7,9	+ 6,1					
			NS	— 0,3	— 1,1	— 2,7	— 2,0					
			EW:NS	— 4,3	— 3,9	— 2,9	— 3,1	—77	—76	—71	+1	+6
37	1908 März 26/27	9,6	EW	+27,5	+46,8		+143					
			NS	—12,7	—25,7		— 82,5					
			EW:NS	— 2,16	— 1,82		— 1,73	—65	—61		+4	
40	„ Mai 15	7,6	EW	+ 1,01	+ 0,5	— 1,2						
			NS	— 4,9	— 3,0	+ 7,5						
			EW:NS	— 0,20	— 0,17	— 0,16		—11½	— 9½	— 9	+2	+2½
44	„ Nov. 6	7,9	EW	+ 1,6	+ 2,1	+ 1,65	+ 2,3					
			NS	+ 3,0	+ 4,1	+ 3,2	+ 5,0					
			EW:NS	+ 0,53	+ 0,51	+ 0,52	+ 0,46	28	27	27½	—1	— ½
46	„ Dez. 12	7,5	EW	+ 6,0	+ 4,0	+10,0						
			NS	?	?	—12,5						
			EW:NS	?	?	— 0,80				—38½		
73	1909 Febr. 26	8,4	EW	+ 1,4		— 6,1						
			NS	— 0,5		+ 2,5						
			EW:NS	— 2,8		— 2,4		—70½		—67½		+3

1) Bei den Beben No. 4, 6, 7 sind die angegebenen Werte für P, PP, S, SPS proportional den Verrückungen, da die Vergrößerung des Horizontalpendels nicht bekannt ist; die Werte unter EW : NS sind daher etwas unsicher.

o.	Datum	$\varDelta$ Meg.	Komponenten	P μ	PP μ	S μ	SPS μ	α_P 0	α_{PP} 0	α_S 0	γ_{PP} 0	γ_S 0
4	1909 März 11	9,2	EW	+ 0,8	— 0,6	— 5,8						
			NS	— 0,6	+ 0,6	+ 5,2						
			EW:NS	— 1,3	— 1,0	— 1,1		—52½	—45	—47½	+7½	+5
1	„ Juli 30	9,7	EW	+ 6,0	+15,0		+ 45					
			NS	— 2,5	— 6,0		— 26,4					
			EW:NS	— 2,4	— 2,5		— 1,7	—67½	—68		— ½	
2	„ August 14	9,0	EW	+ 0,8	+ 0,5	+ 2,3						
			NS	+ 1,4	+ 0,8	+ 3,4						
			EW:NS	+ 0,57	+ 0,63	+ 0,67		29½	32	34	+2½	+4½
3	„ Sept. 8	8,4	EW	+ 2,6	+ 1,6	+ 5,0	— 1,8					
			NS	+ 4,0	+ 2,0	+ 6,4	— 2,45					
			EW:NS	+ 0,65	+ 0,80	+ 0,78	+ 0,73	33	38½	38	+5½	+5
8	1910 April 12	8,9	EW	+11,0	—12,5	+ 95						
			NS	— 5,9	+ 5,4	— 54						
			EW:NS	— 1,87	— 2,3	— 1,76		—62	—66½	—60½	—4½	+1½
0	„ Mai 31	9,6	EW	— 2,0	+ 4,5		+ 14,3					
			NS	+ 0,8	— 1,6		— 6,0					
			EW:NS	— 2,5	— 2,8		— 2,4	—68	—70½		+2	
0	1911 Juni 6	9,7	EW	—13,8	+16,1		+ 99					
			NS	+ 5,0	— 5,5		— 33					
			EW:NS	— 2,8	— 2,9		— 3,0	—70½	—71		— ½	
1	„ Juni 15	9,0	EW	—97	+55	+313	—416					
			NS	—55	+32,5	+165	—182					
			EW:NS	+ 1,76	+ 1,69	+ 1,90	+ 2,3	60½	59½	62	—1	+1½

und sich sogar zuweilen $+90^\circ$ oder -90° nähert. Von der Epizentralentfernung $\varDelta = 4430$ ab wird β im allgemeinen mit zwei bis drei Ausnahmen schon bedeutend kleiner .... Der Wert von β muß unbedingt durch die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen geologischen Schichten in der Nähe der Erdoberfläche im Beobachtungsort, sowie im Epizentralgebiet selbst beeinflußt werden. Dadurch erklärt sich höchstwahrscheinlich die große Veränderlichkeit von β".

Galitzin benutzt 23 Beben von zwei Jahren mit Herddistanzen zwischen 19° und 90°.

Das Resultat der vorliegenden Untersuchung läßt sich so zusammenfassen:

Die Transversalwellen schwingen bei Herdentfernungen von 65° bis 82° innerhalb der Beobachtungsfehler (± 7°) in der gleichen Ebene wie die Longitudinalwellen. Bei Beben unter 34° Herddistanz hängt die

Bodenverrückung in sehr komplizierter Weise von der Amplitude der einfallenden Welle ab. Von der Untersuchung des Schwingungswinkels der S-Wellen bei den Beben mit Herddistanzen zwischen 34° und 63° wurde abgesehen, da eine Verwechslung der S- und PS-Wellen sehr leicht möglich ist.

Als Nebenresultat ergibt sich, daß es mit Hilfe des Göttinger Horizontalseismometers möglich ist, bei gut ausgeprägten Beben deren Azimut auf etwa ± 5° genau anzugeben. So zeigen z. B. die mexikanischen Beben (No. 23, 37, 51, 60 und 70) ein Azimut von $-67^3/_4{}^\circ \pm 2^3/_4{}^\circ$, während die Rechnung bei Annahme einer Breite $\varphi = 17^\circ$ nördl. und einer Länge $\lambda = 99^\circ$ westl. des Herdes ein Azimut von 65°, gerechnet von Nord aus, ergibt, also eine Differenz von nur $2^3/_4{}^\circ$ gegen das Mittel der Beobachtungen zeigt.

§ 5. Beobachtungen über die Perioden der Vorläufer.

(Von B. Gutenberg.)

Wie wir in § 3 gesehen haben, ist zur Berechnung der Amplitudenfunktion zweier Wellen mit verschiedener Periode die Kenntnis des Periodenverhältnisses nötig. Es wurden deshalb an 23 Beben, darunter den schon im § 4 benutzten 20 Beben, die Perioden der P-, PP-, S- und SPS-Wellen gemessen. Bei der letzteren zeigte sich stets nur eine Periode und zwar eine höhere als bei den ersten drei. Bei diesen ließen sich jedoch deutlich zwei Klassen von Perioden unterscheiden, wie schon Roesener in einer eingehenden Untersuchung für Göttingen fand, eine mit meist 5—7 Sek., sie ist im folgenden mit I bezeichnet, und eine zweite mit 11—12 Sek., sie ist mit II bezeichnet. In Tabelle 5 sind die Meßresultate eingetragen. Datum und Distanz der Beben kann aus Tabelle 4 entnommen werden. Bei den dort nicht angegebenen Beben No. 35, 38 und 55 ist die Distanz nicht genau genug bekannt. Die 2. bis 7. Spalte enthalten die Mittel aus mehreren Messungen der betr. Periodenklasse. Für die Messung der Periode von SPS standen meist nur eine oder zwei Wellen zur Verfügung. Man sieht sofort, daß die Klassenbildung durchaus nicht willkürlich ist. Sehr oft treten beide Periodenklassen nebeneinander auf. Bei den ersten Vorläufern zeigt das Vertikalpendel infolge seiner niedrigen Eigenperiode (4 Sek.) fast stets nur die I-Klasse, die überhaupt bei den ersten Vorläufern meist klarer ausgeprägt ist als die II-Klasse. Bei den S-Wellen ist die II-Klasse meist besser ausgeprägt, doch sind infolge der höheren Periode stets weniger Wellen der II-Klasse als der I-Klasse meßbar. Figur 5 zeigt die relative Häufig-

Tabelle 5.

No.	T_P Sek.		T_{PP} Sek.		T_S Sek.		T_{SPS} Sek.	$\frac{T_{PII}}{T_{PI}}$	$\frac{T_{SII}}{T_{PI}}$	$\frac{T_{SI}}{T_{PI}}$	$\frac{T_{SII}}{T_{PII}}$	$\frac{T_{SPS}}{T_{PII}}$
	I	II	I	II	I	II						
4	5	—	5	—	6	9	—	—	1,8	1,2	—	—
6	5	10	—	—	—	9	—	2,0	1,8	—	0,9	—
7	6	—	—	—	6	—	—	—	—	1,0	—	—
9	$4^1/_2$	—	$4^1/_2$	—	5	—	—	—	—	1,1	—	—
23	—	13	—	$12^1/_2$	—	—	21	—	—	—	—	1,6
24	6	12	6	12	—	—	—	2,0	—	—	—	—
26	5	10	5	—	5	—	15	2,0	—	1,0	—	1,5
35	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
37	—	12	—	12	—	—	19	—	—	—	—	1,6
38	6	—	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
40	6	12	6	12	—	$11^1/_2$	—	2,0	1,9	—	0,9	—
44	7	—	6	—	7	—	12	—	—	1,0	—	—
46	$5^1/_2$	—	$7^1/_2$	—	$7^1/_2$	11	—	—	2,0	1,4	—	—
73	$5^1/_2$	11	$5^1/_2$	—	—	10	—	2,0	1,8	—	0,9	—
74	4	$8^1/_2$	4	9	—	9	—	2,1	2,2	—	1,05	—
51	5	12	$5^1/_2$	11	—	—	23	2,4	—	—	—	1,9
52	$5^1/_2$	—	5	—	—	11	—	—	2,0	—	—	—
53	$4^1/_2$	—	5	—	5	—	15	—	—	1,1	—	—
55	5	—	5	11	—	—	—	—	—	—	—	—
58	5	$11^1/_2$	5	$11^1/_2$	6	$11^1/_2$	—	2,3	2,3	1,2	1,0	—
60	$5^1/_2$	12	6	—	—	—	22	2,2	—	—	—	1,8
70	$5^1/_2$	—	$5^1/_2$	12	—	—	18	—	—	—	—	—
71	$7^1/_2$	—	7	—	—	15	20	—	2,0	—	—	—
Mittel	5,5	11,3	5,6	11,4	6,0	10,8	$18^1/_3$	2,1	2,0	1,1	0,95	1,7

Durch Division der Mittel ergibt sich:

$$\frac{T_{PII}}{T_{PI}} = 2{,}05; \quad \frac{T_{SII}}{T_{SI}} = 1{,}80; \quad \frac{T_{SII}}{T_{PI}} = 1{,}96; \quad \frac{T_{SI}}{T_{PI}} = 1{,}1;$$

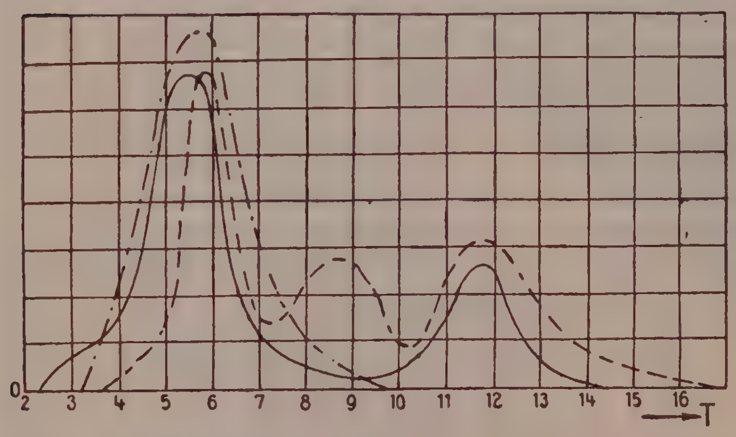
$$\frac{T_{SII}}{T_{PII}} = 0{,}96; \quad \frac{T_{SPS}}{T_{PII}} = 1{,}6; \quad \frac{T_{SPS}}{T_{SII}} = 1{,}7.$$

keit der einzelnen Perioden aus allen gemachten Messungen überhaupt. Die der Figur zugrundeliegenden Zahlen sind in Tabelle 6 zusammengestellt. In Figur 5 sind eingezeichnet die relative Häufigkeit der einzelnen Perioden bei den ersten Vorläufern aus 206 Beobachtungen von P und PP (ausgezogene Kurve), diejenige bei den S-Wellen aus 77 Beobachtungen (— — — —) und

Tabelle 6.

Häufigkeit der ganzzahligen Perioden bei den Vorläufern und der kurzperiodischen Bodenunruhe.

Periode Sek.	Beobachtete Häufigkeit der Perioden bei				
	P	PP	PP + P	S	Bodenunruhe
3	7	—	7	—	—
4	8	6	14	1	200
5	35	26	61	4	619
6	35	21	56	22	732
7	4	7	11	5	291
8	2	5	7	8	109
9	1	—	1	9	31
10	2	2	4	3	—
11	5	8	13	9	—
12	10	16	26	10	—
13	4	1	5	1	—
14 u. mehr	—	1	1	5	—



Figur 5. Periodenhäufigkeit bei P und PP (————), S (— — —) und bei Bodenunruhe (—·—·—).

schließlich zum Vergleiche die relative Periodenhäufigkeit bei der kurzperiodischen Bodenunruhe in Göttingen aus 1932 Beobachtungen [1]) je der ganzzahligen Perioden. Alle drei Kurven

1) Vgl. B. Gutenberg, die seismische Bodenunruhe, Göttinger Dissertation und Gerlands Beiträge zur Geophysik, XI, 1911, Heft 2/4, Tabelle 6c.

zeigen ein scharfes Maximum der Periodenhäufigkeit zwischen 5 und 6 Sek., außerdem die Kurven für die Vorläufer ein zweites Maximum zwischen 11 und 12 Sek. Die Realität der Anschwellung der Häufigkeit der S-Perioden zwischen 8 und 9 Sek. ist nicht sicher, da nur wenige Beobachtungen über T_S vorliegen, wie Tabelle 6 zeigt. Aus den fünf letzten Spalten der Tabelle 5 geht hervor, daß die Verhältnisse der Periodenklassen von P und S innerhalb der Beobachtungsfehler konstant sind, und daß das gleiche von dem Verhältnisse $T_{SPS} : T_{PII}$ gilt. T_{PII} wurde hierbei benutzt, da T_{SII} nicht häufig genug beobachtet ist, die I-Klassen aber relativ weniger scharf bestimmbare Einzelperioden haben als die II-Klassen mit ihren größeren Perioden. Es kann nach vorliegendem das Verhältnis $T_P : T_{PP} : T_S : T_{SPS}$ im allgemeinen als konstant betrachtet werden. Als Mittel liefert Tabelle 5: $T_{PI} = 5{,}5$ Sek., $T_{PII} = 11{,}4$ Sek., $T_{SI} = 6{,}0$ Sek., $T_{SII} = 10{,}8$ Sek. Sieht man T_{PI} als Grundperiode von P, T_{SII} als Grundperiode von S an, so ergibt sich: $T_{SPS} : T_S : T_{PP} : T_P = 3{,}3 : 1{,}95 : 1{,}0 : 1{,}0$. Herr Rösener hatte die Freundlichkeit, mir mitzuteilen, daß diese Werte gut mit den von ihm gefundenen Resultaten, die demnächst veröffentlicht werden[1]), übereinstimmen.

§ 6. Berechnung und Diskussion der Amplitudenfunktion von $\left(\frac{SS}{P}\right)$ und $\left(\frac{SPS}{PP}\right)$ unter Annahme 1 für $\sin \mathfrak{i}(\Delta)$.

(Von B. Gutenberg.)

Für die Untersuchung der Amplitudenfunktionen der Transversalwellen wurde vorausgesetzt, daß die in „Erdbebenwellen V" aufgestellte $\sin i(\Delta)$-Funktion für longitudinale Wellen streng richtig sei. Für transversale Wellen wurde zunächst die Annahme 1 gemacht, daß bis zur Herddistanz von $\Delta = 40^\circ{,}3$ $\sin \mathfrak{i}(\Delta) = \sin i(\Delta)$ sei, und unter dieser Voraussetzung die Amplitudenfunktion $\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}$ für $\Delta \geqq 68^\circ{,}66$ berechnet. Es ist nach (13) unter der Annahme, daß der Schwingungswinkel β_{SS} von SS 0° ist:

---

1) F. Rösener, Über die Perioden der Erdbebenwellen. (Vorl. Mitt. über eine Göttinger Dissertation.) Phys. Zeitschr. 13, 1912, S. 213.

Nach einer Hypothese von E. Wiechert werden bei einem Bruch der Erdrinde am Herd zugleich longitudinale und transversale Wellen erzeugt, sodaß P und S neben gleichen Perioden auch solche enthalten müssen, deren Längen umgekehrt proportional den Geschwindigkeiten sind. In unserem Falle wäre danach 1,95 als das Verhältnis der Geschwindigkeiten zu deuten.

$$(32)\quad \frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P} = \frac{\mathfrak{c}}{c}\cdot\frac{\mathfrak{k}}{k}\cdot\frac{T_{SS}}{T_P}\cdot\frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)_{SS}^{(2)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_P^{(1)}}\cdot\left(\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}\right)_{SS}^{(1)}\cdot\sqrt{\frac{\cos i_P^{(1)}}{\cos i_{SS}^{(2)}}}\sqrt{\frac{\delta_P^{(1)}}{\delta_{SS}^{(2)}}}.$$

Die in § 9 diskutierte Amplitudenfunktion $\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}$ zeigt, daß $\frac{\mathfrak{c}}{c}\cdot\frac{\mathfrak{k}}{k}\cdot\frac{T_S}{T_P}$ etwa 1 ist. Nimmt man $\frac{\mathfrak{c}}{c}\cdot\frac{\mathfrak{k}}{k}\cdot\frac{T_{SS}}{T_P}$ ebenfalls zu 1 an, so läßt sich $\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}(\varDelta)$ unter Annahme 1 für $\sin i(\varDelta)$ berechnen. Tabelle 7 gibt eine Reihe von Werten.

Tabelle 7.

Berechnete Werte von $\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}(\varDelta)$ unter Annahme 1 für $\sin i(\varDelta)$ unter der Voraussetzung $\beta_{SS} = 0$, $\frac{\mathfrak{c}}{c}\cdot\frac{\mathfrak{k}}{k}\cdot\frac{T_{SS}}{T_P} = 1$.

$\varDelta^0$	68°,66	68°,78	69°,44	70°,30	71°,18	72°,48
$\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}$	7,5	3,7	1,50	0,75	0,43	0,233
$\varDelta^0$	73°,74	75°,04	76°,00 ↑	76°,00 ↓	78°,00	80°,60 ↑
$\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}$	0,138	0,073	0,050	0,55	0,61	0,80

Ein ↑ bedeutet $\lim\left(\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}\right)_{\varDelta}$ bei zunehmendem, ein ↓ bei abnehmendem $\varDelta$.

Man sieht, daß $\mathfrak{u}_{SS}$ unter unseren Annahmen stellenweise kleiner als $\frac{1}{10} u_P$ ist. Hätte SS eine größere Periode als P, so wäre $\mathfrak{u}_{SS}$ größer als hier berechnet ist. Da jedoch $T_{SS} : T_S$ kaum größer als zwei sein wird, andererseits SS wahrscheinlich eine größere Absorption als P erleidet, insbesondere an der Reflexionsstelle an der Erdoberfläche, so dürften die wahren Werte von $\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{u_P}$ mit den berechneten Werten angenähert übereinstimmen, falls Annahme 1 richtig ist, und falls $\beta_{SS} = 0$. Wie schon früher erwähnt ist, würde in diesem Falle bei $\varDelta > 71°$ SPS die Ursache der Bodenverrückung sein können, die seither als SS angesprochen wurde. Wie aus § 10 hervorgeht, differieren die Laufzeiten von SS und SPS in den benutzten Gebieten um 2 bis 12 Sek., eine Verwechslung ist also sehr leicht möglich. Es ist nach (13) und (25):

$$(33)\qquad \frac{\mathfrak{u}_{SS}}{\mathfrak{u}_{SPS}} = \frac{T_{SS}}{T_{SPS}} \cdot \frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(2)}_{SS}}{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(3)}_{SPS}} \cdot \frac{\left(\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(1)}_{SS}}{\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS}} \cdot \sqrt{\frac{\cos \mathfrak{i}^{(3)}_{SPS}}{\cos \mathfrak{i}^{(2)}_{SS}}} \cdot \sqrt{\frac{\delta^{(3)}_{SPS}}{\delta^{(2)}_{SS}}}.$$

Hierbei ist im Mittel etwa für die zur Messung benutzten Distanzen:

$$\frac{T_{SS}}{T_{SPS}} = 0{,}6, \quad \cos \mathfrak{i}_{SS} = \text{ca. } \cos \mathfrak{i}_{SPS}, \quad \frac{\delta_{SPS}}{\delta_{SS}} = 1{,}8; \quad \frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(2)}_{SS}}{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(3)}_{SPS}} = 0{,}8,$$

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(1)}_{SS} = 0{,}06, \qquad \left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS} = 1,$$

demnach

$$\frac{\mathfrak{u}_{SS}}{\mathfrak{u}_{SPS}} = \text{ca. } 0{,}6 \,.\, 1{,}3 \,.\, 0{,}06 \,.\, 0{,}8 = \text{ca. } \frac{1}{30}.$$

Es ist also unter den angegebenen Annahmen bei Herddistanzen zwischen 74° und 80° die Bodenverrückung durch SPS etwa 30 mal so stark wie die Bodenverrückung durch SS. Eine andere Annahme über den Schwingungswinkel hat zur Folge, daß $\mathfrak{u}_{SS}$ und $\mathfrak{u}_{SPS}$ sich nähern. $\mathfrak{u}_{SSP}$ und $\mathfrak{u}_{PSS}$ sind von der gleichen Größenordnung wie $\mathfrak{u}_{SS}$. Man wird daher wie oben angegeben annäherungsweise die seither als SS angesprochene Welle bei Herddistanzen über etwa 71° als SPS bezeichnen dürfen, muß jedoch dabei stets im Auge behalten, daß auch die Wellen SPSP und PSPS, die sehr dicht hinter SPS folgen, ziemlich stark sein können, und daß von etwa $\varDelta = 90°$ ab auch die vernachlässigten Wellen stärker werden.

Um den Verlauf der $\sin \mathfrak{i}(\varDelta)$-Funktion bei kleinem $\varDelta$ prüfen zu können, wurde $\frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}}$ gebildet. Es wurde PP gewählt, da u_{PP} bei Herddistanzen über 80° genauer bestimmbar ist als u_P. Es war

$$(27)\qquad \frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}} = c_1 \frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(3)}_{SPS}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(2)}_{PP}} \cdot \frac{\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS}}{\left(\frac{A_r}{A_i}\right)^{(1)}_{PP}} \cdot \sqrt{\frac{\cos i^{(2)}_{PP}}{\cos \mathfrak{i}^{(3)}_{SPS}} \cdot \frac{\delta^{(2)}_{PP}}{\delta^{(3)}_{SPS}}},$$

wo $c_1 = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k} \cdot \frac{T_{SPS}}{T_{PP}} = \text{konstant}.$

Für die Rechnung, deren Hauptwerte in Tabelle 8 angegeben sind, wurde gesetzt: $c_1 = 0{,}5$. c_1 hat in Wirklichkeit vielleicht den Wert 1,7, denn die Kurve für $\frac{S}{P}$ liefert etwa

$$c_2 = 1; \quad c_1 = c_2 \cdot \frac{T_{SPS}}{T_S},$$

da

$$c_2 = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k} \cdot \frac{T_S}{T_P}, \quad \frac{T_S}{T_P} = \frac{T_S}{T_{PP}};$$

nach Tabelle 5 ist $\frac{T_{SPS}}{T_S}$ ungefähr 1,7, also wäre dann $c_1 = 1{,}7$. Wenn $c_1 \neq 0{,}5$ ist, so muß in der Zeichnung die berechnete Kurve der beobachteten parallel laufen, wenn die Kurven, wie es hier geschehen ist, in logarithmischem Maßstabe gezeichnet werden.

Tabelle 8.

Berechnung von $\frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}}$ unter den Annahmen $\sin \mathrm{i}(\varDelta) = \sin i(\varDelta)$ und $c_1 = 0{,}5$.

$\varDelta^0$	i_{PP}	i_{SPS}	δ_{PP}	δ_{SPS}	$\left(\frac{E_r}{\mathfrak{E}_i}\right)^{(1)}_{SPS}$	$\left(\frac{A_r}{A_i}\right)^{(1)}_{PP}$	$\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)^{(2)}_{SPS}$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)^{(2)}_{PP}$	$\frac{\mathfrak{u}_{SPS}}{u_{PP}}$
70°,18	33° 24′	33° 55′	2°,66	19°,2	0,626	0,5905	3,5453	1,182	0,60
72,50	32 28	33 40	2,84	7,9	0,8855	0,6095	2,8917	1,156	1,09
74,75	31 38	33 20	3,01	6,3	0,9579	0,6265	2,5428	1,133	1,19
76,70	30 54	33 0	3,16	5,67	0,9809	0,6410	2,3427	1,110	1,22
78,00	30 27	32 45	3,30	5,38	0,9889	0,6515	2,254	1,098	1,23
80,60↑	29 36	32 13	3,48	5,01	0,9949	0,6685	2,096	1,070	1,22
80,60↓	29 36	32 13	300	5,01	0,9949	0,6685	2,096	1,070	11,4
81,76	29 35	32 0	210	4,92	0,9961	0,6690	2,0561	1,070	9,5
84,14	29 34	31 30	112	4,80	0,9971	0,6690	1,9800	1,070	6,7
85,79	29 32	31 9	82,8	4,85	0,9971	0,6695	1,939	1,069	5,7
89,00	29 29	30 27	50,8	5,06	0,9962	0,6705	1,883	1,068	4,3
93,27↑	29 22	29 35	31,8	5,33	0,9923	0,6730	1,831	1,065	3,2

Von den Reflexionsfaktoren, die in (27) in den auf c_1 folgenden Verhältnissen auftreten, sind die im Zähler stehenden in § 3 der vorliegenden Arbeit, die im Nenner stehenden in § 3 der „Erdbebenwellen V“ berechnet. Die einzelnen vorkommenden Werte wurden den bereits gezeichneten Kurven für diese Verhältnisse entnommen. $i_{PP}(\varDelta)$ und $\delta_{PP}(\varDelta)$ wurden ebenfalls nach den in „Erdbebenwellen V“ angegebenen Werten gezeichnet. Es wurden alle dort erhaltenen δ_P mit $0{,}01\,N$ multipliziert, so daß alle δ_P gewissermaßen einem Werte von $\frac{1}{2N} = 0{,}005$ entsprechen, jedoch auf unendlich kleine Zonen reduziert sind. Für $\mathrm{i}_S(\varDelta)$ wurde, wie

Tabelle 9.

Berechnung von δ_{SPS} unter der Annahme $\sin \mathrm{i}(\Delta) = \sin i(\Delta)$.

i	i_{SP}	Δ_{i}	Δ_i	Δ_{SPS}	$1:2N$	i_+	$\mathrm{i}_+ - \mathrm{i}_-$	i_{SP_+}	$i_{SP_+} - i_{SP_-}$	$\Delta_{\mathrm{i}-} - \Delta_{\mathrm{i}+}$	$\Delta_{i-} - \Delta_{i+}$	δ_{SPS}
33° 55′	86° 36′	34°,39	1°,40	70°,18	0,0005	—	0° 6′,16	—	4°,0	(0°,12)	(1°,68)	1°,92
33 40	82 38	34,72	3,06	72,50	0,0005	—	0 6,19	—	1,3	(0,12)	(0,55)	0,79
33 20	79 26	35,15	4,45	74,75	0,0050	33° 51′	1 2,4	85°,0	9,0	1,24	3,8	6,3
33 0	77 0	35,59	5,52	76,70	0,0050	33 31	1 3,1	81,05	7,2	1,26	3,15	5,67
32 0	71 27	36,87	8,02	81,76	0,0050	32 32	1 4,9	74,2	5,15	1,32	2,28	4,92
31 30	69 12	37,52	9,10	84,14	0,0050	32 3	1 5,8	71,6	4,5	1,35	2,10	4,80
31 9	67 44	38,00	9,79	85,79	0,0050	31 42	1 6,3	70,0	4,3	1,40	2,05	4,85
30 27	65 6	39,00	11,00	89,00	0,0030	30 47	0 40,7	66,35	2,5	0,92	1,20	3,04
29 35 ↓	61 58	40,30	12,67	93,27	0,0030	29 56	0 41,8	63,2	2,33	1,00	1,20	3,20
29 35 ↑	61 58	40,30	12,67	93,27	0,0001	—	0 1,40	—	0,078	(6,0)	(0,04)	6,0

schon erwähnt, angenommen, daß $\mathrm{i}(\Delta) = i(\Delta)$ bis $\Delta = 40°,3$. Diese obere Grenze fällt bereits außerhalb des Beobachtungsbereiches, da nur Beobachtungen mit $\Delta < 88°$ benutzt wurden; dann besitzen die beiden transversal durchlaufenen Bögen von SPS Zentriwinkel, die kleiner als 39° sind. Für $\mathrm{i}_{SPS}(\Delta)$ und δ_{SPS} wurden ebenfalls Kurven gezeichnet. Die Berechnung von δ_{SPS}, die in Tabelle 9 mitgeteilt ist, geschah so: Der Winkel $\mathrm{i}^{(1)}_{SPS_{\mathrm{i}}}$ wurde angenommen. Dann liefern Tabelle 1 und Figur 3 in § 1 den Winkel $i^{(1)}_{SPS_r}$, unter dem die longitudinale Welle bei der ersten Reflexion weggeht. Die zu diesen Winkeln i und i gehörigen Herddistanzen bezw. Zentriwinkel Δ_{i} und Δ_i ergeben sich aus der angenommenen $\mathrm{i}(\Delta)$-Funktion bezw. der $i(\Delta)$-Funktion (Erdbebenwellen V, Annahme 3). Es ist dann $\Delta_{SPS} = 2\Delta_{\mathrm{i}} + \Delta_i$. Hiermit ist $\mathrm{i}_{SPS}(\Delta)$ gefunden. Die Bedingung (1), daß die Elementarzonen gleich sind, liefert i_{SPS_+} und i_{SPS_-}; analog wie oben ergibt sich hieraus Δ_{SPS_+} und Δ_{SPS_-}, und es ist

$$\delta_{SPS} = \Delta_{SPS_-} - \Delta_{SPS_+} = 2(\Delta_{\mathrm{i}-} - \Delta_{\mathrm{i}+}) + (\Delta_{i-} - \Delta_{i+}).$$

$\Delta_{\mathrm{i}-}$ und $\Delta_{\mathrm{i}+}$ wurden analog bestimmt wie in „Erdbebenwellen V“ für δ_P angegeben ist. Die Werte, die aus der Tangentenrichtung berechnet sind, sind eingeklammert. $\frac{1}{2N}$ in (1) wurde so gewählt, daß die resultierenden δ_{SPS} 10° nicht überschritten, und daß das auf dem Bogen Δ_- bis Δ_+ gemessene δ gleich dem aus der Tangentenrichtung berechneten wurde. Das resultierende δ_{SPS} wurde analog wie oben für δ_P angegeben ist mit $0{,}01\,N$ multipliziert.

Das in Tabelle 8 berechnete Verhältnis $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ wurde zusammen mit den Beobachtungen in Figur 6 in logarithmischem Maßstabe eingetragen. Es zeigt sich, daß die Beobachtungen etwa auf $^1/_3$ der berechneten Höhe liegen, wenn man $c_1 = 1{,}7$ setzt. Dies ist sehr plausibel, da SPS vermutlich größere Absorption auf dem Wege erleidet als PP, dann aber bei der zweimaligen Reflexion bei SPS mehr Energie absorbiert wird, als bei der einmaligen von PP. Außerdem spielen vielleicht Ueberlagerungen bei SPS eine Rolle. Damit die berechnete Kurve genau auf die beobachtete fiele, müßte die Richtung der $\mathrm{i}(\varDelta)$-Funktion überall nach der gleichen Seite geändert werden, dies widerspricht aber den Laufzeiten. Es ist also die Annahme $\mathrm{i}(\varDelta) = i(\varDelta)$ für $\varDelta < 40^\circ{,}3$ mit den Beobachtungen verträglich.

§ 7. Beobachtete Amplitudenfunktionen und Diskussion.

(Von B. Gutenberg.)

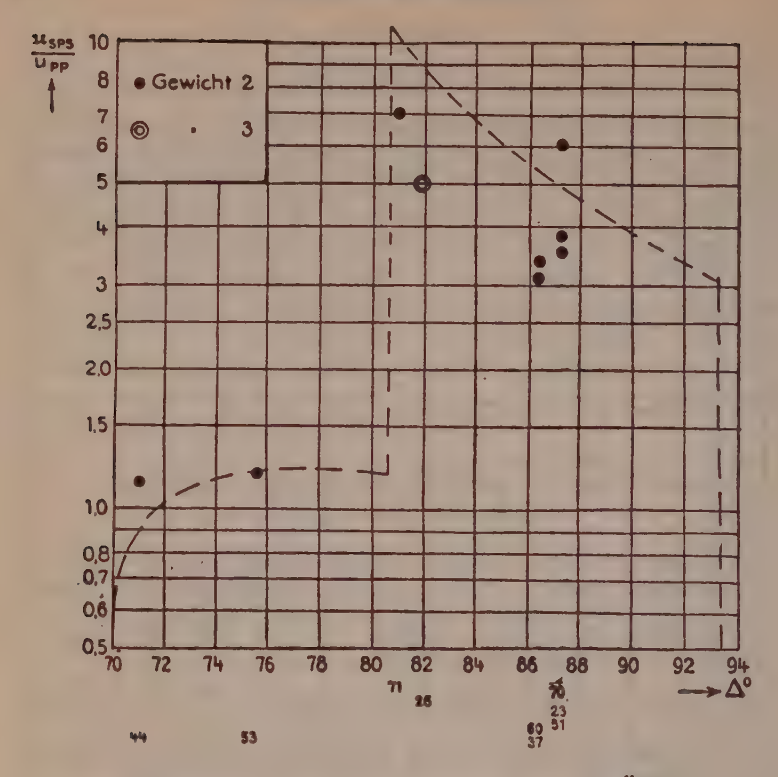
Von den Amplitudenverhältnissen, an denen Transversalwellen beteiligt sind, eignen sich, wie aus Tabelle 4 hervorgeht, zur Beobachtung nur $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ und $\frac{u_S}{u_P}$, beide in beschränkter Distanz, und zwar $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ für $71^\circ < \varDelta < 90^\circ$, $\frac{u_S}{u_P}$ für $63^\circ < \varDelta < 82^\circ$. Das in § 4 angegebene Beobachtungsmaterial wurde dazu verwandt, die Verhältnisse $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ und $\frac{u_S}{u_P}$ für beide Komponenten zu bilden. Es wurde dann aus den zwei so erhaltenen Werten das Mittel genommen, wobei jedoch die beiden Messungen je nach der Genauigkeit, mit der sie in der betr. Komponente ausführbar waren, verschiedenes Gewicht erhielten. Dem Mittel selbst wurde dann ein Gewicht 1, 2, 3 oder 4 beigelegt, wobei 1 das geringste Gewicht bedeutet. Bei der Erteilung des Gewichts für ein Bodenverrückungsverhältnis war maßgebend die Genauigkeit, die der Bodenverrückung im Zähler, derjenigen im Nenner und der in § 10 ermittelten Distanz des Bebens zuzukommen schien. Werte mit Gewicht 1 wurden nicht berücksichtigt. Alle Bodenverrückungen durch SPS erhielten ein geringes Gewicht, da sie Perioden besitzen, die wesentlich über der Eigenperiode des Apparates liegen, so daß die Vergrößerung nicht sehr genau bestimmt werden kann. In Tabelle 10 sind No. und Distanz der benutzten Beben sowie die Bodenverrückungsverhältnisse $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ und $\frac{u_S}{u_P}$ mit den zugehörigen Gewichten ange-

Tabelle 10.

Beobachtete Amplitudenverhältnisse $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$ und $\frac{u_S}{u_P}$.

No.	Δ Megam.	$\left(\frac{SPS}{PP}\right)_E$	$\left(\frac{SPS}{PP}\right)_N$	$\left(\frac{SPS}{PP}\right)_H$	Gewicht	$\left(\frac{S}{P}\right)_E$	$\left(\frac{S}{P}\right)_N$	$\left(\frac{S}{P}\right)_H$	Gewicht
4	8,2	—	—	—	—	1,27	1,22	1,25	2
6	8,2	—	—	—	—	0,72	0,94	0,90	2
7	8,2	—	—	—	—	0,78	0,76	0,77	2
9	9,0	—	—	—	—	3,7	5,7	3,8	3
23	9,7	3,9	3,5	3,8	2	—	—	—	—
24	7,4	—	—	—	—	7,2	8,2	7,8	3
26	9,1	4,7	6,7	5,0	3	6,1	9	7,0	3
37	9,6	3,06	3,2	3,1	2	—	—	—	—
40	7,6	—	—	—	—	1,2	1,5	1,4	2
44	7,9	1,1	1,2	1,15	2	1,0	1,07	1,05	2
46	7,5	—	—	—	—	1,7	—	1,7	3
73	8,4	—	—	—	—	4,35	5,0	4,5	3
74	9,2	—	—	—	—	7,25	8,7	8,0	2
51	9,7	3,0	4,4	3,5	2	—	—	—	—
52	9,0	—	—	—	—	2,9	2,4	2,6	3
53	8,4	1,13	1,23	1,20	2	1,9	1,6	1,7	3
58	8,9	—	—	—	—	8,6	9,15	8,8	4
60	9,5	3,2	3,75	3,4	2	—	—	—	—
70	9,7	6,15	6,0	6,1	2	—	—	—	—
71	9,0	7,6	5,6	7,0	2	3,2	3,0	3,1	4

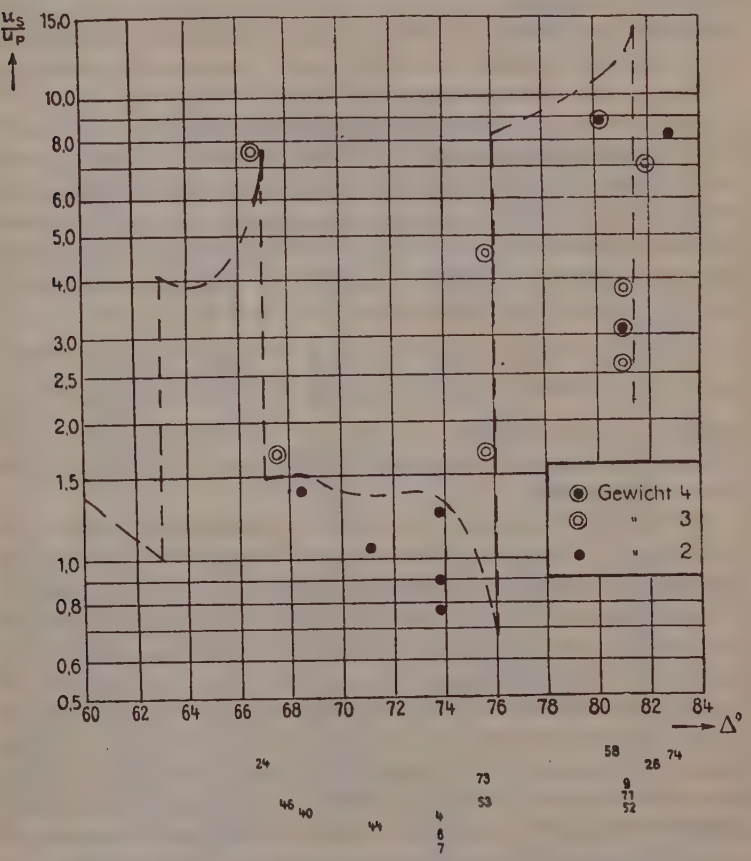
geben. Die Indizes E, N und H bedeuten EW-, NS-, bezw. Horizontalkomponente. Das Datum des Bebens kann aus Tabelle 4 entnommen werden. Die einzelnen Jahre sind durch Zwischenräume getrennt. Die erhaltenen Werte der Bodenverrückungsverhältnisse sind in den Figuren 6 und 7 eingetragen. Die Art der Kennzeichnung der verschiedenen Gewichte ist in den Figuren erklärt. Die am unteren Rande stehenden Ziffern geben die No. des Bebens an, dem der darüberstehende beobachtete Wert angehört. Bei mehreren Beben aus der gleichen Distanz entspricht die oberste Zahl dem Wert mit der größten Ordinate. In beiden Figuren (6 und 7) ist das berechnete Bodenverrückungsverhältnis eingetragen; die gezeichnete Kurve soll also nicht etwa eine Ausgleichung der Beobachtungen sein. Figur 6 gibt die beobachteten Werte von $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}$. Wie in § 6 schon gezeigt wurde, widerspricht ihnen die berechnete Kurve nicht. Bei $\Delta = 68°,7$ beginnt u_{SPS}.



Figur 6. Berechnete Kurve und beobachtete Werte von $\frac{u_{SPS}}{u_{PP}}(\varDelta)$.

Die erste Beobachtung liegt bei $\varDelta = 71^\circ$. Bei $\varDelta = 2 \times 40^\circ{,}3 = 80^\circ{,}6$ muß $u_{PP}(\varDelta)$ nach „Erdbebenwellen V“ einen Sprung haben, der auch durch die Beobachtung bestätigt wird. Einen zweiten Sprung, der aber von S in SPS herrühren würde, gibt die Theorie bei $\varDelta = 93^\circ{,}3$. Die letzten Beobachtungen liegen bei $\varDelta = 87^\circ$ noch vor dem Sprunge; es hat also u_S seine erste Sprungstelle, die bei $\varDelta = 40^\circ{,}3$ angenommen wurde, jedenfalls bei einer Herddistanz von über $38^\circ{,}5$, wie aus Tabelle 8 hervorgeht. Figur 7 gibt die Beobachtungen von $\frac{u_S}{u_P}$. Die ersten beiden Werte bei $\varDelta = 66^1/_2{}^\circ$ und $67^1/_2{}^\circ$ zeigen, daß $u_S(\varDelta)$ bei $\varDelta = 67^\circ$ einen Sprung macht, der wohl dem Sprunge von u_P bei $\varDelta = 63^\circ$ entspricht und von der gleichen Unstetigkeitsfläche im Erdinnern herrührt. Bei $\varDelta = 76^\circ$ besitzt $u_P(\varDelta)$ einen Sprung, der bereits in „Erdbebenwellen V“ festgelegt wurde. Er wird hier bestätigt. Bei $\varDelta = 81^1/_2{}^\circ$ liegt in der Figur ein letzter Sprung, der von $u_S(\varDelta)$ herrühren

muß. Er wird offenbar durch die gleiche Unstetigkeitsfläche verursacht wie der Sprung von $u_P(\varDelta)$ bei $\varDelta = 76^\circ$. Von einer Untersuchung der S-Wellen aus Distanzen über 82° wurde abgesehen, da hinter dem Sprung bei $\varDelta = 81^1/_2{}^\circ$ $\mathfrak{u}_S$ wahrscheinlich klein ist und infolgedessen leicht mit $\mathfrak{u}_{PS}$ und u_{SP} verwechselt werden kann. Außerdem reicht bei größeren Distanzen die Genauigkeit, mit der die Laufzeitfunktion bekannt ist, nicht mehr aus.



Figur 7. Berechnete Kurve und beobachtete Werte von $\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}(\varDelta)$.

§ 8. Sukzessive Approximation der sin i(Δ)-Funktion.

(Von L. Geiger.)

Dieser Paragraph ist das Analogon zu Erdbebenwellen V, § 7. Nachdem die beobachteten Amplitudenfunktionen vorliegen (vergl. § 7), entsteht die Aufgabe, die Annahme 1 über die $\sin i_0(\varDelta)$-

Funktion derart zu variieren, daß sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

1) Die drei kritischen Distanzen müssen festgehalten werden;

2) Die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion muß den Laufzeitbeobachtungen genügen[1];

3) Die auf Grund der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion berechneten Amplitudenfunktionen müssen sich mit den beobachteten Amplitudenfunktionen vertragen.

Das konnte durch sukzessive Approximation in der folgenden Weise erreicht werden:

Zu 1. Die Beobachtungen in Figur 7 zeigen bei $\varDelta = 67°$, $\varDelta = 76°$ und $\varDelta = 81^1/_2°$ je eine Vertikalstelle d. h. eine Stelle, wo die Amplitudenfunktion senkrecht verläuft. Diejenige bei $\varDelta = 76°$ rührt allein von P her, liefert also nichts neues (vergl. Erdbebenwellen V, § 7), dagegen signalisieren die beiden andern Vertikalstellen bei $\varDelta = 67°$ und $\varDelta = 81^1/_2°$ je eine Unstetigkeitsfläche im Erdinnern; diese beiden Unstetigkeitsflächen sind offenbar die gleichen, die in Erdbebenwellen V für $\frac{PP}{P}$ bei $\varDelta = 63°$ und $\varDelta = 76°$ gefunden worden waren (vergl. diese Arbeit § 10). Die früher für $\frac{PP}{P}$ bei $\varDelta = 40°,3$ gefundene Unstetigkeitsstelle ist bei den Transversalwellen leider nicht zu beobachten; sie wurde deshalb von den Longitudinalwellen übernommen.

Zu 2. Die Grundlage aller früheren Rechnungen in den „Erdbebenwellen“ bildet die Wiechert-Zoeppritzsche $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion, die durch graphische Differentiation aus der Laufzeitfunktion hergeleitet ist. Durch Integration der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion muß man also wieder die Laufzeitfunktion erhalten. Diese Probe wurde jetzt unter Benützung der von Wiechert angegebenen Methode der Referenzfunktion folgendermaßen ausgeführt: in Erdbebenwellen V Figur 6 bedeutete die strichpunktierte Kurve die Referenzfunktion = Annahme 1, die gestrichelte Kurve die $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion von Wiechert-Zoeppritz 1906. Die strengen Laufzeiten der Referenzfunktion für S werden erhalten, indem man diejenigen für P (vergl. Erdbebenwellen V B, Tabelle 2) mit $\frac{\mathfrak{V}}{V} = 1{,}789$ multipliziert. Um die Laufzeiten zu erhalten, die der $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion 1906 streng koordiniert sind, genügt es also, den schmalen Streifen zwischen dieser und der Referenzfunktion graphisch jeweilen bis zu der gewünschten Herddistanz zu integrieren und die so ermittel-

1) Erdbebenwellen III.

ten kleinen Zeiten als Korrekturen an den Laufzeiten der Referenzfunktion anzubringen. Die Tabelle 11 enthält in der ersten Spalte Δ in Graden, in der zweiten die Laufzeit $T_{ref.}$ der Referenzfunktion, in der dritten Spalte die Zeitkorrekturen, wie sie die graphische Integration geliefert hat, und in der vierten Spalte die berechnete Laufzeitfunktion $T_{w.z.\,ber.}$, die der Wiechert-Zoeppritzschen $\sin i_0(\Delta)$-Funktion entspricht; in der fünften Spalte steht die von Wiechert-Zoeppritz angenommene Laufzeitfunktion $T_{w.z.\,beob.}$ in ganzen Sekunden, und die letzte Spalte enthält die Differenzen $T_{w.z.\,beob.}-T_{w.z.\,ber.}$

Tabelle 11.

Berechnung der Laufzeitfunktion, die der Wiechert-Zoeppritzschen $\sin i_0(\Delta)$-Funktion koordiniert ist.

Δ^0	T ref. Sek.	Korrektur Sek.	T w.z. ber. Sek.	T w.z. beob. Sek.	T w.z. beob.-T w.z. ber. Sek.
0	0,00	+ 0	0,00	0	0,0
5	137,56	0	137,56	138	+ 0,4
10	269,58	0	269,58	269	— 0,6
15	392,15	0	392,15	391	— 1,2
20	503,59	0	503,59	504	+ 0,4
25	603,82	0	603,82	603	— 0,8
30	693,70	0	693,70	694	+ 0,3
35	774,31	0	774,31	774	— 0,3
40	846,82	0	846,82	847	+ 0,2
45	912,28	0,38	912,66	913	+ 0,3
48	948,56	3,37	951,93	952	+ 0,1
52,9	1005,97	8,70	1014,67	1015	+ 0,3
56,9	1053,27	12,79	1066,06	1064	— 2,1
62,4	1113,40	17,77	1131,17	1132	+ 0,8
67,0	1168,40	21,79	1190,19	1188	— 2,2
71	1213,44	25,19	1238,63	1237	— 1,6
75,2	1259,81	28,62	1288,43	1286	— 2,4
80,2	1313,45	32,55	1346,00	1344	— 2,0
84,7	1360,82	35,95	1396,77	1396	— 0,8
89,9	1412,92	39,70	1452,63	1452	— 0,6
94,7	1459,73	42,94	1502,67	1502	— 0,7

Zeichnet man die in der letzten Spalte stehenden Differenzen $T_{w.z.\,beob.}-T_{w.z.\,ber.}$ auf, so kann man eine gestreckte Kurve so legen, daß die Punkte im allgemeinen nicht mehr als $^1/_2$ Sekunde von der Kurve abliegen; damit ist aber dem Umstande Rechnung getragen, daß die Werte $T_{w.z.\,beob.}$ in Tabelle 11 auf ganze Sekunden angegeben sind. In Figur 9 bedeutet die strichpunktierte 0-Axe die Laufzeitfunktion $T_{w.z.\,ber.}$, also diejenige Laufzeit-

funktion, die der Wiechert-Zoeppritzschen Sinusfunktion streng entspricht und aus ihr durch Integration hergeleitet ist. Die gestrichelte Kurve entspricht der Laufzeitfunktion T w.z. beob.; man sieht, daß die Kurve höchstens 2 Sekunden von der Laufzeitfunktion T w.z. ber. abweicht.

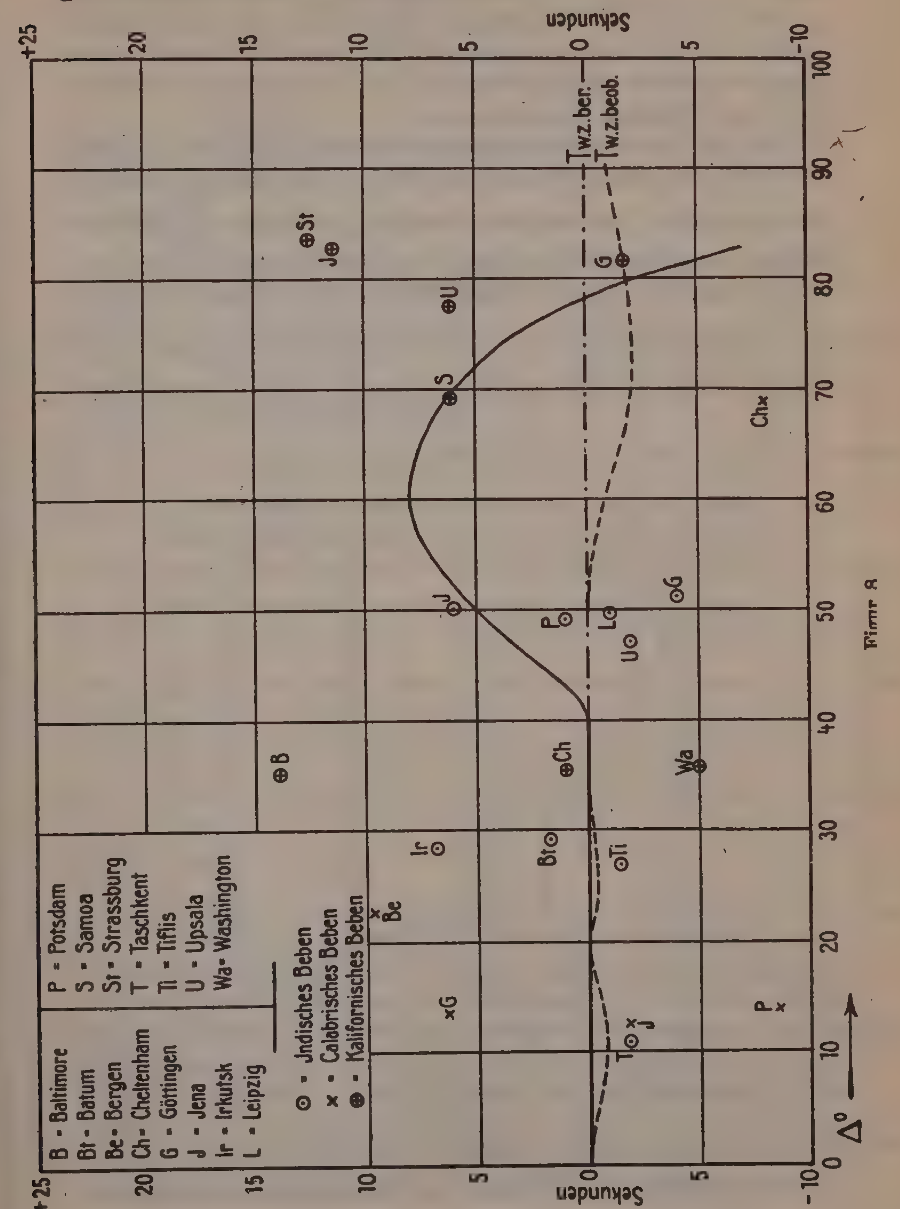
Tabelle 12.

Umrechnung der von Wiechert-Zoeppritz beobachteten Laufzeiten T* der 2. Vorläufer.

Station	Δ km	Δ Grad	T* Sek.	T w.z. beob. Sek.	T*-T w.z. beob. Sek.
Indisches Beben 1905 April 4: $\varphi_0 = 32^0\,18'$ N; $\lambda_0 = 76^0\,24'$ E Gr.; $t_0 = 0^h\,49^m\,41^s$ Gr.					
Taschkent	1185	10,7	285	286	− 1
Tiflis	2980	26,8	636	637	− 1
Irkutsk	3160	28,4	673	666	+ 7
Batum	3230	29,1	681	679	+ 2
Upsala	5230	47,1	938	940	− 2
Potsdam	5460	49,1	967	966	+ 1
Leipzig	5510	49,6	972	973	− 1
Jena	5570	50,1	985	979	+ 6
Göttingen	5680	51,1	987	991	− 4
Calabrisches Beben 1905 September 8: $\varphi_0 = 38^0\,50'$ N; $\lambda_0 = 16^0\,16'$ E Gr.; $t_0 = 1^h\,43^m\,5^s$ Gr.					
Jena	1390	12,5	331	332	− 1
Göttingen	1490	13,4	361	354	+ 7
Potsdam	1530	13,8	355	363	− 8
Upsala	2340	21,1	519	527	− 8
Bergen	2500	22,5	565	555	+ 10
Cheltenham	7660	68,9	1206	1212	− 6
San Franzisko-Beben 1906 September 18: $\varphi_0 = 37^0\,35'$ N; $\lambda_0 = 122^0\,26'$ W Gr.; $t_0 = 13^h\,12^m\,1^s$ Gr.					
Baltimore	3910	35,2	791	777	+ 14
Cheltenham	3940	35,5	783	782	+ 1
Washington	3960	35,6	779	784	− 5
Samoa	7680	69,1	1223	1215	+ 8
Upsala	8610	77,5	1320	1312	+ 8
Göttingen	9070	81,6	1361	1361	0
Jena	9200	82,8	1388	1375	+ 13
Straßburg	9280	83,5	1397	1383	+ 14

Um beurteilen zu können, wie weit die gestrichelte Kurve die Einzelbeobachtungen T* darzustellen vermag, sind alle von Wiechert-Zoeppritz berücksichtigten T* (vergl. Erdbeben-

wellen II) auf Grund der in Tabelle 12 gegebenen Rechnung in Figur 8 eingetragen, wobei die Werte T*-T w.z. beob. gegen die gestrichelte Kurve zu rechnen sind.

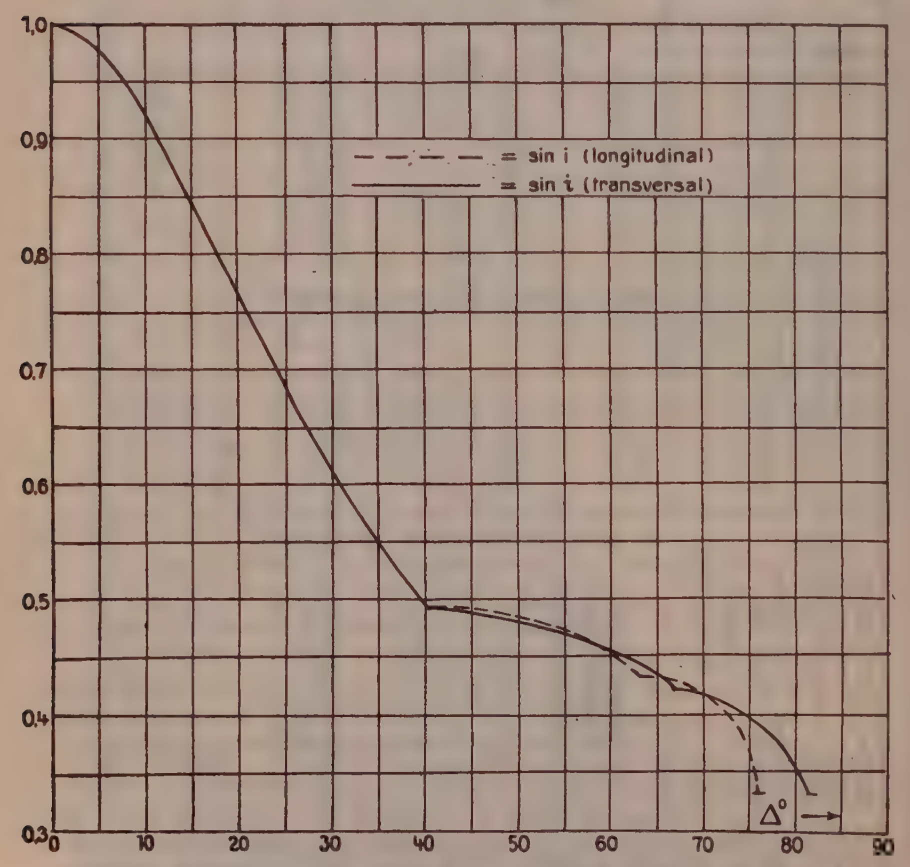


Figur 8.

Man sieht in dieser Darstellung sehr deutlich, daß die Streuung selbst recht zuverlässiger Stationen bis zu 14 Sekunden beträgt.

Zu 3. Genau in der gleichen Weise, wie dies in Erdbebenwellen V, S. 190 ff. auseinandergesetzt ist, wurde durch sukzessive Approximation der $\sin \mathrm{i}_0(\varDelta)$-Funktion den beobachteten Amplitudenfunktionen Rechnung getragen.

$\mathrm{Sin}\, \mathrm{i}_0(\varDelta)$ wurde folgendermaßen festgelegt: für $0° < \varDelta < 40°{,}3$ wurde $\sin \mathrm{i}_0(\varDelta)$ gleich $\sin i_0(\varDelta)$ gesetzt; damit vertragen sich die von Zoeppritz beobachteten Laufzeiten und auch $\frac{\mathrm{SPS}}{\mathrm{PP}}(\varDelta)$ gut. $\mathrm{Sin}\, \mathrm{i}_0(\varDelta) = \sin i_0(\varDelta)$ heißt aber, daß P und S gleiche Wege erhalten, sodaß die $\sin \mathrm{i}_0(\varDelta)$-Kurve in der gleichen Distanz wie $\sin i_0$,



Figur 9. Sinusfunktion beider Vorläufer nach Annahme „Geiger-Gutenberg 1911“.

nämlich 40°,3 einen Knick besitzen muß. Weil S und PS zwischen $\varDelta = 40°,3$ und 65° fast die gleiche Laufzeit besitzen, ist $\sin i_0 (40°,3 < \varDelta < 67°)$ recht schwer zugänglich. $\frac{S}{P}(\varDelta)$ liefert nur

$$\left(\frac{\partial \sin i_0}{\partial \varDelta}\right)_{\varDelta = 65°};$$

bei der Konstruktion des Verlaufes von $\sin i_0 (40°,3 < \varDelta < 67°)$ mußte ein Kompromiß zwischen dem Habitus von $\sin i_0$ und der beobachteten Laufzeit von S geschlossen werden. $\sin i_0 (67° < \varDelta < 82°)$ folgt sowohl aus $\frac{S}{P}(\varDelta)$ als auch aus den Laufzeiten für S.

Die der neuen $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion entsprechende Laufzeitfunktion $T_{G.\,G.\,ber.}$ wurde ebenso auf die Referenzfunktion aufgebaut, wie dies in diesem Paragraphen ausführlich für die Wiechert-Zoeppritz-Funktion 1906 $T_{w.z.\,ber.}$ beschrieben ist. Die ausgezogene Kurve in Figur 8 zeigt den Verlauf dieser Funktion, Tabelle 13 gibt ihre Zahlenwerte:

Tabelle 13.

$T_{G.\,G.\,ber.} - T_{w.z.\,ber.}$ für die 2. Vorläufer.

$\varDelta^0$	$T_{G.\,G.\,ber.} - T_{w.z.\,ber.}$ Sek.	$\varDelta^0$	$T_{G.\,G.\,ber.} - T_{w.z.\,ber.}$ Sek.
0	0,00	56	+ 7,26
5	0,00	60	+ 7,97
10	0,00	64	+ 7,93
15	0,00	67	+ 7,18
20	0,00		
25	0,00	68	+ 6,77
30	0,00	72	+ 4,97
35	0,00	76	+ 2,42
40	0,00	80	− 2,15
40,3	0,00	81½	− 4,81
43,2	+ 1,04	84	− 9,72
48	+ 4,02	88	− 16,73
52	+ 5,90		

An Hand der Figuren 6, 7 und 8 erkennt man, daß die angenommene $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion den Bedingungen 1, 2, 3 hinreichend genügt: Bedingung 1 ist streng erfüllt. Der Bedingung 2 wird nicht widersprochen, mehr kann bei der starken Streuung der Beobachtungen nicht behauptet werden. Es sei jedoch ausdrücklich bemerkt, daß die neue Laufzeitfunktion nicht eine Ausgleichung der Beobachtungen sein soll, sondern Figur 8 soll zeigen, daß die beobachteten Laufzeiten der auf ganz anderem Wege gewonnenen

neuen Funktion nicht widersprechen. Bedingung 3 wird gut befriedigt, wie Figur 7 zeigt.

Ich halte es also für berechtigt, die Wiechert-Zoeppritz-Funktion 1906 durch eine verbesserte zu ersetzen, und lasse deshalb in Tabelle 14 die Werte der Sinus- und Laufzeitfunktion der 2. Vorläufer folgen; Figur 9 zeigt die neuen Sinusfunktionen beider Vorläufer.

Tabelle 14.

Neue Annahme über $\sin i_0$ und die Laufzeit der 2. Vorläufer.

Δ^0	$\sin i_0$	TG. G. ber. Sek.	Δ^0	$\sin i_0$	TG. G. ber. Sek.
0	1,0000	0	68	0,4220	1210
5	0,9787	138	70	0,4185	1233
10	0,9220	270	72	0,4115	1256
15	0,8454	392	74	0,4030	1278
20	0,7633	504	76	0,3895	1300
25	0,6848	604	78	0,3770	1321
30	0,6138	694	80	0,3570	1342
35	0,5517	774	81½	0,3335	1357
40,3	0,4942	851			
			84	0,3320	1380
44	0,4900	902			
48	0,4835	956			
52	0,4745	1009			
56	0,4645	1061			
60	0,4535	1112			
64	0,4405	1161			
67	0,4240	1197			

§ 9. Berechnung und Diskussion der Amplitudenfunktion $\frac{S}{P}$ unter Annahme 4 (Tabelle 14) für $\sin i(\Delta)$.

(Von B. Gutenberg.)

Auf Grund der letzten im vorigen Paragraphen gemachten Annahme über die $\sin i(\Delta)$-Funktion wurde $\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}(\Delta)$ berechnet. Es geschah dies analog wie in § 6 der vorliegenden Arbeit und in § 5 der „Erdbebenwellen V“ angegeben ist. Es war

$$\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P} = c_2 \cdot \frac{\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)_S^{(1)}}{\left(\frac{u}{A_i}\right)_P^{(1)}} \cdot \sqrt{\frac{\cos i_P^{(1)}}{\cos i_S^{(1)}}} \cdot \sqrt{\frac{\delta_P^{(1)}}{\delta_S^{(1)}}}, \tag{14}$$

wo $c_2 = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k} \cdot \frac{T_S}{T_P}$.

Für die Rechnung wurde $c_s = 1$ gesetzt. Bei gegebenem Δ liefern die $\sin \mathfrak{i}(\Delta)$- und $\sin i(\Delta)$-Funktionen $\mathfrak{i}_S$ bezw. i_P. Die Kurven für $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)_S$ als Funktion von $\mathfrak{i}_S$, $\left(\frac{u}{A_i}\right)_P$ als Funktion von i_P, und δ_P als Funktion von i_P lagen von den Berechnungen in § 3 und in § 6 vor; $\delta_S(\mathfrak{i}_S)$ kommt neu hinzu. Es wurde ganz analog wie $\delta_P(i_P)$ unter Benutzung der Bedingung (1) berechnet, und dann wurden die einzelnen Werte, wie in § 6 angegeben ist, mit $0{,}01\,N$ multipliziert, sodaß die für $\delta_S(\mathfrak{i}_S)$ gezeichnete Kurve etwa einem Werte von $\frac{1}{2N} = 0{,}005$ entspricht. Tabelle 15 gibt die wichtigsten bei

Tabelle 15.

Berechnung von $\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}(\Delta)$ für $c_s = 1$ unter Annahme 4 (Tabelle 14) für $\sin \mathfrak{i}(\Delta)$.
$1:2N = 0{,}005$.

Δ^0	i_P	$\mathfrak{i}_S$	δ_P	δ_S	$\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{A}_i}\right)_S$	$\left(\frac{u}{A_i}\right)_P$	$\frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}$
34,33°	33° 59′	° ′ $= i_P$	° $= \delta_S$	° $= \delta_P$	4,421	1,200	3,68
36,00	32 40				2,222	1,162	1,92
40,30↑↑	29 35				1,839	1,070	1,72
40,30↓↓	29 35	29 35	150	20	1,839	1,070	4,7
44,00	29 31	29 20	29,5	13	1,830	1,069	2,5
52,00	28 49	28 20	9,0	8,0	1,804	1,047	1,83
60,00	27 0	26 58	3,82	6,5	1,791	0,991	1,38
63,00↑	25 40	26 20	1,78	6,4	1,789	0,946	1,00
63,00↓	25 40	26 20	33,3	6,4	1,789	0,946	4,3
65,00	25 36	25 54	23,7	5,6	1,789	0,944	3,9
67,00↑	25 24	25 7	10,1	0,63	1,791	0,938	7,7
67,00↓	25 24	25 7	10,1	16,3	1,791	0,938	1,51
68,66	25 5	24 54	5,3	8,8	1,792	0,929	1,50
71,18	24 15	24 28	3,3	7,1	1,795	0,900	1,36
73,74	22 53	23 48	2,06	4,8	1,600	0,853	1,38
76,00↑	19 28	23 5	0,30	3,8	1,807	0,733	0,69
76,00↓	19 28	23 5	41,7	3,8	1,807	0,733	8,2
78,00	19 23	22 11	41,7	2,9	1,817	0,732	9,4
80,60	19 16	20 24	45,0	1,8	1,839	0,728	12,5
81,50↑	19 14	19 28	47,5	1,5	1,850	0,727	14,4

(↑ bedeutet $\lim \frac{\mathfrak{u}_S}{u_P}$ bei wachsendem, ↓ bei abnehmendem Δ.)

der Rechnung vorkommenden Größen. Die Rechnung selbst nach (14) wurde wie alle Amplitudenrechnungen der vorliegenden Arbeit mit einem Rechenschieber ausgeführt; die $\cos i_S$ und $\cos i_P$ wurden den „fünfstelligen Tafeln für Maschinenrechnen von Dr. F. G. Gauß" entnommen. Die Kurve für $\frac{u_S}{u_P}(\varDelta)$ ist in Figur 7 eingetragen. Sie widerspricht den Beobachtungen nirgends. Die Abweichungen bei Herddistanzen zwischen 70° und 76° rühren wahrscheinlich von u_P her, denn die Kurve für $\frac{u_{PP}}{u_P}(\varDelta)$ (Erdbebenwellen V) zeigte an der gleichen Stelle Abweichungen im gleichen Sinne.

Ein Hauptergebnis der Figur 7 ist die Tatsache, daß die Beobachtungen zwischen 67° und 80° durch S keine Streuung haben. Es bestätigt dies unsre Annahme in § 3, daß bei jedem Beben das Verhältnis $\left(\frac{k}{\mathfrak{k}}\right)^2$ der longitudinal und transversal ausgestrahlten Energie nahezu dasselbe ist. Nun könnte man allerdings sagen, daß die Sprünge zwischen dem ersten und zweiten Punkt sowie vor den drei tiefen Punkten bei $\varDelta > 80°$ derartige Streuungen sein könnten. Dies ist aber deswegen unwahrscheinlich, weil einerseits die in der Mitte liegenden neun Punkte keine Streuung aufweisen, andererseits doch zwei Sprünge durch S auftreten müssen, die nicht allzuweit von den Sprüngen durch P liegen können, da sonst Widersprüche mit den Laufzeitbeobachtungen sich ergeben. Das konstante Verhältnis der Amplituden longitudinaler und transversaler Wellen in der Nähe des Herdes läßt sich berechnen, wenn man Annahmen über das Verhältnis a der Absorption bei longitudinalen durch die Absorption bei transversalen Erdbebenwellen macht. Sei a = konstant, so ist nach Figur 7:

$$(34) \qquad \frac{1}{a} c_1 = 1, \qquad a = c_2 = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k} \cdot \frac{T_S}{T_P}.$$

Nach (7) ist auf der Elementarzone z, also nahe am Herde:

$$(35) \qquad \frac{\mathfrak{A}_S^{(z)}}{A_P^{(z)}} = \frac{\mathfrak{c}}{c} \cdot \frac{T_S}{T_P} \cdot \frac{\mathfrak{k}}{k},$$

also nach (34)

$$(36) \qquad \frac{\mathfrak{A}_S^{(z)}}{A_P^{(z)}} = a.$$

Nimmt man für transversale und longitudinale Erdbebenwellen

gleiche Absorption an ($a = 1$), so besitzen die beiden Wellenarten in der Nähe des Herdes gleiche Amplituden[1]).

§ 10. Berechnung der Scheiteltiefen und Scheitelgeschwindigkeiten der S-Wellen. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern.

(Von L. Geiger.)

Nachdem in § 8 die neue $\sin i_0(\varDelta)$-Funktion aufgestellt ist, kann für einzelne Strahlen die Scheiteltiefe und die Scheitelgeschwindigkeit berechnet werden. Dabei wird der tiefste Punkt eines Strahles „Scheitel" genannt, sein Abstand von der Erdoberfläche resp. dem Erdmittelpunkt „Scheiteltiefe" S, $\mathfrak{S}$ resp. „Scheitelradius" r, $\mathfrak{r}$, die Geschwindigkeit im Scheitel „Scheitelgeschwindigkeit" V_S, $\mathfrak{B}_S$.

1) Die Berechnung der Scheiteltiefe $\mathfrak{S}$ erfolgte nach der von Wiechert ausgebildeten Methode mittels des Herglotzschen Satzes[2]), wie dies in Erdbebenwellen V, § 9 ausgeführt ist. Figur 10 zeigt $q(\varDelta)$ für die Strahlen mit $\varDelta = 10°$; $20°$; $30°$; $40°,3$; $50°$; $60°$; $67°$; $73°$; $77°$; $81°,5$;

2) Die Berechnung der Scheitelgeschwindigkeit $\mathfrak{B}_S$ erfolgte nach der Gleichung

$$\mathfrak{B}_S = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{r}_0} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{\sin i_0},$$

oder

$$\mathfrak{B}_S = 0{,}000\,629\,82 \cdot \frac{\mathfrak{r}}{\sin i_0}. \tag{37}$$

3) Die Berechnung der Poissonschen Konstanten μ erfolgte nach der Gleichung

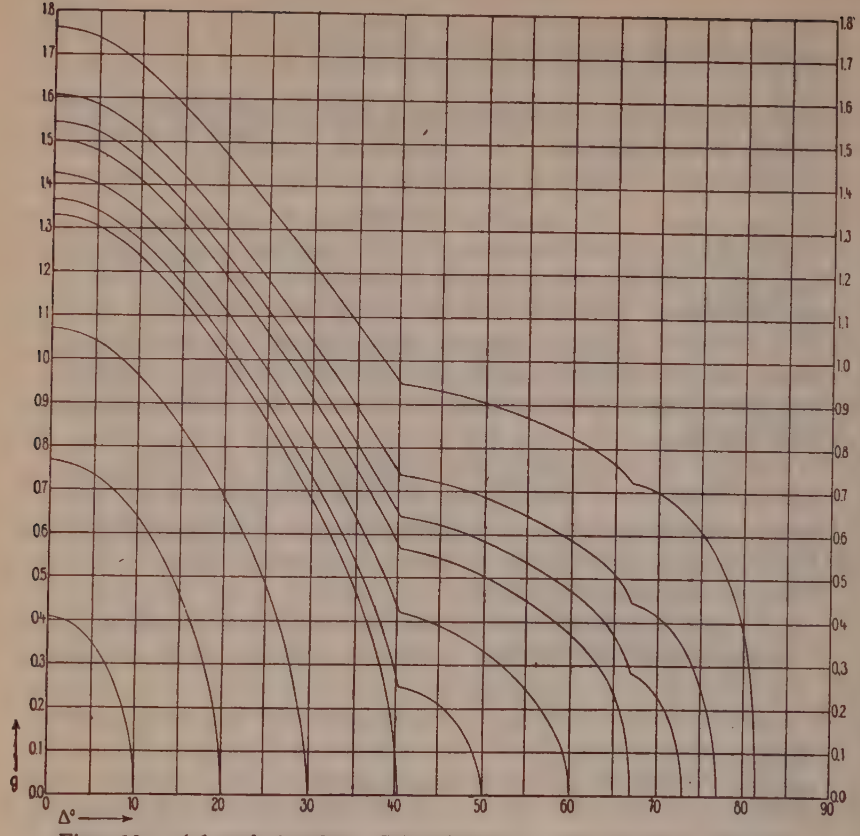
$$\mu = \frac{V^2 - 2\mathfrak{B}^2}{2(V^2 - \mathfrak{B}^2)}. \tag{38}$$

Tabelle 16 gibt die resultierenden Scheiteltiefen $\mathfrak{S}$ und die Scheitelgeschwindigkeiten $\mathfrak{B}_S$, und zwar in der ersten Spalte die Herddistanzen $\varDelta$ in Graden, in der zweiten die Integralwerte, in der dritten die Scheitelradien $\mathfrak{r}$, in der vierten die Scheiteltiefen $\mathfrak{S}$ und die letzte Spalte gibt die Scheitelgeschwindigkeit $\mathfrak{B}_S$.

---

1) Das entspricht genau der Wiechertschen Hypothese von der gleichzeitigen Auslösung der P- und der S-Wellen durch die Brüche der Erdrinde am Herd.

2) E. Wiechert und L. Geiger, Physikalische Zeitschrift. 11, S. 294—311, 1910.



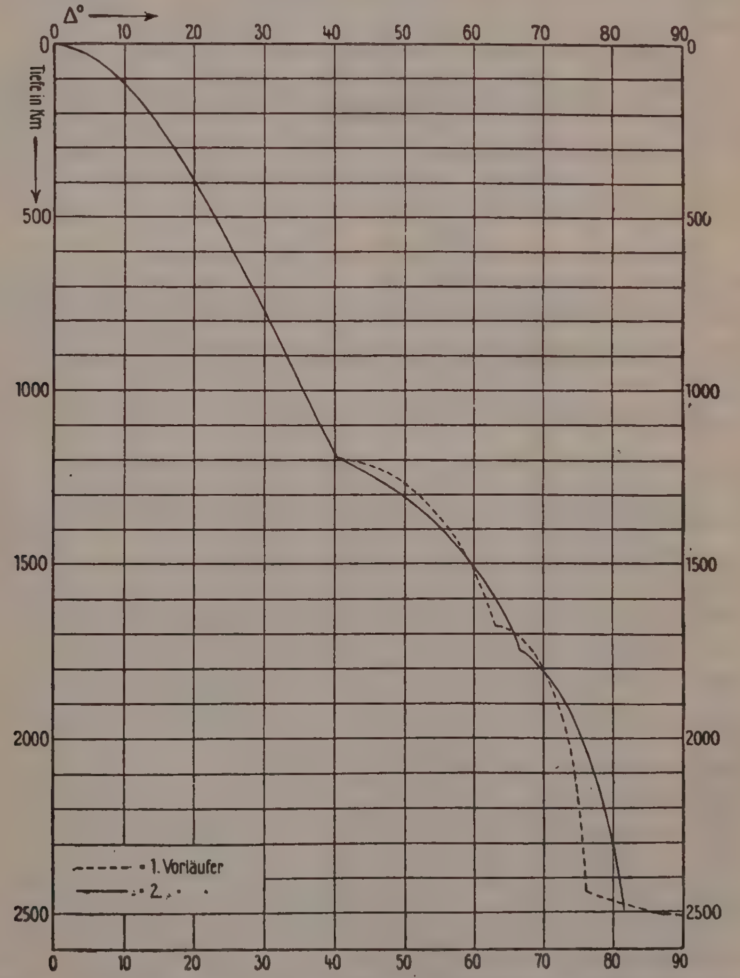
Figur 10. $q(\Delta)$ nach Annahme „Geiger-Gutenberg 1911" für die 2. Vorläufer.

Tabelle 16.
Scheiteltiefe 𝔖 und Scheitelgeschwindigkeit $\mathfrak{V}_s$ der 2. Vorläufer.

Δ^0	$\int$	r km	𝔖 km	$\mathfrak{V}_s$ km/Sek.
0	—	6367	0	4,010
10	—	6256	111	4,27
20	—	5971	396	4,93
30	—	5597	770	5,74
40,3	—	5173	1194	6,59
50	41,170	5065	1302	6,66
60	48,552	4862	1505	6,75
67	57,716	4620	1747	6,86
73	63,548	4473	1894	6,91
77	71,432	4281	2086	7,00
81,5	89,356	3876	2491	7,32

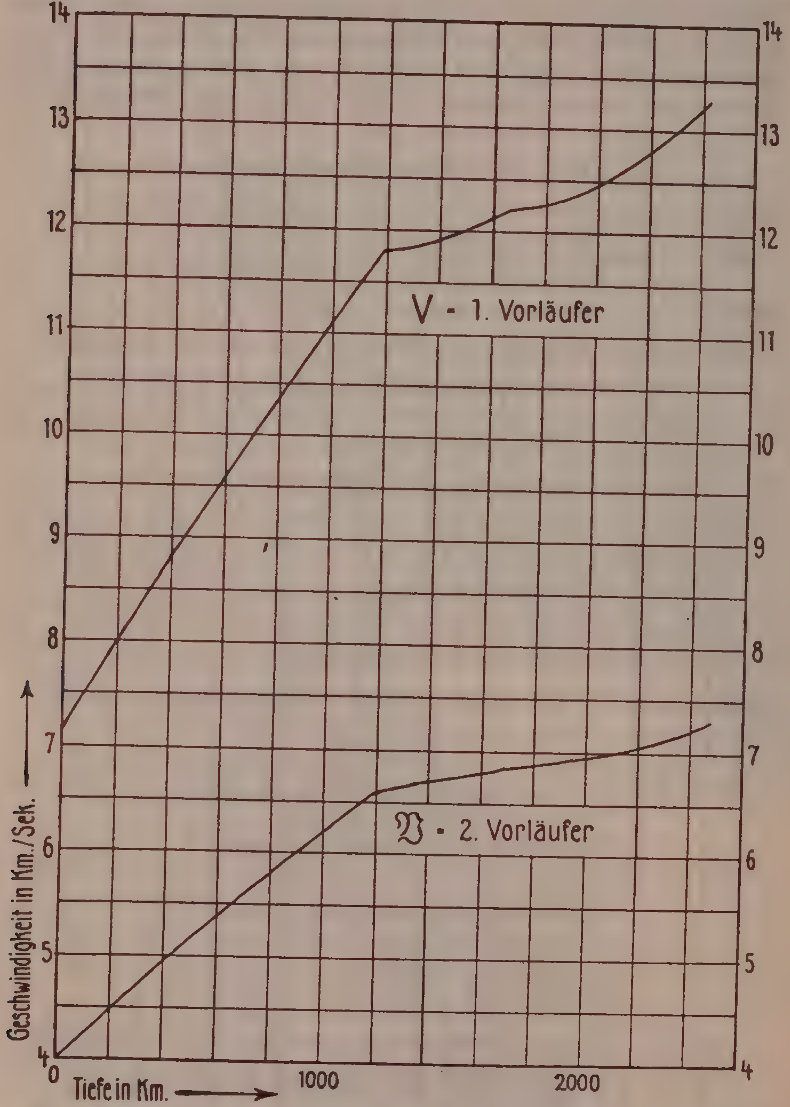
Figur 11 zeigt die Scheiteltiefen S und $\mathfrak{S}$ als Funktionen der Herddistanz $\varDelta$, Figur 12 die Geschwindigkeiten V und $\mathfrak{V}$ als Funktionen der Tiefe.

Aus den in § 8 auseinandergesetzten Gründen konnte die erste Unstetigkeitsfläche nicht aus S gefunden werden, sondern wurde mit 1193 ± 50 km Tiefe von P übernommen. Die zweite resp. dritte Unstetigkeitsfläche liegt in 1747 ± 100 resp. 2491 ± 150 km Tiefe, während die Longitudinalwellen 1677 ± 100 resp. 2435 ± 150 km



Figur 11. Scheiteltiefe S der 1. und $\mathfrak{S}$ der 2. Vorläufer als Funktion der Herddistanz $\varDelta$.

Tiefe geliefert hatten. Die Differenz ist also nur 70 km = 4 % resp. 56 km = $2^1/_4$ %. Als wahrscheinlichste Tiefenwerte der drei Unstetigkeitsflächen wurden die Werte 1193 ± 50, 1712 ± 100 und 2454 ± 100 km angenommen.



Figur 12. Geschwindigkeit V der 1. und 𝔙 der 2. Vorläufer als Funktion der Tiefe.

In den drei Unstetigkeitsflächen erhält man als Poissonsche Konstante μ die Werte

Tiefe in km	1193	1712	2454
μ	0,273	0,270	0,282

§ 11. Berechnung der wichtigsten Laufzeitfunktionen. Neubestimmung der Herddistanzen der benutzten Beben.

(Von B. Gutenberg.)

In § 7 der „Erdbebenwellen V“ und in § 8 der vorliegenden Arbeit sind die neuen Laufzeiten der P- bezw. S-Wellen für eine Reihe von Herddistanzen von L. Geiger berechnet. Die dort erhaltenen Werte wurden in großem Maßstabe aufgetragen, und graphisch ausgeglichen. Dann wurden die Laufzeiten für P, PP, PPP, S, SS und SSS für ganzzahlige Δ^0 abgelesen.

$$(T_{PP})_{\Delta} = 2(T_P)_{\frac{\Delta}{2}}, \quad (T_{PPP})_{\Delta} = 3(T_P)_{\frac{\Delta}{3}};$$

analoges gilt für SS und SSS. In Tabelle 17 sind T_P sowie die Differenzen der übrigen erhaltenen Werte gegen T_P eingetragen. Tabelle 18 gibt die Laufzeitdifferenzen von $T_{PS} = T_{SP}$ und von $T_{PPS} = T_{PSP} = T_{SPP}$ gegen T_S. Es ist $(T_{PS})_{\Delta} = (T_P)_{\Delta i} + (T_S)_{\Delta\mathfrak{i}}$, wo $\sin i = \frac{V}{\mathfrak{V}} \sin \mathfrak{i} = 1{,}789 \sin \mathfrak{i}$ und $\Delta = \Delta i + \Delta\mathfrak{i}$ ist. Analoges gilt für die Berechnung von $T_{SPS} = T_{SSP} = T_{PSS}$ und von T_{PSPS}, deren Differenzen gegen T_{SS} in Tabelle 19 eingetragen sind. In allen Tabellen sind noch die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Werte angegeben, damit einerseits die Interpolation erleichtert wird, andererseits eine gewisse Kontrolle für die Richtigkeit der Ablesung vorhanden ist. Die Distanzen, bei denen eine Welle eine Unstetigkeitsfläche im Erdinnern streift, heben sich in der Laufzeitkurve durch eine schwache Aenderung der Richtung hervor.

Aus Tabelle 18 ersieht man, daß erst bei Herddistanzen von über 63° die PS-Welle mehr als 24 Sek. hinter der S-Welle kommt, d. h. daß erst von da zwei S-Wellen zu beobachten sind, falls deren Periode 12 Sek. beträgt. Bei Herddistanzen unter 47° kann überhaupt keine S-Welle richtig zur Ausbildung kommen, da sich dann die PS-Welle schon über die erste S-Welle lagert. Analog zeigt Tabelle 19, wie kurz hintereinander die Wellen SS, die Gruppe PSS und die Gruppe PPSS kommen. Noch bei Herddistanzen von 90° folgt SPS, die stärkste dieser Wellen, 13 Sek. nach SS, und PSPS, die stärkste ihrer Gruppe, 8 Sek. nach SPS.

Tabelle 17.

Laufzeiten von Vorläufern, die auf ihrer Bahn ihre Schwingungsart nicht geändert haben.

Δ^0	T_P Sek.	Diff. Sek.	$T_{PP}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{PPP}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	T_S-T_P Sek.	Diff. Sek.	$T_{SS}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{SSS}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.
1	16	16	0	0	0	0	13	13	13	13	13	13
2	31	15	0	0	0	0	25	12	25	12	25	12
3	46	15	0	0	0	0	38	13	38	13	38	13
4	61	15	0	0	1	1	50	12	50	12	50	12
5	77	16	0	0	1	0	61	11	62	12	62	12
6	92	15	1	1	1	0	73	12	75	13	75	13
7	107	15	1	0	1	0	85	12	88	13	88	13
8	122	15	1	0	2	1	96	11	100	12	101	13
9	136	14	1	0	2	0	108	12	113	13	114	13
10	151	15	1	0	2	0	119	11	126	13	127	13
11	165	14	2	1	3	1	130	11	138	12	140	13
12	179	14	3	1	5	2	141	11	151	13	154	14
13	192	13	5	2	7	2	152	11	164	13	168	14
14	206	14	7	2	9	2	162	10	177	13	181	13
15	219	13	9	2	11	2	173	11	191	14	195	14
16	232	13	11	2	13	2	183	10	204	13	209	14
17	244	12	13	2	16	3	193	10	218	14	224	15
18	257	13	15	2	19	3	203	10	231	13	238	14
19	269	12	17	2	22	3	213	10	245	14	253	15
20	281	12	20	3	25	3	223	10	259	14	267	14
21	293	12	22	2	28	3	232	9	273	14	282	15
22	304	11	25	3	32	4	241	9	287	14	297	15
23	316	12	27	2	35	3	249	8	300	13	312	15
24	327	11	30	3	39	4	258	9	314	14	327	15
25	338	11	33	3	43	4	266	8	328	14	342	15
26	348	10	36	3	47	4	275	9	341	13	358	16
27	358	10	40	4	51	4	283	8	355	14	373	15
28	369	11	43	3	55	4	290	7	369	14	389	16
29	379	10	46	3	59	4	298	8	382	13	405	16
30	388	9	49	3	64	5	306	8	396	14	421	16
31	397	9	53	4	69	5	313	7	410	14	437	16
32	406	9	57	4	74	5	320	7	423	13	453	16
33	415	9	60	3	79	5	328	8	437	14	469	16
34	424	9	64	4	84	5	335	7	451	14	485	16
35	433	9	68	4	90	6	341	6	464	13	501	16
36	442	9	72	4	95	5	348	7	478	14	517	16
37	450	8	76	4	100	5	355	7	492	14	533	16
38	458	8	80	4	106	6	361	6	506	14	549	16
39	466	8	84	4	111	5	367	6	519	13	565	16
40	473	7	88	4	117	6	373	6	533	14	581	16
41	481	8	91	3	122	5	379	6	546	13	597	16
42	489	8	95	4	128	6	385	6	560	14	614	17
43	497	8	99	4	134	6	391	6	573	13	630	16
44	504	7	104	5	140	6	397	6	586	13	646	16
45	512	8	108	4	145	5	403	6	598	12	662	16
		7		4		6		7		13		16

Δ^0	T_P Sek.	Diff. Sek.	$T_{PP}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{PPP}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	T_S-T_P Sek.	Diff. Sek.	$T_{SS}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{SSS}-T_P$ Sek.	Diff. Sek.
46	519		112		151		410		611		678	
		8		4		5		6		12		16
47	527		116		156		416		623		694	
		7		4		6		6		13		16
48	534		120		162		422		636		710	
		8		4		5		5		12		15
49	542		124		167		427		648		725	
		7		3		5		6		11		16
50	549		127		172		433		659		741	
		8		3		5		5		11		15
51	557		130		177		438		670		756	
		7		3		5		6		11		15
52	564		133		182		444		681		771	
		8		2		5		5		10		14
53	572		135		187		449		691		785	
		7		3		5		6		11		15
54	579		138		192		455		702		800	
		8		2		4		5		11		15
55	587		140		196		460		713		815	
		7		3		5		6		11		14
56	594		143		201		466		724		829	
		7		3		5		6		10		15
57	601		146		206		472		734		844	
		7		3		5		6		11		15
58	608		149		211		478		745		859	
		7		3		5		6		10		14
59	615		152		216		484		755		873	
		7		2		5		6		10		15
60	622		154		221		490		765		888	
		7		3		5		5		10		14
61	629		157		226		495		775		902	
		7		2		5		6		10		15
62	636		159		231		501		785		917	
		7		2		5		5		9		14
63	643		161		236		506		794		931	
		6		3		5		6		10		14
64	649		164		241		512		804		945	
		7		2		5		5		9		14
65	656		166		246		517		813		969	
		7		2		4		5		9		13
66	663		168		250		522		822		972	
		6		3		5		5		10		14
67	669		171		255		527		832		986	
		7		2		5		6		9		13
68	676		173		260		533		841		999	
		7		2		5		5		9		13
69	683		175		265		538		850		1012	
		6		3		5		5		10		13
70	689		178		270		543		860		1025	
		7		2		5		5		9		13
71	696		180		275		548		869		1038	
		6		2		5		5		9		13
72	702		182		280		553		878		1051	
		6		2		5		5		9		13
73	708		184		285		558		887		1064	
		6		2		5		5		8		14
74	714		186		290		563		895		1078	
		6		2		4		5		9		13
75	720		188		294		568		904		1091	
		6		2		5		5		8		13
76	726		190		299		573		912		1104	
		5		3		5		6		8		14
77	731		193		304		579		920		1118	
		5		3		4		6		8		14
78	736		196		308		585		928		1132	
		5		2		5		6		9		14
79	741		198		313		591		937		1146	
		4		3		6		6		10		14
80	745		201		319		597		847		1160	
		5		3		5		5		9		13
81	750		204		324		602		956		1173	
		5		3		6		6		9		14
82	755		207		330		608		965		1187	

Es wurde davon Abstand genommen, alle Laufzeiten in der vorliegenden Arbeit graphisch mitzuteilen. Nur die Differenzen $T_{PP}-T_P$, T_S-T_P und $T_{PS}-T_P$, die am leichtesten der Beobachtung zugänglich sind, sind für Herddistanzen zwischen 39° und 82° in Figur 17 gezeichnet. Die schraffierten Teile sind den Bodenverrückungen proportional und geben direkt einen Ueberblick über die relative Größe der Amplituden von P, PP und S; sie wurden bei P von der Laufzeit aus nach oben, bei PP und S nach unten

Tabelle 18.

Laufzeiten von Wechselwellen, die einmal transversal gelaufen sind.

Δ^0	$T_{PS} - T_S$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{PSP} - T_S$ Sek.	Diff. Sek.
34	0		0	
		1		1
36	1		1	
		1		1
38	2		2	
		2		2
40	4		4	
		2		3
42	6		7	
		2		3
44	8		10	
		2		3
46	10		13	
		2		3
48	12		16	
		2		3
50	14		19	
		1		2
52	15		21	
		1		3
54	16		24	
		2		2
56	18		26	
		1		3
58	19		29	
		1		3
60	20		32	
		2		3

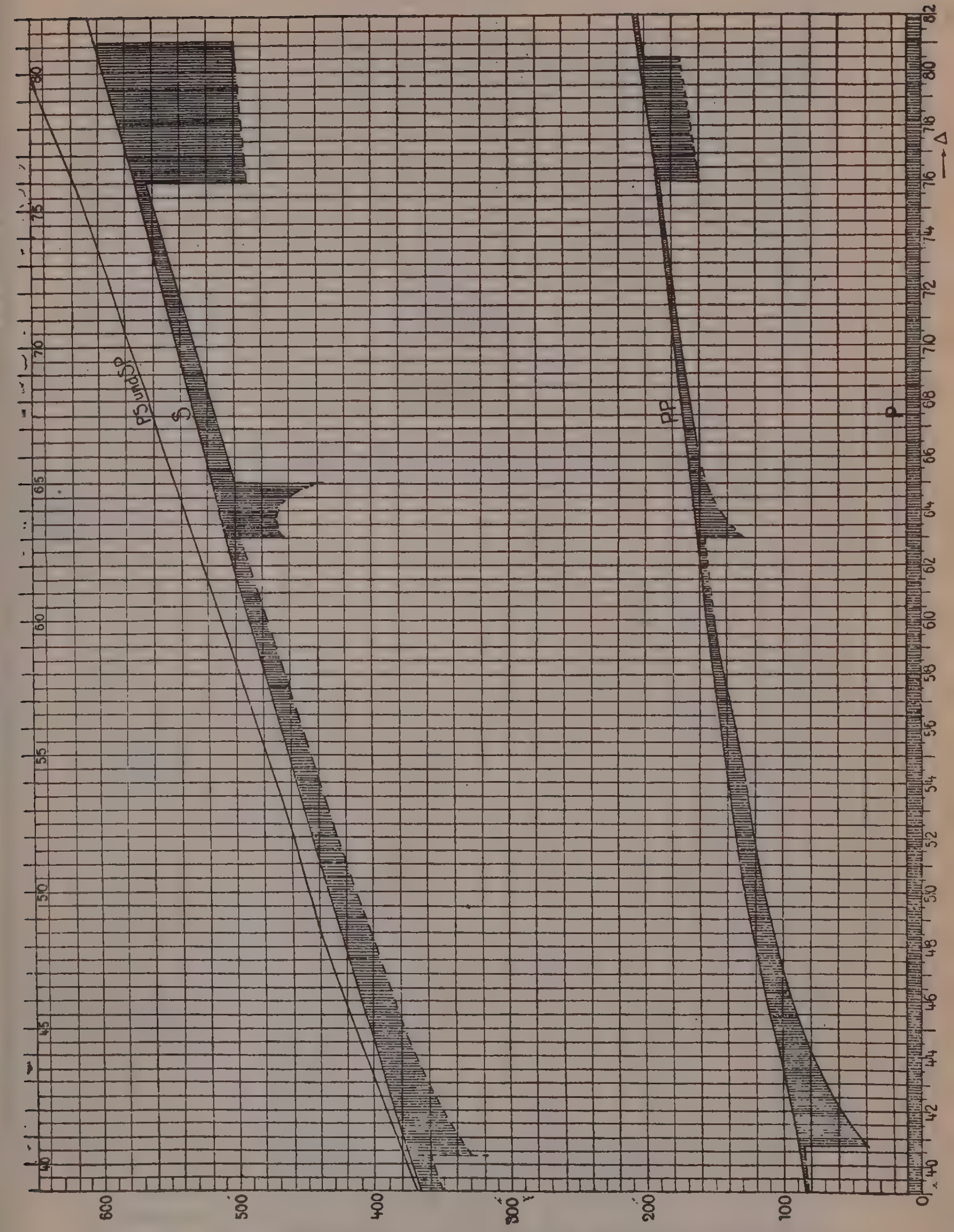
Δ^0	$T_{PS} - T_S$ Sek.	Diff. Sek.	$T_{PSP} - T_S$ Sek.	Diff. Sek.
62	22		35	
		3		4
64	25		39	
		3		4
66	28		43	
		3		4
68	31		47	
		3		5
70	34		52	
		4		4
72	38		56	
		3		4
74	41		60	
		4		5
76	45		65	
		4		5
78	49		70	
		4		5
80	53		75	
		4		6
82	57		81	
		5		7
84	62		88	

Tabelle 19.

Laufzeiten von Wechselwellen, die zweimal transversal gelaufen sind.

Δ^0	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90
$T_{SPS} - T_{SS}$ Sek.	0	1	3	4	5	6	7	8	9	11	13
$T_{SPSP} - T_{SS}$ Sek.	1	2	4	5	6	8	10	13	16	19	21

abgetragen; an den Stellen, an denen keine Beobachtungen vorlagen, ist die Grenze nach den Berechnungen gestrichelt gezeichnet; falls sie nach Beobachtungen angegeben ist, ist sie ausgezogen. Will man die Herddistanz eines Bebens bestimmen, so verfährt man vorteilhaft so: Man trägt auf einem Streifen im gleichen Maßstabe der Figur 13 $T_{PP} - T_P$, $T_S - T_P$ und $T_{PS} - T_P$ auf und trägt dann von T_{PP} und von T_S aus nach unten die beobachteten Amplitudenverhältnisse von $\frac{PP}{P}$ bezw. $\frac{S}{P}$ mit der beobachteten horizontalen Bodenverrückung durch P ($= u_P$) als Einheit ab. Man verschiebt den Streifen dann parallel zur Ordinatenachse so lange, bis alle Marken möglichst gut stimmen. In der Nähe des Sprunges eines Ampli-



Figur 13. Laufzeitdifferenzen von PP, S und PS gegen P, und relative Größe der Bodenverrückungen bei P, PP und S.

tudenverhältnisses kann dieses Amplitudenverhältnis für die Bestimmung der Distanz ausschlaggebend sein.

Die in den Tabellen 17 bis 19 berechneten Laufzeiten wurden, soweit dies nicht schon geschehen war, in großem Maßstabe (2 Sek. = 1 mm) aufgetragen und dazu verwandt, die Herddistanzen der benutzten Beben zu revidieren. Es geschah dies mit Streifen wie oben beschrieben, jedoch ohne Benutzung der Intensitätsverhältnisse. Tabelle 20 gibt die Resultate.

Tabelle 20.

Prüfung der Herddistanzen der benutzten Beben mittels Laufzeitbeobachtungen.

No.	Δ Megam.	Beobachtete — berechnete Laufzeit in Sek. bei:									Art der Herdbestimmung
		T_P	T_{PP}	T_{PPP}	T_S	T_{PS}	T_{PSP}	T_{SS}	T_{SPS}	T_{SSS}	
4	8,2 (8,1)	± 0	—	—	(+ 4)	—	—	—	—	—	Nach dem Katalog des Zentralbüros der internationalen seismolog. Assoziation für 1904.
6	8,2 (8,3)	± 0	—	—	(— 2)	—	—	—	—	—	
7	8,2 (8,0)	± 0	—	—	— 2	—	—	—	—	—	
9	9,0 (9,0)	± 0	(— 14)	— 4	+ 2	(— 7)	—	—	—	—	Desgl. für 1905.
23	9,7 (9,8)	—	± 0	(+ 4)	—	(— 3)	— 1	—	+ 1	—	Makros. Ber.
24	7,4 (7,2)	± 0	+ 4	—	— 2	± 0	—	— 1	—	—	Laufzeiten.
26	9,1 (9,1)	± 0	(— 3)	—	(+ 4)	± 0	—	—	—	—	Desgl.
37	9,6 (9,6)	—	+ 5	— 5	—	—	± 0	—	+ 5	—	Makros. Ber.
40	7,6 (7,6)	± 0	—	—	(+ 6)	—	—	— 3	—	(— 10)	Laufzeiten.
44	7,9 (8,4)	± 0	— 3	—	(— 8)	+ 1	—	—	—	—	Desgl.
46	7,5 (7,5)	± 0	— 1	—	+ 3	+ 1	—	—	—	— 4	Desgl.
73	8,4 (—)	± 0	(+ 7)	—	± 0	—	(+ 8)	—	— 1	—	Desgl.
74	9,2 (—)	± 0	(— 12)	—	+ 4	(— 2)	—	—	(— 5)	—	Desgl.
51	9,7 (9,6)	—	— 3	—	—	—	—	—	+ 3	—	Makros. Ber.
52	9,0 (9,1)	± 0	—	—	± 0	—	—	—	—	—	Laufzeiten.
53	8,4 (8,4)	± 0	—	—	+ 6	— 6	—	—	—	—	Desgl.
58	8,9 (8,9)	± 0	— 5	—	+ 2	(+ 12)	(+ 6)	—	— 4	—	Desgl.
60	9,6 (9,6)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Nach dem Bericht der seism. Station Jugenheim.
70	9,7 (9,5)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Makros. Ber.
71	9,0 (8,95)	± 0	(— 8)	—	(+ 8)	—	(— 5)	—	(+ 3)	—	Wie 60 und Laufzeiten.

Bei den Beben mit Distanzen über 9200 km wurden T_P und T_S wegen der Unsicherheit der Laufzeit nicht verwandt. Für SPS wurden nur solche Beben aus Distanzen über 9200 km benutzt, deren Herddistanzen ohne Laufzeitbeobachtungen bestimmt war; es handelt sich z. B. bei den No. 23, 37, 51 und 70 um mexi-

kanische Beben, deren Herd makroseismisch ziemlich gut bekannt ist. Bei No. 60 und 70 wurde von der Angabe von Laufzeiten abgesehen, da keine Laufzeit scharf meßbar war. Im übrigen wurden alle Angaben, die sich auf Wellen mit unscharfen oder zweifelhaftem Einsatze beziehen, in Klammern gesetzt. Ein Strich bedeutet, daß die betr. Laufzeit um mehr als 15 Sek. unsicher schien, oder daß die betr. Welle überhaupt nicht scharf hervortritt. Eine größere systematische Abweichung der berechneten von den beobachteten Werten tritt nirgends auf. Ein Vergleich der neuen mit den in Klammern beigefügten alten Herddistanzen zeigt, daß die Abweichungen im allgemeinen sehr klein sind. Trägt man die Beobachtungen über $\frac{u_{PP}}{u_P}$ in „Erdbebenwellen V" mit den neuen Herddistanzen ein, so findet man noch bessere Uebereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung. Für die vorliegende Arbeit sind schon überall die neuen Herddistanzen benutzt.

§ 12. Schlusswort.

Wir wollen hier kurz die Resultate der vorliegenden Arbeit zusammenfassen.

1) Das Studium der transversalen Erdbebenwellen für Herddistanzen zwischen 63° und 82° ergibt, daß diese Wellen in der Ebene durch Herd, Erdmittelpunkt und Station schwingen.

2) Die Intensitätsverhältnisse der longitudinalen und transversalen Wellen lassen sich quantitativ durch je eine Hypothese darstellen (sin i- und sin i-Funktion), die sich mit den Wiechert-Zoeppritzschen Laufzeitbeobachtungen verträgt.

3) Aus den neuen Sinusfunktionen wurden verbesserte Laufzeitfunktionen für die longitudinalen und transversalen Vorläufer und ihre wichtigsten Reflexionen gewonnen.

4) Die bei den longitudinalen Wellen gefundenen drei Unstetigkeitsflächen wurden durch die Beobachtungen an Transversalwellen gut bestätigt. Als Konstanten dieser drei Flächen wurden gefunden:

Tiefe km	V km/Sek.	$\mathfrak{B}$ km/Sek.	μ
0	7,174	4,010	0,272
1193 ± 50	11,80	6,59	0,273
1712 ± 100	12,22	6,86	0,270
2454 ± 100	13,29	7,32	0,282

Göttingen, geophysikalisches Institut, 17. Februar 1912.

Über binaurale Tonmischung.

Von den

Privatdozenten **Paul v. Liebermann** (Erlangen)
und **Géza Révész** (Budapest).

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juli 1912 von G. E. Müller.

Zwei musikalische Tonqualitäten[1]) (z. B. c und e) mischen sich für gewöhnlich nicht in der Weise, daß daraus ein Ton (z. B. d) resultiert, der zwischen den beiden Tonqualitäten liegt. Treffen zwei verschiedene Töne gleichzeitig unser Ohr, so kann der Geübte aus dem Zusammenklang zwei Töne heraushören. Es gibt also keine Mischung von der Art, wie sie bei den Farben beobachtet wird. Was man Tonverschmelzung genannt hat, sind Erscheinungen ganz anderer Art (Konsonanzerscheinungen). Es lag daher die Annahme nahe, daß die psychophysische Organisation, die dem Hören zu Grunde liegt, eine wesentlich andere sei als die dem Sehen zu Grunde liegende.

Es ist uns gelungen nachzuweisen, daß ein solcher tiefgehender Unterschied nicht besteht, daß sich vielmehr hinsichtlich der Mischung optischer und akustischer Eindrücke weitgehende Analogien finden. Es gibt eine Tonmischung, die der Farbenmischung entspricht.

Bedingung für das Eintreten dieser Tonmischung ist es, daß man nicht ein Ohr oder zwei gleichgestimmte Ohren mit zwei verschiedenen Tönen reizt, sondern zwei verschieden gestimmte Ohren mit einem und demselben Tone.

1) So nennen wir die Eigenschaft der Tonempfindungen, die ihren musikalischen Namen (c, d, e oder dergl.) bestimmt. Siehe die Mitteilung von G. Révész: Nachweis, daß in der sog. Tonhöhe zwei voneinander unabhängige Eigenschaften zu unterscheiden sind, in diesen Nachrichten, math.-physik. Klasse 1912.

Bei dem einen von uns (L.) findet sich der pathologische Zustand des Falschhörens: die Töne werden seit der Erkrankung mit anderen Qualitäten gehört als ehedem. Die Abweichung ist an den beiden Ohren von verschiedenem Betrage; trifft also ein Ton das linke Ohr, so ist die Qualität der Empfindung anders, als wenn er das rechte Ohr trifft. Wir haben nun festgestellt, daß, wenn ein Ton auf beide Ohren zugleich einwirkt, er mit einer Qualität empfunden wird, die zwischen den beiden Qualitäten der monauralen Töne liegt. Eine theoretische Erwägung hatte dies voraussehen lassen. Wie der eine von uns (R.) in der oben zitierten Arbeit nachweist, müssen wir an den Tonempfindungen zwei musikalische Merkmale unterscheiden: die Qualität, die beim normalen Hören eine periodische Funktion der Schwingungszahl ist, und die Höhe, die mit zunehmender Schwingungszahl kontinuierlich steigt. Bei L. ist von diesen beiden Eigenschaften nur die Qualität gefälscht, während die Höhe vom Krankheitsprozeß verschont geblieben ist. In einer früheren Mitteilung [1]) hatten wir gezeigt, daß auch die Beurteilung eines Zusammenklanges von zwei Tönen (ob z. B. eine Terz, eine Quart oder dergl. vorliege) normal geblieben ist, und wir stellten die Hypothese auf, daß das Vorhandensein einer derartigen normalen Beurteilung an das Eintreten normaler Höheneindrücke gebunden sei. Nach dieser Hypothese entstände der Zusammenklang einer Prime immer dann, wenn zwei akustische Erregungen gleichzeitig hervorgerufen werden, die einzeln zu zwei Tonempfindungen gleicher Höhe führen, unabhängig davon, welche die Qualitäten der Einzelerregungen sind. Wenn also ein Ton in beiden Ohren des anomal Hörenden Empfindungen von normaler Höhe hervorruft, so muß er den Zusammenklang einer Prime, d. h. den Eindruck eines einzigen Tones erzeugen. Dies hat sich in nächstdem zu veröffentlichenden Versuchen bestätigt. Es erhob sich nun die Frage, wie sich die Qualität der unter solchen Umständen eintretenden einheitlichen binauralen Tonempfindung zu den Qualitäten der monauralen Empfindungen verhalte.

Um diese Frage zu entscheiden, bedienten wir uns einer einfachen Versuchsanordnung. Ein Schallrohr, welches den Ohren der Versuchsperson den Ton eines Sternschen Tonvariators (Pfeife) zuführte, teilte sich im Beobachtungszimmer in zwei Äste, die zu den beiden Ohren liefen. Wir konnten nun den einen oder andern Ast verschließen oder beide offen lassen und dadurch die

1) Über Orthosymphonie, Zeitschr. f. Psychologie, Bd. 48, 1908.

rechte, linke und binaurale Qualität des Tones vergleichen. Wir wendeten dabei zwei verschiedene Methoden an:

1. Die Versuchsperson hielt abwechselnd den linken und rechten Zuleitungsschlauch zu, wodurch sie den Qualitätsunterschied links zu rechts wahrnahm; dann verglich sie den binauralen Eindruck mit dem Eindruck links und mit dem Eindruck rechts. Die Qualitätsunterschiede äußerten sich als Intervalleindrücke. Es hatten nun die Schritte binaural zu links und binaural zu rechts entgegengesetzte Richtung[1]) und sie waren beide kleiner als der Schritt links zu rechts. Damit war bewiesen, daß die binaurale Qualität zwischen den monauralen Qualitäten liegt.

2. Um den genauen Ort der binauralen Qualität zu finden, suchte die Vp. zu den drei Pseudoqualitäten — so heißen die Qualitäten beim Falschhören — die drei Töne auf, die bei successivem Erklingen als Quinten zu den Pseudotönen erschienen[2]), und zwar stellte sie die Unterquinten her, die in ihrem normalen Hörgebiete[3]) lagen; die drei Quinten wurden auf einem zweiten Tonvariator hergestellt.

Diese Methode hat vor allem ergeben, daß die Quinte des binauralen Tones zwischen den Quinten der monauralen Töne liegt, womit das Resultat der ersten Methode bestätigt ist. Die Quintenmethode erlaubt aber auch den genauen Ort der binauralen Qualität festzustellen; er bestimmt sich durch ein höchst einfaches Gesetz. Bezeichnen wir als korrespondierende Schwingungszahl einer Pseudoqualität die $^3/_2$ oder $^2/_3$ fache Schwingungszahl ihrer Quinte, d. h. die Schwingungszahl eines Tones, der bei normalem Hören eine Empfindung von derselben Qualität hervorruft, so lautet dieses quantitative Mischungsgesetz:

Bei gleicher Empfindungsstärke des rechten und linken Tones ist die korrespondierende Schwingungszahl des binauralen Tones das arithmetische

---

1) Da die drei Qualitäten in derselben Höhe liegen, könnte es unverständlich scheinen, daß Richtungseindrücke entstehen. Der Grund liegt in der Erfahrung, die zur Illusion führt. Daß der Schritt f → e bei gleichen Höhen absteigend erscheint, kommt daher, daß beim normalen Hören die beiden Qualitäten stets in verschiedener Höhe erschienen waren und zwar so, daß bei kleiner Höhendifferenz f höher lag. Siehe darüber Näheres bei G. Révész: Theorie der Tonempfindungen. Kapitel 9, Abschnitt Distanz und Richtung.

2) Simultane Vorführung hätte wegen der Orthosymphonie die objektive Quinte ergeben.

3) Das Falschhören L.s beginnt bei d^2 und erstreckt sich von da aufwärts bis zum oberen Ende der musikalischen Tonreihe.

Mittel aus den korrespondierenden Schwingungszahlen der monauralen Töne.

Erwecken die beiden monauralen Töne Empfindungen von verschiedener Stärke, so liegt die Qualität des Mischtones der des stärker beteiligten Ohres näher. Der binaurale Ton läßt sich daher durch Variieren der Intensitäten des rechten oder linken Tones oder beider Töne zugleich beliebig zwischen den monauralen Qualitäten verschieben.

Als z. B. bei einem Ton von der Schwingungszahl 760 die untere Quinte des rechten Tones 436,0, des linken 452,5 Schwingungen betrug, ergab sich als die untere Quinte für den binauralen Ton bei gleicher Empfindungsstärke der monauralen Töne ein Ton von der Schwingungszahl 444,5. Wurde nun die Intensität des rechten Tones verstärkt, so verschob sich die untere Quinte des Mischtones auf 440,2, bei weiterer Verstärkung auf 437,2. Wurde jedoch der linke Ton verstärkt, so rückte die untere Quinte des Mischtones derjenigen des isolierten linken Tones näher, indem sie sich zuerst auf 448, bei größerer Intensität auf 449,5 verschob.

Die theoretische Bedeutung dieser Ergebnisse besteht vor Allem in der Erkenntnis, daß sich Ton- und Farbenqualitäten hinsichtlich der Mischungserscheinungen analog verhalten, daß also die psychophysiologische Einrichtung für beide Sinne eine gewisse Ähnlichkeit aufweist; sie zeigen insbesondere, daß auch eine zwischen zwei Tonqualitäten sich erstreckende Qualitätenreihe durch Änderung des Stärkeverhältnisses der diesen beiden Tonqualitäten entsprechenden psychophysischen Prozesse zustande kommen kann.

Weiter erscheint die Tatsache, daß unter gewöhnlichen Umständen keine Tonmischung zustande kommt, in ganz anderem Lichte als bisher. Letztere wird nämlich dadurch verhindert, daß verschiedene Tonqualitäten beim normalen Hören stets in verschiedener Höhe erscheinen. Bestände unter normalen Verhältnissen diese Einrichtung nicht, so würden die Eindrücke der Harmonie nicht entstehen können.

Farben mischen sich binocular nur dann, wenn die Lichtreize auf korrespondierende Punkte der Doppelnetzhaut fallen; eine solche Mischung tritt nicht ein, wenn es sich um nichtkorrespondierende Punkte handelt. In Analogie zu diesen Verhältnissen tritt offenbar bei Tonqualitäten auch nur dann eine Mischung ein, wenn korrespondierende Stellen der beiden Hörorgane (vermutlich in der Schnecke) getroffen werden, nicht aber wenn es sich um nicht-korrespondierende Stellen handelt. Vermutlich treffen die

Erregungen von korrespondierenden Stellen an einer gemeinsamen Stelle des Gehirnes zusammen, ähnlich wie es die anatomische Hypothese für die Netzhautkorrespondenz annimmt.

Die vorgetragene Anschauung steht im besten Einklange mit dem, was wir über die Summation der Intensitäten von Tonempfindungen wissen. Eine solche tritt nämlich, monaural wie binaural, stets nur zwischen Empfindungen gleicher Höhe ein; dies bringt für das normale Hören das Verhalten mit sich, daß die Summation nur bei gleichen Qualitäten zustande kommen kann. In unserem Falle aber, wo verschiedene Qualitäten bei gleicher Höhe bestanden, war damit nicht nur für die Mischung verschiedener Qualitäten, sondern auch für die Summation der Intensitäten von Tonempfindungen verschiedener Qualität die Bedingung hergestellt: der binaurale Ton erschien, wie unter normalen Verhältnissen, stärker als die monauralen, der Qualitätsunterschied war also irrelevant. Die Bedingungen der Mischung und der Stärkesummation sind also dieselben, und sie werden durch die anatomische Hypothese leicht verständlich.

Wir heben noch hervor, daß die Analogie zur Farbenmischung es sehr wahrscheinlich macht, daß die binaurale Tonmischung insofern physiologisch ist, daß sie auch unter normalen Verhältnissen eintritt; nur gewähren die pathologischen Verhältnisse besonders günstige Bedingungen für ihre Beobachtung. Die von verschiedenen Forschern konstatierte Tatsache, daß sich auch bei normal Hörenden binaurale Qualitätsdifferenzen, wenn auch kleineren Betrages, finden, ohne daß es zum Doppelthören käme, drängt zu dieser Annahme.

Über die Konvergenz einer Fourierschen Reihe.

Von

J. Thomae.

Vorgelegt von D. Hilbert.

Riemann bezeichnet mit (x) eine Funktion von x, deren Wert der positive oder negative Überschuß von x über die nächste ganze Zahl, an den Sprungstellen aber, z. B. für $x = \frac{1}{2}$, Null ist. Diese Funktion ist ungerade und hat die Periode Eins. Aus ihr bildet Riemann weiter eine in jedem noch so kleinen Intervall unendlich oft unstetige und doch integrable Funktion

$$S(x) = \sum_{1\,(m)}^{\infty} \frac{(mx)}{m^2}.$$

Sie hat auch die Periode Eins, und ist auch ungerade. Es ist leicht, durch Addition der Fourierschen Reihen, die die einzelnen Glieder der Reihe $S(x)$ darstellen, diese Funktion formal in die Form einer Fourierschen Reihe zu setzen, und es findet sich diese Darstellung in meinen „Vorlesungen über bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, Leipzig 1908“ auf Seite 65. Da aber die Reihen für die (mx) nicht gleichmäßig, und noch weniger absolut konvergent sind, so ist es fraglich, ob die zur Herstellung der Fourierschen Reihe für $S(x)$ notwendigen Umordnungen zulässig sind, ob die Reihe konvergiert, und ob sie die Funktion $S(x)$ wirklich darstellt. Diese Frage soll hier beantwortet werden.

1. Zu dem Ende betrachten wir zunächst die überall, wenn auch nicht gleichmäßig, konvergente Reihe

$$T(x) = \tfrac{1}{2}\pi(1-x) =$$

$$\sin \pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \cdots + \frac{\sin m\pi x}{m} + \cdots,$$

und fragen nach einem Schätzungswerte der Summe der ersten n-Glieder dieser Reihe, des Ausdruckes

$$T_n(x) = \sin \pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \cdots + \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Es ist nach bekannter Schlußweise

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \pi x\, T_n(x) = \cos \tfrac{1}{2} \pi x - \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{3}{2} \pi x - \cdots - \frac{1}{(n-1)n} \cos \frac{2n-1}{2} \pi x - \frac{1}{n} \cos \frac{2n+1}{2} \pi x,$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \pi x\, T(x) = \cos \tfrac{1}{2} \pi x - \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{3}{2} \pi x - \cdots - \frac{1}{m(m+1)} \cos \frac{2m+1}{2} \pi x - \cdots,$$

für jedes x zwischen -1 und $+1$. Da nun

$$-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = -1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2 \cdot 3} + \tfrac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} = 0$$

ist, so folgt

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \pi x\, T_n(x) = \cos \tfrac{1}{2} \pi x - 1 + \sum_{1(m)}^{n-1} \frac{1 - \cos \frac{2m+1}{2} \pi x}{m(m+1)} - \frac{1}{n}\left(\cos \frac{2n+1}{2} \pi x - 1\right)$$

und

$$\sin \tfrac{1}{2} \pi x\, T_n(x) = -\sin^2 \tfrac{1}{4} \pi x + \sum_{1(m)}^{n-1} \frac{1}{m(m+1)} \sin^2 \frac{2m+1}{4} \pi x + \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2n+1}{4} \pi x$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \pi x\, T(x) = -\sin^2 \tfrac{1}{4} \pi x + \sum_{1(m)}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \sin^2 \frac{2m+1}{4} \pi x.$$

$$T_n(x) - \frac{\sin^2 \frac{2n+1}{4} \pi x}{n \sin \frac{1}{2} \pi x} = \frac{\sin^2 \frac{1}{4} \pi x}{\sin \frac{1}{2} x} + \sum_{1(m)}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{2m+1}{4} \pi x}{m(m+1) \sin \frac{1}{2} \pi x},$$

$$T(x) = \frac{\sin^2 \frac{1}{4} \pi x}{\sin \frac{1}{2} \pi x} + \sum_{1(m)}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{2m+1}{4} \pi x}{m(m+1) \sin \frac{1}{2} \pi x} = \tfrac{1}{2} \pi (1 - x),$$

woraus, wenn

$$\varepsilon_n = \sin^2 \frac{2n+1}{4} \pi x : n \sin \tfrac{1}{2} \pi x$$

gesetzt wird, folgt für positive x

$$T_n(x) < T(x) + \varepsilon_n < \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon_n.$$

Der Größe ε_n geben wir die Form

$$\varepsilon_n = \frac{\sin\frac{2n+1}{4}\pi x}{\frac{2n+1}{4}x\pi} \cdot \frac{\pi x : 4}{\sin\frac{1}{2}\pi x}\,\frac{2n+1}{n}\sin\frac{2n+1}{4}\pi x.$$

Abgesehen vom Vorzeichen ist hierin der erste Faktor für jedes x kleiner als Eins, der zweite für x zwischen 0 und 1 ebenfalls kleiner als Eins, der vierte kleiner als Eins, der dritte kleiner als Drei, und ε_n ist für positive x positiv. Somit sind wir zu dem Satze gelangt. *Die Summe $T_n(x)$ der ersten n-Glieder der Reihe $T(x)$ ist abgesehen vom Vorzeichen unabhängig von n kleiner als $\frac{3}{2}\pi$.*

Diese Zahl läßt sich verkleinern, für meine Zwecke genügt diese Schätzung. Sie gilt auch für die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\pi x = \sum_{1(m)}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin m\pi x}{m}$$

die aus $T(x)$ durch Substitution von $1-x$ für x hervorgeht.

2. Formale Herstellung der Fourierschen Reihe für die Riemannsche Funktion $S(x)$. Die Reihe

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1(m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\sin m\pi x}{m},$$

von der die Summe der ersten n-Glieder absolut genommen für jedes x die Zahl Drei nicht übersteigt, stellt die Funktion x zwischen -1 und $+1$ dar, sonst die nach dem Modul Zwei periodische Fortsetzung. Für $x = \pm 1$ ist sie Null. Ersetzt man x durch $2x$, so stellt die Reihe

$$\frac{1}{\pi}\sum_{1(m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\sin 2m\pi x}{m}$$

die Funktion x nur zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ dar, weiterhin aber deren nach dem Modul Eins periodische Fortsetzung, woraus ohne weiteres fließt, daß sie überall die Riemannsche Funktion (x) darstellt. Man kann deshalb ohne Umstände x durch nx ersetzen, wodurch man die Gleichung erhält

$$(nx) = \frac{1}{\pi}\sum_{1(m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\sin 2mn\pi x}{m},$$

und die Summe der ersten n-Glieder dieser Reihe übersteigt dem absoluten Betrage nach, unabhängig von n, niemals die Zahl Drei.

Wir bilden nun formal die Fouriersche Reihe für die Riemannsche Funktion $S(x) = \sum (mx) : m^2$, indem wir die Fourierschen Reihen der einzelnen Glieder dieser Reihe, die alle nur die sinus Vielfacher von $2x$ enthalten, so addieren, daß wir das zusammennehmen, was einen sinus desselben Bogens enthält. So liefern nur diejenigen $(nx) : n^2$ darstellenden Reihen zum Koeffizienten b_m von $\sin 2m\pi x$ einen Beitrag, in denen n ein Teiler von m ist. Ist $n = \tau'$ ein Teiler von m, so liefert $(\tau' x) : \tau'\tau'$, wenn $\tau'\tau = m$ ist, zu b_m den Beitrag

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{\tau+1}}{\tau\tau'\tau'} = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{\tau+1}}{m\tau'} = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{\tau+1}\tau}{m^2}.$$

Es ist demnach

$$b_m = \frac{1}{m^2}\sum_{(\tau)}(-1)^{\tau+1}\tau,$$

wo die Summe $\sum_{(\tau)}$ über alle Teiler von m zu erstrecken ist. Die so formal erhaltene Darstellung der Funktion $S(x)$ durch eine Fouriersche Reihe ist deshalb

$$\frac{1}{\pi}\sum_{1(m)}^{\infty}\frac{\Sigma_{(\tau)}(-1)^{\tau+1}\tau \sin 2m\pi x}{m^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{1(m)}^{\infty}\frac{\Sigma_{(\tau)}\left((-1)^{\tau+1} : \tau'\right)\sin 2m\pi x}{m},$$

wo die Summe $\Sigma_{(\tau)}$ über alle Teiler von m zu erstrecken ist und $\tau' = m : \tau$ der Ergänzungsteiler zu τ ist.

3. Nachweis der Konvergenz dieser Reihe und ihrer Gleichheit mit $S(x)$. Die Fouriersche Reihe, die $(mx) : m^2$ darstellt ist für jedes m überall konvergent. Die Zahl σ werde beliebig klein vorgegeben. Die Reihe $S(x)$ zerlegen wir in zwei Teile, $S_n(x) + S_n'(x)$, wo

$$S_n(x) = \sum_{1(m)}^{n}\frac{(mx)}{m^2},$$

$S_n'(x) = S(x) - S_n(x)$ ist. Dann können wir, weil die Reihe $S(x)$ für jedes x absolut konvergent ist, n so groß annehmen, daß

$$abs\, S_n(x) < \tfrac{1}{3}\sigma,\ S_n(x) = \tfrac{1}{3}\theta_1\sigma$$

wird, wo θ_1 ein positiver oder negativer echter Bruch ist, und daß zugleich

$$S_n''(x) = \tfrac{1}{3}\theta_2\sigma$$

wird, wenn $S_n''(x)$ aus $S_n'(x)$ dadurch hervorgeht, daß man darin

(mx) durch ± 3 ersetzt, über welche Zahl die Summe der ersten n-Glieder jeder der Reihen für (mx) nicht hinausgeht, und wo θ_2 ein positiver oder negativer echter Bruch ist.

$S_n(x)$ besitzt zwischen -1 und $+1$ nicht mehr als $n(n+1)$ Sprungstellen, und ist zwischen ihnen monoton, graphisch wird sie zwischen den Sprungstellen durch Stücke gerader Linien dargestellt; sie erfüllt überall die Dirichletschen Bedingungen für die Entwickelbarkeit in eine Fouriersche Reihe. Die Fouriersche $S_n(x)$ darstellende Reihe

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{1(m)}^{\infty} \frac{\Sigma'_{(\tau)}(-1)^{\tau+1} \tau \sin 2m\pi x}{m},$$

in der die Summe $\Sigma'_{(\tau)}$ über alle Teiler τ von m zu erstrecken ist, deren Ergänzungsteiler $\tau' = m:\tau$ kleiner oder gleich n sind, konvergiert für jedes x. Es läßt sich deshalb für jedes x eine ganze Zahl n' so angeben, daß

$$\frac{1}{\pi} \sum_{1(m)}^{n+n'} \frac{\Sigma'_{(\tau)}(-1)^{\tau+1} \tau \sin 2m\pi x}{m^2} = S_n(x) + \tfrac{1}{3}\theta_3 \sigma$$

wird, wo θ_3 ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Es ist dann

$$S(x) = S_n(x) + \tfrac{1}{3}\theta_1 \sigma,$$

$$S(x) = \sum_{1(m)}^{n+n'} \frac{\Sigma'(-1)^{\tau+1} \tau \cdot \sin 2m\pi x}{m^2} + \tfrac{1}{3}(\theta_1 - \theta_3)\sigma.$$

Schreiben wir weiter

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{1(m)}^{n+n'} \frac{\Sigma(-1)^{\tau+1} \tau \cdot \sin 2m\pi x}{m^2} + \tfrac{1}{3}(\theta_1 - \theta_3)\sigma - \lambda,$$

so ist λ die Summe von je einer bestimmten von n' abhängenden Anzahl von Anfangsgliedern der die Funktionen

$$\frac{(\overline{n+1}x)}{(n+1)^2}, \quad \frac{(\overline{n+2}x)}{(n+2)^2}, \quad \ldots \quad \frac{(\overline{n+n'}x)}{(n+n')^2}$$

darstellenden Fourierschen Reihen, und ist deshalb nach der über n gemachten Voraussetzung gleich $\frac{1}{3}\theta_2\sigma$, so daß

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{1(m)}^{n+n'} \frac{\Sigma(-1)^{\tau+1} \tau \sin 2m\pi x}{m^2} + \theta\sigma$$

wird, wo $\theta = \frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3)$ ein positiver oder negativer echter Bruch ist.

Ist σ eine beliebig klein vorgegebene Zahl, so läßt sich eine

Zahl $N = n + n'$ finden, so daß die Summe der ersten N Glieder der zunächst formal gefundenen Fourierschen Reihe sich von $S(x)$ um weniger als σ unterscheidet. Das heißt

Die für die Riemannsche Funktion $S(x)$ formal gefundene Reihe konvergiert für jedes x, und stellt die Funktion $S(x)$ dar.

Nebenher noch eine Bemerkung. Die Funktion $\int_0^x (nx)\,dx$ ist eine fortwährend positive stetige Funktion, deren Wert nirgend über $1:8n$ hinausgeht. Deshalb ist

$$\sum_{1(m)}^{\infty} \int_0^x \frac{(mx)\,dx}{m}$$

eine absolut konvergente Reihe, und stellt eine stetige Funktion dar. Hingegen ist nach Riemann das Integral

$$\int_0^x \sum_{1(m)} \frac{(mx)}{m}\,dx$$

nicht vorhanden.

Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 18. Mai 1912.

Einleitung.

Diejenigen Probleme der analytischen Zahlentheorie, welche mit der Verteilung der Primzahlen nicht unmittelbar zusammenhängen, sind leichter angreifbar gewesen. Alles von Dirichlet, Herrn Mertens und anderen hierbei erreichte ergab sich durch elementare Methoden. Darunter verstehe ich Abschätzung der auftretenden Summen mit den Mitteln der Integralrechnung für reelle Variable, ohne das Studium der zugehörigen Funktionen für komplexe Variablen.

Viele jener Fragestellungen beziehen sich auf die Anzahl der Gitterpunkte (d. h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) auf dem Rande und im Innern gewisser 2, 3, ..., k-dimensionaler Bereiche und lassen sich ebensowohl als Probleme eines gewissen Zweiges der Geometrie wie der Zahlentheorie ansprechen.

Die für die tiefer liegenden Probleme der Primzahltheorie von anderen und mir ausgebauten analytischen Methoden (die in bestimmten Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes und einiger Diskontinuitätsfaktoren gipfeln) sind bisher niemals von Nutzen für jene andersartigen Probleme der analytischen Zahlentheorie gewesen. Erst kürzlich fand ich einen Kunstgriff[1]), der mir jetzt gestattet, in zahlreichen Fällen u. a. bekannte Gitterpunktabschätzungen (in bezug auf die Größenordnung des Fehlers, nicht etwa blos numerisch) zu verschärfen und, was damit meist eng zusammenhängt, unsere Kenntnis über das Konvergenzgebiet gewisser Dirichletscher Reihen wesentlich zu erweitern.

1) Es handelt sich um die Einführung der unten als Hilfssatz 10 bezeichneten Abschätzung.

In zwei bestimmten Fällen komme ich etwas weniger weit, als neuere elementare, aber äußerst komplizierte spezielle Untersuchungen anderer Mathematiker geliefert haben. Aber gerade von diesen beiden Problemen will ich zunächst reden, weil ihr Studium mich zu meiner neuen Beweismethode geführt hat, die in zahlreichen Fällen über die klassischen Resultate weit hinausführt.

Das erste Problem ist die Frage nach der Summe

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} T(n),$$

wo $T(n)$ die Teilerzahl von n bezeichnet. Dirichlet[1]) hatte

$$\tau(x) = x \log x + (2C-1)x + O\left(\sqrt{x}\right) \tag{1}$$

bewiesen, wo C die Eulersche Konstante ist. Die Frage, ob das $O\left(\sqrt{x}\right)$ verschärft werden kann, hatte die Mathematiker dann sehr beschäftigt. Ein vermeintlicher, von Herrn Pfeiffer[2]) 1886 publizierter Beweis der Relation

$$\tau(x) = x \log x + (2C-1)x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) \tag{2}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ ist nicht einwandfrei[3]). Doch gelang es Voronoï[4]) 1903 durch eine ca. 40 Seiten lange und dabei komplizierte

---

1) Abhandlung 12 in der Numerierung meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin (Teubner), 1909.

2) 1.

3) Insbesondere schließt Verf. ganz am Ende, auf S. 18, daraus, daß erstens eine gewisse in x stetige Funktion von x und m, die ich kurz $f_m(x)$ nennen will, für jedes ganze $m \geqq 1$ einer Ungleichung

$$\left| \int_a^b f_m(x)\, dx \right| \leqq c$$

genügt, und daß zweitens

$$\lim_{m=\infty} f_m(x) = f(x) \tag{3}$$

für $a \leqq x \leqq b$ existiert, daß

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqq c$$

sei. Daß etwa die Gleichung (3) gleichmäßig gelte, beweist er nicht, könnte es auch nicht, da $f(x)$ unstetig (übrigens integrabel) ist. Übrigens ist es mir gelungen, die Pfeifferschen Hilfsbetrachtungen mit Rücksicht auf gleichmäßige Approximation von Anfang an derart umzuarbeiten, daß ich auf dem Pfeifferschen Wege doch zum Ziele gelangen kann. Allerdings ist der so entstehende Beweis recht lang; ich will ihn bei anderer Gelegenheit ausführlich auseinandersetzen.

4) 1.

Hilfsmittel der reellen Analysis benutzende Beweisanordnung, sogar die Relation

$$\tau(x) = x \log x + (2C-1)x + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

zu beweisen.

Es sei entsprechend $T_k(n)$ für jedes ganze $k \geqq 2$ die Anzahl der Zerlegungen von n in k Faktoren und

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{x} T_k(n),$$

d. h. die Lösungszahl von

$$u_1 u_2 \ldots u_k \leqq x$$

in positiven ganzen Zahlen. Obiges $\tau(x)$ ist der Spezialfall $k=2$ hiervon. Unter Verwendung der einfachsten Eigenschaften sog. Dirichletscher Reihen hatte Herr Piltz[1]) 1881

$$\tau_k(x) = x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x\right)$$

bewiesen, wo die b gewisse Konstanten sind. Aus Voronoïs Ergebnis ließe sich unschwer[2]) auch für jedes $k \geqq 3$ die Abschätzung des Restgliedes verbessern, insbesondere bei beliebigem $\varepsilon > 0$

$$\tau_k(x) = x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{1-\frac{2}{\left[\frac{3k+1}{2}\right]}+\varepsilon}\right)$$

beweisen. Doch ergibt[3]) schon ein allgemeiner Satz[4]) von Herrn Schnee und mir über Dirichletsche Reihen für jedes $k \geqq 2$

$$\tau_k(x) = x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k}{k+2}+\varepsilon}\right),$$

also für jedes $k \geqq 3$ mehr, als Herr Piltz gefunden hatte, z. B.

---

1) 1. Einen neuen Beweis, auch der entsprechenden Piltzschen Formel für

$$\tau_k(x; s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n)}{n^s},$$

nebst Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Zahlkörper, gab ich in meiner Arbeit: *Über eine idealtheoretische Funktion* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. XIII (1912), S. 1—21], in welcher ich mit Absicht (vergl. ebenda, S. 4, Anm. 1) nur solche Überlegungen anstellte, die für jeden Körper giltig sind.

2) Vergl. unten, § 8.

3) Vergl. unten, § 8.

4) Es handelt sich um den Satz 54 in § 238 des *Handbuchs*.

für $k = 3$ jetzt $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ statt $O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)$; für jedes $k \geqq 5$ ist $\frac{k}{k+2} < 1 - \frac{2}{\left[\frac{3k+1}{2}\right]}$. Auch für $k = 2$ ist eigentlich erst durch die Anwendung jenes Schneeschen[1]) Satzes ein Desideratum erfüllt, welches Kronecker[2]) folgendermaßen formuliert. Nachdem er festgestellt hat, daß aus (1) die Konvergenz der Dirichletschen Reihe auf der linken Seite von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s} = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)$$

für $s > \frac{1}{2}$ folgt[3]), fährt er fort: „Hätten wir diesen Satz direkt beweisen können, so könnten wir auch aus ihm leicht den Mittelwert[4]) für die Anzahl der Divisoren ermitteln; jedoch ist bisher dieser direkte Beweis stets vergeblich versucht worden, es ist dies einer der Fälle, wo die Arithmetik mehr vermag, als die Analysis, wo sie imstande ist, ihrerseits die Analysis zu fördern".

In der vorliegenden Abhandlung werde ich in § 7 für die (allerdings schon durch Voronoï, sogar mit $x^{\frac{1}{3}}\log x$ statt $x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ bekannte) Relation (2) einen funktionentheoretischen, verhältnismäßig kurzen neuen Beweis geben und mit denselben Mitteln in § 8 auch für jedes $k \geqq 3$

$$\tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1}x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right) \tag{4}$$

beweisen, was in jedem Falle, bereits für $k = 3$, ein neues Resultat darstellt. Übrigens war — seit wenigen Monaten — durch Herrn Littlewood[5]) schon bekannt[6]), daß (4) *unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen*

---

1) Hier kommt nur der von Herrn Schnee allein herrührende Teil des Satzes in Betracht (der mich später zum Beweise des anderen Teils führte).

2) *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von Herrn Hensel, Bd. I, Leipzig (1901), S. 351.

3) Hierzu hätte statt $O(\sqrt{x})$ im Schlußglied $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ genügt. Natürlich konvergiert die Reihe als Dirichletsche in der ganzen Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$.

4) Nämlich die Formel (1) mit $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$.

5) *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLIV (1912), S. 263—266].

6) Vergl. unten, § 8.

der Zetafunktion richtig ist, sogar mit $\frac{1}{2}$ statt $\frac{k-1}{k+1}$. Ich *beweise* aber (4) in § 8, komme also speziell im Falle $k = 3$ auch bis $\frac{1}{2}$ ohne Benutzung der Riemannschen Vermutung.

Ich sagte oben, daß bei zwei Problemen meine neue Methode nicht ganz bis zu den Grenzen des anderwärts schon erreichten heranführt. Das eine war Voronoïs Satz über $\tau(x)$; das andere ist ein Ergebnis von Herrn Sierpiński über die Anzahl $A(x)$ der Paare ganzer Zahlen u, v, für welche

$$u^2 + v^2 \leqq x$$

ist, d. h. die Anzahl der Gitterpunkte im Kreise mit dem Radius $\sqrt{x}$ um den Nullpunkt (inkl. Rand). Trivial ist[1])

$$A(x) = Jx + O(\sqrt{x}), \tag{5}$$

wo J den Inhalt des Kreises $u^2 + v^2 = 1$, d. h. die Konstante π darstellt. Anders ausgedrückt[2]): Wenn $\zeta_\varkappa(s)$ die zum Gaußschen Körper $P(i)$ gehörige Zetafunktion ist, so konvergiert die Dirichletsche Reihe für

$$\zeta_\varkappa(s) - \frac{\pi}{4}\zeta(s)$$

in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$; in der Tat liefern ja stets vier assoziierte Zahlen $u + vi$, $i(u + vi)$, $-(u + vi)$, $-i(u + vi)$, wo $u^2 + v^2 > 0$ ist, ein Ideal, so daß die Anzahl der Ideale des Körpers mit Norm $\leqq x$ nach (5)

$$\frac{\pi}{4}x + O(\sqrt{x})$$

ist. Durch Anwendung der Voronoïschen Methode gelang es nun Herrn Sierpiński[3]) 1906, wiederum mit einer ca. 40 Seiten langen speziellen Beweisanordnung, die schärfere Relation

$$A(x) = \pi x + O(\sqrt[3]{x}) \tag{6}$$

zu beweisen und damit die Konvergenz jener Dirichletschen Reihe für $\sigma > \frac{1}{3}$. Diese Konvergenz für $\sigma > \frac{1}{3}$ vermag ich durch

---

1) Vergl. z. B. Gauß, *De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem* [Werke, Bd. II (1863) S. 269—291], S. 277.

2) Hierfür würde $O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$ statt $O(\sqrt{x})$ ausreichen.

3) 1.

meine Methode relativ kurz auch zu beweisen; (6) jedoch nicht völlig, sondern statt dessen nur die für jene Konvergenz hinreichende (und notwendige) Relation

$$A(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Aber ich erhalte gleichzeitig sehr viel Neues. Zunächst, wenn an Stelle des Kreises $u^2+v^2 \leqq x$ eine beliebige Ellipse $au^2+2buv+cv^2 \leqq x$ mit ganzzahligen (oder, was nicht tiefer liegt, kommensurablen) a, b, c zugrunde gelegt wird, die Relation

(7) $$A(x) = Jx + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right),$$

wo $J\left(= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\right)$ der Inhalt der Ellipse $au^2+2buv+cv^2 = 1$ ist; dies werde ich in § 15 auseinandersetzen.

Auch für das Ellipsoid $\sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \leqq x$ (wo die a ganz sind) in der $k$ten Dimension ($k \geqq 2$), wo die triviale Abschätzung

(8) $$A(x) = Jx^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

lautet, gelingt es mir (vergl. § 16),

(9) $$A(x) = Jx^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{k}{k+1}+\varepsilon}\right)$$

zu beweisen.

Ich kehre zur zweiten Dimension zurück. Aus (7) ließe sich leicht [1]) schließen, daß für jeden imaginär-quadratischen Körper die Anzahl der Ideale mit Norm $\leqq x$

$$\alpha x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

ist, also die Dirichletsche Reihe links in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)-\alpha}{n^s} = \zeta_\varkappa(s) - \alpha\zeta(s)$$

($F(n)$ Anzahl der Ideale mit Norm n) für $\sigma > \frac{1}{3}$ konvergiert, was bisher nur — durch Herrn Sierpiński — für den einen Körper $P(i)$ bekannt war. Es gelingt mir nun aber durch einen anderen Ansatz (der auch für den imaginär-quadratischen Körper ausreicht), dasselbe Ergebnis für jeden reell-quadratischen Körper zu erzielen, wie der Leser aus § 12 ersehen wird.

1) Vergl. den Anfang von § 14.

Herr Sierpiński ist noch in einer späteren Arbeit[1]) auf eine Frage zurückgekommen, die mit seinem Ergebnis (6) zusammenhängt. Er schloß aus (6) zum Zweck einer bestimmten Anwendung, daß die Anzahl der Gitterpunkte der Kugel $u^2+v^2+w^2 \leqq x$

$$Jx^{\frac{3}{2}}+O\left(x^{\frac{5}{6}}\right)$$

ist $\left(J \text{ natürlich } = \frac{4}{3}\pi\right)$. Meine Relation (9) liefert hierfür sogar[2])
$O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right)$.

Ich füge noch hinzu, daß ich auch für diejenigen Gitterpunkte des k-dimensionalen Ellipsoids, welche beliebigen Kongruenzbedingungen

$$u_1 \equiv z_1 \pmod{M_1}, \quad \ldots, \quad u_k \equiv z_k \pmod{M_k}$$

genügen, d. h. für die Gitter mit beliebigem Ausgangspunkt und beliebigen Weiten, alles ganzzahlig vorausgesetzt, dasselbe Ergebnis

$$\frac{J}{M_1 \ldots M_k} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}\frac{k}{k+1}+\varepsilon}\right)$$

in § 16 finden werde. Dies liefert (vergl. § 17) gerade bei der dreidimensionalen Kugel interessante Anwendungen auf Klassenzahlabschätzungen und damit indirekt auch auf die Anzahl der Gitterpunkte in einem bestimmten dreidimensionalen Bereich, der von einem zweischaligen Hyperboloid und Ebenen begrenzt ist. Bereiche, die keine Ellipsoide sind, wurden auch schon durch die oben genannte Funktion $\tau_k(x)$ geliefert. Der damaligen Verbesserung von $\frac{k-1}{k}$ im Restglied zu $\frac{k-1}{k+1} = \frac{k-1}{k}\,\frac{k}{k+1}$ entspricht genau die Verbesserung von $\frac{k-1}{2}$ zu $\frac{k-1}{2}\,\frac{k}{k+1}$ beim Übergang von (8) zu (9); daß dort der Nenner k $\left(\text{und im Hauptglied } x^{\frac{k}{k}}\right)$,

1) *O pewnej sumie potrójnej* (*Sur une somme triple*) [Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie, Bd. II (1909), S. 117—120].

2) Für Herrn Sierpińskis spezielle Anwendung, soweit sie im französischen Résumé und in dem Lehrsatz zu Beginn des polnischen Textes besonders hervorgehoben ist, hätte sogar irgend ein echter Bruch $> \frac{1}{2}$ ausgereicht; das Endergebnis der Untersuchung im polnischen Text selbst $\left(\text{es handelt sich um } S(x) = \sum_{0 < u^2+v^2+w^2 \leqq x} \frac{1}{u^2+v^2+w^2}\right)$ läßt sich allerdings jetzt mit Hilfe von (9) verschärfen, nämlich zu

$$S(x) = 4\pi\sqrt{x} + c + O\left(x^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

hier der Nenner 2 $\left(\text{und im Hauptglied } x^{\frac{k}{2}}\right)$ auftritt, liegt daran, daß bei jener k-dimensionalen Figur x durch x^k, bei dieser x durch x^2 ersetzt werden muß, damit die Begrenzungsfläche in $u_1, \ldots, u_k, x$ homogen ist.

Die genannten Ergebnisse über Gitterpunkte mögen — zumal die berühmten Untersuchungen Minkowskis über die Geometrie der Zahlen nicht in dieser Richtung liegen — von geometrischem Interesse sein; für die analytische Zahlentheorie am interessantesten dürfte aber folgendes Ergebnis sein (welches sich in die Sprache der Gitterpunkte nur bei Einführung komplexer Gewichte übersetzen ließe), das ich in § 10 entwickle.

Es sei $\chi_1(n)$ irgend ein Charakter nach irgend einem Modul k_1 und $\chi_2(n)$ irgend ein Charakter nach irgend einem Modul k_2, aber weder $\chi_1(n)$ noch $\chi_2(n)$ Hauptcharakter. Es werde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = L_1(s),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_2(n)}{n^s} = L_2(s)$$

gesetzt. Diese beiden Dirichletschen Reihen konvergieren bekanntlich für $\sigma > 0$ und stellen übrigens ganze Funktionen dar. Das formal gebildete Produkt

$$L_1(s)\,L_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \tag{10}$$

$\left(\text{wo also } c_n = \sum_{d/n} \chi_1(d)\,\chi_2\left(\frac{n}{d}\right) \text{ ist}\right)$ konvergiert einem allgemeinen Reihensatze von Stieltjes zufolge für $\sigma > \frac{1}{2}$; auch die Anwendung des schon oben erwähnten Satzes von Herrn Schnee liefert nicht weniger (vergl. Kroneckers oben erwähntes Desideratum) und nicht mehr.

Ich kann beweisen, daß die rechte Seite von (10) für $\sigma > \frac{1}{3}$ konvergiert, was auch in jedem einzelnen Spezialfall neu ist. Einfachstes Beispiel: Das formale Quadrat

$$\left(1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \cdots\right)^2 = 1 - \frac{2}{3^s} + \frac{2}{5^s} - \frac{2}{7^s} + \frac{3}{9^s} + \cdots$$

konvergiert für $s > \frac{1}{3}$.

Wie gesagt, beweise ich alle meine Ergebnisse mit derselben Methode. Um Wiederholungen zu vermeiden, schicke ich im ersten Teil (§§ 1—5) der vorliegenden Abhandlung einen einzigen Satz mit Beweis voraus, aus dem sich dann im zweiten Teil (§§ 6—17) alles durch Spezialisierung ergibt. Jener Hauptsatz hat allerdings einen etwas unförmigen Wortlaut; damit derselbe nicht noch komplizierter wird, habe ich gewisse naheliegende Verallgemeinerungen unterdrückt und gerade eine solche Form gewählt, aus der sich alle Spezialfälle bequem ableiten lassen. Auch sind die Voraussetzungen des Hauptsatzes durchaus nicht unabhängig; sie sind aber eben in allen Spezialfällen sämtlich erfüllt.

Eine Reihe von Anwendungen, die ich in dieser Einleitung nicht genannt habe, kommt des ferneren in Teil 2 vor; ich nenne hier nur § 9, § 11, § 13 und den Satz des § 16. Teil 2 zerfällt in 3 Kapitel: 1) Teilerprobleme, 2) die Dirichletschen Funktionen $L(s)$, 3) Ellipsoidprobleme.

Für meine Bezeichnungen sei auf mein Handbuch verwiesen, auf das ich auch bei zahlreichen benutzten Hilfssätzen Bezug nehme, unter genauer Angabe der Stellen. Außerdem setze ich im zweiten Teil zahlreiche nicht im Handbuch vorkommende Eigenschaften der auftretenden Funktionen aus der genau bezeichneten Literatur als bekannt voraus. Dagegen reproduziere ich in § 2 aus einer dänisch geschriebenen Arbeit von Herrn Jensen einen besonders eleganten Beweis für eine ältere Abschätzung in der Theorie der Gammafunktion und im § 3 einen Spezialfall allgemeinerer Untersuchungen der Herren Phragmén und Lindelöf, der für mich sehr wichtig ist; beides kommt im Handbuch nur in geringerem — für die dortigen Zwecke ausreichendem — Umfang vor.

Erster Teil.

Beweis des Hauptsatzes.

§ 1. Formulierung des Hauptsatzes.

Voraussetzungen: *Es sei eine Folge komplexer Zahlen*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \textit{ ad inf.}$$

gegeben.

Es sei möglich ihr zuzuordnen:

Ein $\alpha \geqq 0$;

ein ganzes $\mu \geqq 1$;

reelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$;

positive $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$;

ein ganzes $\nu \geqq 1$;

reelle $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$;

positive $\delta_1, \ldots, \delta_\nu$;

komplexe $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ *ad inf.*;

reelle $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots$ *ad inf., wo* λ_n *mit* n *unendlich wird, mit folgenden Eigenschaften:*

Erstens ist bei jedem $\varepsilon > 0$

(11) $$c_n = O\left(n^{\alpha+\varepsilon}\right),$$

also a fortiori die Dirichletsche Reihe

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = Z(s)$$

für $\sigma > \alpha + 1$ *absolut konvergent.*

Zweitens ist die durch (12) *definierte Funktion* $Z(s)$ *in der ganzen Ebene meromorph und besitzt in jedem festen Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, *wo* $\sigma_2 > \sigma_1$ *ist, nur endlich viele Pole.*

Drittens ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s}$$

für $\sigma < 0$ *absolut konvergent*[1]).

Viertens ist für $\sigma < 0$

(13) $$\begin{cases} \Gamma(\alpha_1 + \beta_1 s) \ldots \Gamma(\alpha_\mu + \beta_\mu s)\, Z(s) \\ \qquad = \Gamma(\gamma_1 - \delta_1 s) \ldots \Gamma(\gamma_\nu - \delta_\nu s) \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s} \end{cases}$$

Fünftens ist

(14) $$\beta_1 + \cdots + \beta_\mu = \delta_1 + \cdots + \delta_\nu.$$

Sechstens ist, wenn

(15) $$\gamma_1 + \cdots + \gamma_\nu - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu) + \frac{\mu - \nu}{2} = \eta$$

gesetzt wird,

---

1) D. h. $\sum_{n=1}^{\infty} |e_n|\, e^{\lambda_n y}$ konvergiert für $y < 0$.

(16) $$\eta \geqq 1$$

und

(17) $$\eta \geqq \alpha + \frac{1}{2}.$$

Siebentens gibt es zu jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ eine Konstante $\gamma = \gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ (die natürlich von der gegebenen c-Folge, nicht aber von σ und t abhängen darf), so daß für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ und wachsendes positives t, sowie absolut wachsendes negatives t

(18) $$Z(s) = O\left(e^{\gamma |t|}\right)$$

ist.

Behauptung: *Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$*

(19) $$\sum_{n=1}^{x} c_n = R(x) + O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right),$$

wo $R(x)$ die Summe der Residuen der Funktion

(20) $$\frac{x^s}{s} Z(s)$$

für alle etwaigen Pole von $\frac{Z(s)}{s}$ im Streifen

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1} < \sigma \leqq \alpha + 1$$

bezeichnet.

Vorbemerkung über $R(x)$: Falls $s = \varrho$ ein irgendwo in der Ebene gelegener Pol $q$ter Ordnung ($q \geqq 1$) von $\frac{Z(s)}{s}$ ist, hat die Funktion (20) in der Nähe eine Entwicklung

$$x^\varrho x^{s-\varrho}\left(\frac{A_q}{(s-\varrho)^q} + \cdots + \frac{A_1}{s-\varrho} + A_0 + \cdots\right) \quad (A_q \neq 0)$$

$$= x^\varrho\left(1 + (s-\varrho)\log x + \frac{(s-\varrho)^2}{2!}\log^2 x + \cdots\right)\left(\frac{A_q}{(s-\varrho)^q} + \cdots + \frac{A_1}{s-\varrho} + \cdots\right),$$

also das Residuum

$$x^\varrho\left(\frac{A_q}{(q-1)!}\log^{q-1} x + \cdots + A_2 \log x + A_1\right).$$

Für $\Re(\varrho) \leqq (\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}$ ist dies

$$O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right);$$

da nach Voraussetzung der Streifen $0 \leqq \sigma \leqq (\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}$ nur endlich viele Pole enthält, ist die Behauptung (19) identisch mit der Behauptung

$$(21) \qquad \sum_{n=1}^{x} c_n = S(x) + O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right),$$

wo $S(x)$ die Summe der Residuen von (20) für alle etwa dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq \alpha+1$ angehörigen Pole von $\frac{Z(s)}{s}$ ist. In dieser Fassung (21) wird der Hauptsatz in der Folge bewiesen werden.

§ 2. Hilfssätze über die Gammafunktion.

Hilfssatz[1] **1:** *Es bezeichnen* $\log \Gamma(s)$ *sowie alle anderen*[2]) *auftretenden Logarithmen diejenigen Funktionen, welche für* $s > 0$ *reell und in der von* 0 *bis* $-\infty$ *längs der reellen Axe aufgeschnittenen Ebene regulär sind. Dann ist*

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + c$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left(s+m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{s+m} - 1\right\},$$

wo c *eine absolute Konstante*[3]) *ist.*

Beweis: Bekanntlich ist

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs}\, s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

---

1) Der Satz ist von Gudermann, *Additamentum ad functionis* $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} . x^{a-1}\, \partial x$ *theoriam* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXIX (1845), S. 209—212], der obige Beweis von Herrn Jensen, *Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling*, I [Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. II B (1891), S. 33—55].

2) Im Satz und beim Beweise; es handelt sich um

$$\log s,\ \log\frac{s+m+1}{s+m},\ \log\left(1+\frac{s}{n}\right),\ \log(s+n),\ \log(s+m),\ \log(s+1),$$

$$\log(s+m+1),\ \log\frac{s+m+1}{m+1},\ \log\frac{s+m}{m},\ \log\frac{s+M+1}{M+1}.$$

3) Auf den Wert von c, übrigens $\frac{1}{2}\log(2\pi)$, kommt es mir nicht an.

$$-\log\Gamma(s) = Cs + \log s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right\}$$

$$= s\lim_{m=\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n} - \log m\right) + \log s + \lim_{m=\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left\{\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right\}$$

$$= \log s + \lim_{m=\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - s\log m\right)$$

$$= \lim_{m=\infty}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\log(s+n) - \log(m-1)! - s\log m\right),$$

$$\log\Gamma(s) = \lim_{m=\infty}\left\{-\sum_{n=0}^{m-1}\log(s+n) + \log(m-1)! + s\log(s+m)\right\}.$$

Wird diese geschweifte Klammer mit u_m bezeichnet, so ist also

$$(22)\qquad \log\Gamma(s) = u_1 + \sum_{m=1}^{\infty}(u_{m+1} - u_m).$$

Nun ist

$$(23)\qquad u_1 = -\log s + s\log(s+1),$$

$$u_{m+1} - u_m = -\log(s+m) + \log m + s\log(s+m+1) - s\log(s+m)$$

$$(24)\left\{\begin{aligned} &= \left\{\left(s+m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{s+m} - 1\right\} - \left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m+1}{m} - 1\right\} \\ &\quad - \left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{m+1} - \left(m-\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m}{m}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ferner ist wegen

$$(25)\quad\begin{aligned}\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m+1}{m} - 1 &= \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} - \cdots\right) - 1 \\ &= \frac{1}{12m^2} + \cdots \\ &= O\left(\frac{1}{m^2}\right)\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m+1}{m} - 1\right\} = c'$$

konvergent und wegen

$$\sum_{m=1}^{M}\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{m+1} - \left(m-\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m}{m}\right\}$$

$$= \left(M+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+M+1}{M+1} - \frac{1}{2}\log(s+1)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{m+1}-\left(m-\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m}{m}\right\}$$
$$= s-\frac{1}{2}\log(s+1);$$

aus (22), (23) und (24) ergibt sich also

$$\log\Gamma(s) = -\log s + s\log(s+1)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(s+m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{s+m}-1\right\}-c'-s+\frac{1}{2}\log(s+1)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left(s+m+\frac{1}{2}\right)\log\frac{s+m+1}{s+m}-1\right\}$$
$$+\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - s + 1 - c',$$

womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz[1] **2:** *Bei festem* σ *und sogar gleichmäßig für jeden Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, *wo* σ_1 *und* $\sigma_2 > \sigma_1$ *fest sind, ist*

$$\log\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - s + c + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Beweis: Für $|z| > 1$ ist[2])

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\log\frac{z+1}{z}-1 = \frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots;$$

also gibt es eine absolute Konstante a derart, daß für $|z| \geqq 2$

$$\left|\left(z+\frac{1}{2}\right)\log\frac{z+1}{z}-1\right| \leqq \frac{a}{|z|^2}$$

ist. Es sei nun $t \geqq 2$; dann ist dies, $z = s+m$ gesetzt, auf jedes Glied der im Hilfssatz 1 auftretenden Reihe anwendbar und ergibt

$$\left|\log\Gamma(s)-\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s + s - c\right| \leqq a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{|s+m|^2}$$
$$= a\sum_{m=0}^{[t]}\frac{1}{(\sigma+m)^2+t^2}+a\sum_{m=[t]+1}^{\infty}\frac{1}{(\sigma+m)^2+t^2}.$$

---

1) Stieltjes, *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. IV, Bd. V (1889), S. 425—444]. Der obige Beweis ist von Herrn Jensen (l. c.).

2) Vergl. (25), wo $z = m$ positiv-ganz war.

Nun werde t so groß gewählt, daß

$$t \geqq 2, \quad t \geqq 2(1-\sigma_1),$$

also im gegebenen Streifen durchweg

$$t \geqq 2(1-\sigma)$$

ist; dann ist in der letzten Summe durchweg

$$\sigma + m > \sigma + t \geqq \frac{t}{2} + 1 > 0;$$

also ist

$$\left|\log \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s + s - c\right| < a \sum_{m=0}^{[t]} \frac{1}{t^2} + a \sum_{m=[t]+1}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+m)^2}$$

$$< a\frac{[t]+1}{t^2} + a\int_{[t]}^{\infty} \frac{du}{(\sigma+u)^2}$$

$$< a\frac{t+t}{t^2} + \frac{a}{\sigma+[t]}$$

$$< \frac{2a}{t} + \frac{a}{\sigma+t-1}$$

$$\leqq \frac{2a}{t} + \frac{a}{\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{4a}{t},$$

womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist[1]).

Hilfssatz[2]) **3:** *Für festes σ ist bei wachsendem positiven t*

$$\log \Gamma(s) = -\frac{\pi}{2}t + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log t + ti(\log t - 1) + c_1 + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{26}$$

wo c_1 nicht von t abhängt, und für absolut wachsendes negatives t

$$\log \Gamma(s) = -\frac{\pi}{2}|t| + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log |t| + ti(\log |t| - 1) + c_2 + O\left(\frac{1}{|t|}\right),$$

wo c_2 die zu c_1 konjugierte Konstante ist.

Beweis: Aus Symmetriegründen braucht nur die Behauptung (26) bewiesen zu werden; es ist ja $\log \Gamma(\sigma + ti)$ für $t < 0$ zu $\log \Gamma(\sigma + |t| i)$ konjugiert.

---

1) Daß a von σ_1 und σ_2 unabhängig ist, ist unerheblich.

2) Stieltjes (l. c.).

Nach Hilfssatz 2 ist

$$\log\Gamma(s) = \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\log(\sigma+ti)-\sigma-ti+c+O\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\left(\log(ti)+\log\left(1+\frac{\sigma}{ti}\right)\right)-ti+c_2+O\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\left(\log t+\frac{\pi}{2}i+\frac{\sigma}{ti}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)-ti+c_2+O\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\log t+ti\log t-\frac{\pi}{2}t-ti+c_1+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Hilfssatz[1] **4:** *Für* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *ist gleichmäßig bei absolut wachsendem positiven oder negativen* t

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

und

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = O\left(e^{\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right).$$

Beweis: Aus Symmetriegründen brauchen beide Behauptungen nur in der oberen Halbebene bewiesen zu werden. Nach Hilfssatz 2 ist für den gegebenen Streifen gleichmäßig

$$\log\Gamma(s) = \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\log(\sigma+ti)-ti+O(1)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\left(\log t+\frac{\pi}{2}i+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)-ti+O(1)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}+ti\right)\left(\log t+\frac{\pi}{2}i\right)-ti+O(1),$$

also

$$\log|\Gamma(s)| = \Re\log\Gamma(s)$$
$$= \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\log t-\frac{\pi}{2}t+O(1),$$
$$|\Gamma(s)| = e^{-\frac{\pi}{2}t}\,t^{\sigma-\frac{1}{2}}\,e^{O(1)}$$

woraus die Behauptungen folgen.

---

1) Vergl. die Literaturangaben auf S. 309 von Herrn Mellins Abhandlung *Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen* [Mathematische Annalen, Bd. LXVIII (1910), S. 305—337]; auf S. 308—309 ebenda befindet sich ein recht kurzer Beweis eines Satzes, der den Hilfssatz 4 enthält. Der Hilfssatz 4 selbst ist bereits in einer Abschätzung von Lipschitz

§ 3. Hilfssätze aus der allgemeinen Funktionentheorie.

Hilfssatz[1]) **5:** *Es sei* $\sigma_2 > \sigma_1$ *und eine Funktion* $F(s)$ *regulär im Gebiet* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$. *Auf beiden vertikalen Rändern sei*

$$F(s) = O(1),$$

so daß $F(s)$ *auf dem ganzen Rand*

$$\sigma_1 + \infty i \ldots \sigma_1 + t_0 i \ldots \sigma_2 + t_0 i \ldots \sigma_2 + \infty i$$

beschränkt ist. Im Innern sei bei passender Wahl einer Konstanten γ *gleichmäßig*

$$F(s) = O\left(e^{\gamma t}\right), \tag{27}$$

so daß $|F(s)|\, e^{-\gamma t}$ *im ganzen Innern beschränkt ist.*

Dann ist auch im Innern gleichmäßig

$$F(s) = O(1);$$

d. h. $F(s)$ *ist im Innern beschränkt.*

Beweis: Eine Konstante c sei so gewählt, daß auf dem ganzen Rande

$$|F(s)| \leqq c \tag{28}$$

ist. Die größere der beiden Zahlen σ_1^2, σ_2^2 werde $= b$ gesetzt.

Es sei ε eine beliebig gegebene Konstante > 0. Dann ist die Funktion

$$G(s) = e^{\varepsilon s^2} F(s)$$

im ganzen Gebiet $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$ regulär; ebenda ist

$$|G(s)| = e^{\varepsilon(\sigma^2 - t^2)} |F(s)| \tag{29}$$

$$\leqq e^{\varepsilon(b - t^2)} |F(s)|. \tag{30}$$

---

enthalten; vergl. S. 20 seiner Arbeit *Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Eulersche Summenformel* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVI (1859), S. 11—26].

1) Phragmén und Lindelöf, *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* [Acta Mathematica, Bd. XXXI (1908), S. 381—406], S. 387 oder S. 388. Übrigens ist dort — was ich hier nicht brauche — gezeigt, daß die Voraussetzung (27) auch durch die geringere

$$F(s) = O\left(e^{(t^\gamma)}\right),$$

ja sogar durch noch weniger ersetzt werden kann.

Auf dem Rand ist also nach (28)

$$|G(s)| \leqq e^{\varepsilon(b-t^2)}c$$
$$\leqq e^{\varepsilon b}c;$$

innen ist wegen (27) und (30) gleichmäßig

$$\lim_{t=\infty} G(s) = 0.$$

Jeder innere Punkt kann also in ein Rechteck (Begrenzungslinien: $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$, $t = t_0$, $t = t_1$ bei passender Wahl von t_1) eingeschlossen werden, auf dessen Rand

(31) $$|G(s)| \leqq e^{\varepsilon b}c$$

ist. Daher gilt (31) im ganzen Innern des gegebenen Bereiches; nach (29) ist also im Innern

$$|F(s)| = e^{\varepsilon(t^2-\sigma^2)}|G(s)|$$
$$\leqq e^{\varepsilon(t^2-\sigma^2+b)}c.$$

Das ist für jedes $\varepsilon > 0$ bewiesen; in jedem inneren Punkte ist also

$$|F(s)| \leqq c.$$

Hilfssatz[1]) **6:** *Es sei $\sigma_2 > \sigma_1$ und $f(s)$ regulär für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$. Auf dem linken Rand sei*

(32) $$f(s) = O(t^k),$$

wo k konstant ist; auf dem rechten Rand sei

(33) $$f(s) = O(1);$$

im Innern sei gleichmäßig

(34) $$f(s) = O\left(e^{\gamma t}\right),$$

wo γ konstant ist. Dann ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$f(s) = O\left(t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $t_0 > 0$. Es werde

$$g(s) = e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-s)\log s + \frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}si}$$

1) Genau nach dem Vorbilde von Herrn Lindelöf (5, S. 346—348) bei einem analogen Fall.

gesetzt, wo $\log s$ wie im Hilfssatz 1 erklärt ist; diese Funktion $g(s)$ ist im gegebenen Gebiet regulär und $\neq 0$. Für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ ist gleichmäßig

$$g(s) = e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-\sigma-ti)\log(\sigma+ti)+\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}(\sigma+ti)i}$$

$$= e^{\frac{k}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-\sigma-ti)\left(\log t+\frac{\pi}{2}i+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)-\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t+O(1)}$$

$$|g(s)| = e^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}\log t+\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t-\frac{\pi k}{2(\sigma_2-\sigma_1)}t+O(1)}$$

$$= t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}e^{O(1)},$$

also gleichmäßig

$$(35)\qquad g(s) = O\left(t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right)$$

und

$$(36)\qquad \frac{1}{g(s)} = O\left(t^{-k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

Ich setze nun

$$\frac{f(s)}{g(s)} = F(s).$$

Diese Funktion erfüllt alle Bedingungen des Hilfssatzes 5. Denn erstens ist sie im Gebiet regulär; zweitens ist auf dem linken Rand nach (32) und (36)

$$F(s) = O(t^k t^{-k})$$
$$= O(1);$$

drittens ist auf dem rechten Rand nach (33) und (36)

$$F(s) = O(1 \, . \, t^0)$$
$$= O(1);$$

viertens ist im Innern nach (34) und (36) gleichmäßig

$$F(s) = O\left(e^{\gamma t}t^{\mathrm{Max.}(0,-k)}\right)$$
$$= O\left(e^{\gamma' t}\right).$$

Nach Hilfssatz 5 ist also für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$F(s) = O(1),$$

also nach (35)

$$|f(s)| = |F(s)||g(s)|$$
$$= O\left(t^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

Damit ist der Hilfssatz 6 bewiesen.

Genau ebenso ergibt sich der

Hilfssatz 7: *Es sei* $\sigma_2 > \sigma_1$ *und* $f(s)$ *regulär für* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \leqq t_0$. *Auf dem linken Rande sei, alles bei zu* $-\infty$ *strebendem* t,

$$f(s) = O(|t|^k),$$

auf dem rechten Rand

$$f(s) = O(1),$$

im Innern gleichmäßig

$$f(s) = O\left(e^{\gamma|t|}\right).$$

Dann ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *gleichmäßig*

$$f(s) = O\left(|t|^{k\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

§ 4. Einige weitere Hilfssätze.

Hilfssatz[1] **8:** *Es sei* ε *fest und* > 0, x *eine positive ganze Zahl. Dann ist für wachsendes* x

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\left|\log\frac{x}{n}\right|} = O(1),$$

wo in $\sum'$ *das Glied* $n = x$ *fehlt. D. h.* $|\sum'|$ *ist unterhalb einer nur von* ε *abhängigen Schranke gelegen.*

Beweis: Siehe § 228 meines *Handbuchs*.

Hilfssatz 9: *Es sei* $a > 0$, $y > 0$, $T > 0$; *es werde* $\Delta = \Delta(y) = 2\pi i$ *bezw.* $= \pi i$ *bezw.* $= 0$ *für* $y > 1$ *bezw.* $y = 1$ *bezw.* $y < 1$ *gesetzt. Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left|\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{y^s}{s}ds - \Delta\right| \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{T}\dfrac{y^a}{|\log y|} & \text{für } 0 < y < 1 \text{ und } y > 1, \\ \dfrac{2}{T}a & \text{für } y = 1. \end{cases}$$

Beweis: Siehe z. B. § 86 meines *Handbuchs*.

---

1) Landau, **84**, S. 286.

Hilfssatz[1]) 10: *Für* $U \geqq 1$, $\gamma \geqq 0$, $w \gtreqless 0$ *ist*

$$\left| \int_1^U u^\gamma e^{iu(\log u - w)} du \right| < 23\, U^{\frac{1}{2}+\gamma} \tag{37}$$

und infolgedessen auch

$$\left| \int_1^U u^\gamma e^{-iu(\log u - w)} du \right| < 23\, U^{\frac{1}{2}+\gamma}.$$

Beweis: Die Strecke $u = \dfrac{e^{w-1}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{U}}}$ bis $u = e^{w-1}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{U}}\right)$

gehört ganz oder zum Teil oder gar nicht dem Innern des Intervalls $u = 1$ bis $u = U$ an; falls mindestens teilweise Überdeckung stattfindet $\left(\text{was } \dfrac{e^{w-1}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{U}}} < U \text{ zur Folge hat}\right)$ ist die gemeinsame Weglänge

---

1) Der springende Punkt ist, daß w auf der rechten Seite von (37) nicht vorkommt, was man a priori nur durch die für meine Zwecke unbrauchbare Abschätzung

$$\left| \int_1^U u^\gamma e^{iu(\log u - w)} du \right| \leqq \int_1^U u^\gamma du$$

erreichen kann, die bei festem γ nur $O\left(U^{1+\gamma}\right)$, statt, wie behauptet, $O\left(U^{\frac{1}{2}+\gamma}\right)$ liefert. Die Zahl 23 ließe sich leicht verkleinern; darauf kommt es aber nicht an; es wäre sogar für meine Zwecke ausreichend, wenn an ihrer Stelle eine von γ abhängige Größe stände. Daß in (37) die Zahl $\frac{1}{2}$ rechts durch keine kleinere absolute Konstante ersetzt werden kann, ist sicher. Denn sonst wäre gleichmäßig in w

$$\int_1^U e^{iu(\log u - w)} du = o\left(U^{\frac{1}{2}}\right),$$

also

$$\int_1^{U-\sqrt{U}} e^{iu(\log u - w)} du = o\left(U^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\int_{U-\sqrt{U}}^U e^{iu(\log u - w)} du = o\left(U^{\frac{1}{2}}\right),$$

was, wie man leicht konstatieren kann, bereits bei der speziellen Festsetzung $w = 1 + \log U$ nicht statthat.

$$\leqq e^{w-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{U}}-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{U}}}\right)=e^{w-1}\frac{\frac{2}{\sqrt{U}}+\frac{1}{U}}{1+\frac{1}{\sqrt{U}}}$$

$$< U\left(\frac{2}{\sqrt{U}}+\frac{1}{U}\right)$$

$$= 2\sqrt{U}+1$$

$$\leqq 3\sqrt{U}.$$

Der Beitrag jener Teilstrecke (falls sie überhaupt vorhanden ist) zum Integral ist daher absolut $\leqq 3\sqrt{U}.U^{\gamma}$. Der Hilfssatz ist also bewiesen, wenn es gelingt,

(38)
$$\left|{}'\!\!\int_1^U u^{\gamma} e^{iu(\log u - w)}\,du\right| < 20\,U^{\frac{1}{2}+\gamma}$$

zu beweisen, wo $'\!\int$ bedeutet, daß nur solche Punkte in Betracht kommen, für die $\frac{u}{e^{w-1}} \leqq \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{U}}}$ oder $\geqq 1+\frac{1}{\sqrt{U}}$, d. h.

$$\left|\log\frac{u}{e^{w-1}}\right| \geqq \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{U}}\right)$$

ist. Falls also überhaupt für $'\!\int$ noch Weg übrig geblieben ist (sonst ist $'\!\int = 0$, also (38) richtig), ist in jedem Punkte des Weges

(39)
$$|\log u + 1 - w| \geqq \frac{1}{2\sqrt{U}};$$

mag der Weg aus zwei getrennten Teilstrecken bestehen oder eine Strecke (die von 1 bis U reicht oder kürzer ist) sein, stets ist

$${}'\!\!\int_1^U = \int_{U_1}^{U_2} + \int_{U_3}^{U_4},$$

wo $1 \leqq U_1 \leqq U_2 \leqq U_3 \leqq U_4 \leqq U$ ist und für $U_1 \leqq u \leqq U_2$, $U_3 \leqq u \leqq U_4$ die Ungleichung (39) gilt.

Nun ist für $u \gtreqless e^{w-1}$

$$\int u^{\gamma} e^{iu(\log u - w)}\,du$$

$$= \int e^{iu(\log u - w)}\, i(\log u + 1 - w)\cdot\frac{u^{\gamma}}{i(\log u + 1 - w)}\,du$$

$$= e^{iu(\log u - w)} \frac{u^\gamma}{i(\log u + 1 - w)}$$

$$- \frac{1}{i} \int e^{iu(\log u - w)} \left(\frac{\gamma u^{\gamma-1}}{\log u + 1 - w} - \frac{u^{\gamma-1}}{(\log u + 1 - w)^2} \right) du.$$

Daher ist

$$\left| \int_{U_1}^{U_2} u^\gamma e^{iu(\log u - w)} du \right| \leqq \frac{U_1^\gamma}{\frac{1}{2\sqrt{U}}} + \frac{U_2^\gamma}{\frac{1}{2\sqrt{U}}}$$

$$+ \int_{U_1}^{U_2} \left(\frac{\gamma u^{\gamma-1}}{\frac{1}{2\sqrt{U}}} + \frac{u^{\gamma-1}}{(\log u + 1 - w)^2} \right) du$$

$$\leqq 2U^{\frac{1}{2}+\gamma} + 2U^{\frac{1}{2}+\gamma} + 2\sqrt{U} \int_1^U \gamma u^{\gamma-1} du + U^\gamma \int_{U_1}^{U_2} \frac{u^{-1}}{(\log u + 1 - w)^2} du$$

$$< 4U^{\frac{1}{2}+\gamma} + 2\sqrt{U}.U^\gamma + U^\gamma \int_{U_1}^{U_2} \frac{d}{du} \left(- \frac{1}{\log u + 1 - w} \right) du$$

$$= 6U^{\frac{1}{2}+\gamma} + U^\gamma \left(- \frac{1}{\log U_2 + 1 - w} + \frac{1}{\log U_1 + 1 - w} \right)$$

$$\leqq 6U^{\frac{1}{2}+\gamma} + U^\gamma (2\sqrt{U} + 2\sqrt{U})$$

$$= 10U^{\frac{1}{2}+\gamma},$$

ebenso

$$\left| \int_{U_3}^{U_4} u^\gamma e^{iu(\log u - w)} du \right| < 10U^{\frac{1}{2}+\gamma},$$

womit (38) bewiesen ist und damit der Hilfssatz 10.

§ 5. Beweis des Hauptsatzes.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben und zwar so klein, daß $Z(s)$ für $-\varepsilon \leqq \sigma < 0$ regulär ist[1]). Bei wachsendem $|t|$ ist nach (12)

$$Z(\alpha + 1 + \varepsilon + ti) = O(1);$$

nach (13) und dem Hilfssatz 4 ist

---

1) Nach der zweiten Voraussetzung des Hauptsatzes haben alle hinreichend kleinen positiven ε diese Eigenschaft.

$$(40)\quad Z(-\varepsilon+ti) = \frac{\Gamma(\gamma_1+\delta_1\varepsilon-\delta_1 ti)\ldots\Gamma(\gamma_\nu+\delta_\nu\varepsilon-\delta_\nu ti)}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1\varepsilon+\beta_1 ti)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-\beta_\mu\varepsilon+\beta_\mu ti)}\sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n(-\varepsilon+ti)}$$

$$= O\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\delta_1|t|}|t|^{\gamma_1+\delta_1\varepsilon-\frac{1}{2}}\ldots e^{-\frac{\pi}{2}\delta_\nu|t|}|t|^{\gamma_\nu+\delta_\nu\varepsilon-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}\beta_1|t|}|t|^{\alpha_1-\beta_1\varepsilon-\frac{1}{2}}\ldots e^{-\frac{\pi}{2}\beta_\mu|t|}|t|^{\alpha_\mu-\beta_\mu\varepsilon-\frac{1}{2}}}\right)\cdot O(1),$$

also nach (14) und (15), wenn der gemeinsame Wert beider Seiten von (14) mit $\frac{H}{2}$ bezeichnet wird,

$$Z(-\varepsilon+ti) = O\left(|t|^{\Sigma\gamma-\Sigma\alpha+\varepsilon\Sigma\delta+\varepsilon\Sigma\beta-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}}\right)$$
$$= O\left(|t|^{\eta+H\varepsilon}\right).$$

Mit Rücksicht hierauf und auf die Annahme (18) ergibt sich nach den Hilfssätzen 6 und 7 für $-\varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha+1+\varepsilon$ gleichmäßig

$$(41)\qquad Z(s) = O\left(|t|^{(\eta+H\varepsilon)\frac{\alpha+1+\varepsilon-\sigma}{\alpha+1+2\varepsilon}}\right).$$

Nun sei x eine positive ganze Zahl. Über eine Funktion $T = T(x) > 0$, die mit x unendlich wird, werde ich noch verfügen. Alle folgenden Abschätzungen beziehen sich, das obige ε fest gedacht, auf ganzzahlig ins Unendliche wachsendes x.

Den Ausgangspunkt bildet die — aus offenbar erlaubter Vertauschung von Integration und Summation hervorgehende — Identität

$$\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds = \int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{x^s}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}\,ds$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds,$$

$$(42)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds - 2\pi i\sum_{n=1}^{x-1}c_n - \pi i c_x \\ \displaystyle\quad = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds - \varDelta\left(\frac{x}{n}\right)\right),\end{cases}$$

wo $\varDelta(y)$ die im Hilfssatz 9 erklärte Bedeutung hat.

Nach Hilfssatz 9 ist, wenn in $\sum'$ das Glied $n = x$ weggelassen ist,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\,ds-\varDelta\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right|$$

$$\leqq \frac{2}{T}(\alpha+1+\varepsilon)|c_x|+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,|c_n|\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha+1+\varepsilon}}{\left|\log\frac{x}{n}\right|}$$

$$(43)\qquad = \frac{2}{T}(\alpha+1+\varepsilon)|c_x|+\frac{2}{T}x^{\alpha+1+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{|c_n|}{n^{\alpha+1+\varepsilon}\left|\log\frac{x}{n}\right|},$$

wo $\sum'$ nicht nur konvergiert, sondern sogar $O(1)$ ist, da nach Voraussetzung (11) für alle n

$$|c_n|<cn^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$$

ist und Hilfssatz 8 $\left(\text{mit } \frac{\varepsilon}{2} \text{ statt } \varepsilon\right)$ Platz greift. (42) und (43) ergeben also, wenn noch $\pi i c_x$ zuvor von (42) subtrahiert und

$$c_x = O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)$$

verwendet wird,

$$\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds-2\pi i\sum_{n=1}^{x}c_n$$

$$= O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)+O\left(\frac{x^{\alpha+\varepsilon}}{T}\right)+O\left(\frac{x^{\alpha+1+\varepsilon}}{T}\right)$$

$$(44)\qquad = O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right)+O\left(\frac{x^{\alpha+1+\varepsilon}}{T}\right).$$

Jetzt wende ich den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $\alpha+1+\varepsilon\pm Ti$, $-\varepsilon\pm Ti$ an. x sei gleich so groß, daß alle Pole von $Z(s)$, die etwa im Streifen $0\leqq\sigma\leqq\alpha+1$ liegen, dem Innern des Rechtecks angehören. Dann ist der Integrand auf dem Rande des Rechtecks regulär; die Summe der Residuen im Innern ist genau das $S(x)$ der Behauptung, und der Cauchysche Satz ergibt

$$\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds = 2\pi i S(x)+\int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon-Ti}+\int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon+Ti}$$

$$+\int_{-\varepsilon+Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti},$$

also in Verbindung mit (44)

$$(45)\quad \begin{cases} 2\pi i\left(\sum_{n=1}^{x} c_n - S(x)\right) = \int_{\alpha+1+\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon-Ti} + \int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon+Ti} + \int_{-\varepsilon+Ti}^{\alpha+1+\varepsilon+Ti} \\ \qquad + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha+1+\varepsilon}}{T}\right). \end{cases}$$

Hierin ist im ersten und dritten Integral rechts, die sich auf die horizontalen Wege beziehen, nach (41) gleichmäßig

$$\frac{x^s}{s} Z(s) = O\left(\frac{x^\sigma}{T} T^{(\eta+H\varepsilon)\frac{\alpha+1+\varepsilon-\sigma}{\alpha+1+2\varepsilon}}\right),$$

folglich, da die Größe hinter O die Gestalt e hoch einer linearen Funktion von σ hat, also ihren größten Wert in mindestens einem der beiden Endpunkte des Intervalls $-\varepsilon \ldots \alpha+1+\varepsilon$ annimmt, gleichmäßig

$$\frac{x^s}{s} Z(s) = O\left(\frac{x^{-\varepsilon}}{T} T^{\eta+H\varepsilon}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha+1+\varepsilon}}{T}\right).$$

Das ist, da der Weg feste Länge hat, zugleich eine Abschätzung des ersten und dritten Integrals; (45) verwandelt sich dadurch in

$$(46)\quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{x} c_n - S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon+Ti} \frac{x^s}{s} Z(s)\,ds + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) \\ \qquad + O\left(\frac{x^{\alpha+1+\varepsilon}}{T}\right) + O\left(x^{-\varepsilon} T^{\eta-1+H\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Hierin ist

$$(47)\qquad \int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon+Ti} = \int_{-\varepsilon-Ti}^{-\varepsilon-\frac{1}{H}i} + O\left(x^{-\varepsilon}\right) + \int_{-\varepsilon+\frac{1}{H}i}^{-\varepsilon+Ti}.$$

Nach Hilfssatz 3 ist für $\sigma = -\varepsilon$ und positiv oder negativ absolut wachsendes t

$$\frac{\Gamma(\gamma_1-\delta_1 s)\ldots\Gamma(\gamma_\nu-\delta_\nu s)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1 s)\ldots\Gamma(\alpha_\mu+\beta_\mu s)} = \frac{\Gamma(\gamma_1+\delta_1\varepsilon-\delta_1 ti)\ldots}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1\varepsilon+\beta_1 ti)\ldots}$$

$$= B\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\delta_1|t|}\,|t|^{\gamma_1+\delta_1\varepsilon-\frac{1}{2}}\,e^{-\delta_1 ti(\log|t|+\log\delta_1-1)}\ldots}{e^{-\frac{\pi}{2}\beta_1|t|}\,|t|^{\alpha_1-\beta_1\varepsilon-\frac{1}{2}}\,e^{\beta_1 ti(\log|t|+\log\beta_1-1)}\ldots}\,e^{O\left(\frac{1}{|t|}\right)},$$

wo B je[1]) eine von 0 verschiedene komplexe Konstante ist, also

$$= B|t|^{\eta + H\varepsilon} e^{-Hti\log|t| - tiA}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right),$$

wo

$$\sum \delta(\log \delta - 1) + \sum \beta(\log \beta - 1) = A$$

gesetzt ist. Andererseits ist

$$\frac{1}{-\varepsilon + ti} = \frac{-i}{t}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$$

$$= \mp i \frac{1}{|t|}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right).$$

Die Gleichung (40) ergibt also, $\mp iB = A$ gesetzt,

$$\frac{Z(-\varepsilon + ti)}{-\varepsilon + ti}$$

$$= A|t|^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{-Hti\log|t| - tiA}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n(-\varepsilon + ti)}$$

$$(48) \quad \begin{cases} = A|t|^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{-Hti\log|t| - tiA} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n(-\varepsilon + ti)} \\ \qquad + O\left(|t|^{\eta - 2 + H\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Das O-Glied in (48) ist für alle $|t| \geqq \frac{1}{H}$ absolut $\leqq c|t|^{\eta - 2 + H\varepsilon}$

Das Integral seines Produktes mit $x^{-\varepsilon + ti} i$ von $-T$ bis $-\frac{1}{H}$ oder $\frac{1}{H}$ bis T ist also mit Rücksicht auf (16)

$$O\left(x^{-\varepsilon} \int_{\frac{1}{H}}^{T} t^{\eta - 2 + H\varepsilon}\, dt\right) = O\left(x^{-\varepsilon} T^{\eta - 1 + H\varepsilon}\right),$$

also gegen das letzte Glied in (46) zu vernachlässigen. Hieraus folgt in Verbindung mit (46), (47) und (48)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{x} c_n - S(x) = O\left(x^{\alpha + \varepsilon}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha + 1 + \varepsilon}}{T}\right) + O\left(x^{-\varepsilon} T^{\eta - 1 + H\varepsilon}\right) \\ \displaystyle + \frac{1}{2\pi} A_1 \int_{-T}^{-\frac{1}{H}} x^{-\varepsilon + ti} |t|^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{-Hti\log|t| - tiA} \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n(-\varepsilon + ti)}\, dt \\ \displaystyle + \frac{1}{2\pi} A_2 \int_{\frac{1}{H}}^{T} x^{-\varepsilon + ti} t^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{-Hti\log t - tiA} \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n(-\varepsilon + ti)}\, dt. \end{cases}$$

---

1) Für $t > 0$ bezw. $t < 0$.

Diese beiden Integrale sind, $t = -\frac{u}{H}$ bezw. $t = \frac{u}{H}$ gesetzt,

$$\int_1^{HT} x^{-\varepsilon \mp \frac{u}{H} i} \left(\frac{u}{H}\right)^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{\pm ui \log \frac{u}{H} \pm \frac{u}{H} i A} \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n\left(-\varepsilon \mp \frac{u}{H} i\right)} \frac{du}{H}$$

(50) $$= \frac{x^{-\varepsilon}}{H^{\eta + H\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{-\lambda_n \varepsilon} \int_1^{HT} u^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{\pm ui\left(\log u - \log H + \frac{A}{H} - \frac{\log x}{H} - \frac{\lambda_n}{H}\right)} du$$

Nach dem Hilfssatz 10 ist für alle hinreichend großen x $\left(\text{wenn nur } T \geqq \frac{1}{H} \text{ ist}\right)$

$$\left| \int_1^{HT} u^{\eta - 1 + H\varepsilon} e^{\pm ui\left(\log u - \log H + \frac{A}{H} - \frac{\log x}{H} - \frac{\lambda_n}{H}\right)} du \right|$$

$$\leqq 23\,(HT)^{\eta - \frac{1}{2} + H\varepsilon},$$

wo der Buchstabe n herausgefallen ist, ohne daß hierdurch die aus (50) entstehende Reihe divergent wird. Im Gegenteil!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{-\lambda_n \varepsilon}$$

ist sogar eine von x unabhängige Konstante; die rechte Seite von (50) ist daher

$$O\left(x^{-\varepsilon} T^{\eta - \frac{1}{2} + H\varepsilon}\right),$$

und (49) liefert

(51) $$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} c_n - S(x) &= O\left(x^{\alpha + \varepsilon}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha + 1 + \varepsilon}}{T}\right) \\ &\quad + O\left(x^{-\varepsilon} T^{\eta - \frac{1}{2} + H\varepsilon}\right). \end{aligned} \right.$$

Hierin setze ich

$$T = x^{\frac{\alpha + 1}{\eta + \frac{1}{2}}};$$

dann liefert (51)

$$\sum_{n=1}^{x} c_n - S(x) = O\left(x^{\alpha + \varepsilon}\right) + O\left(x^{(\alpha + 1)\frac{2\eta - 1}{2\eta + 1} + \varepsilon}\right)$$

$$+ O\left(x^{(\alpha + 1)\frac{2\eta - 1}{2\eta + 1} + H\varepsilon \frac{\alpha + 1}{\eta + \frac{1}{2}}}\right);$$

dies gilt für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist also

$$\sum_{n=1}^{x} c_n - S(x) = O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) + O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right),$$

also, da nach (17)

$$\alpha \leqq (\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}$$

ist,

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = S(x) + O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right). \tag{52}$$

(52) ist für ganzzahlig wachsendes x bewiesen; daraus folgt es aber auch für stetig wachsendes x; denn beim Übergang von x zu $[x]$ ändert sich $\sum_{n=1}^{x} c_n$ gar nicht und $S(x)$ um eine endliche Anzahl von Gliedern der Form

$$\begin{aligned} A(x^{\varrho}\log^m x - [x]^{\varrho}\log^m [x]) &= A\int_{[x]}^{x} \frac{d}{du}(u^{\varrho}\log^m u)\,du \\ &= A\int_{[x]}^{x} (\varrho u^{\varrho-1}\log^m u + m u^{\varrho-1}\log^{m-1} u)\,du \\ &= O\left(x^{\Re(\varrho)-1}\log^m x\right) \\ &= O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) \\ &= O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Zweiter Teil.

Anwendungen des Hauptsatzes.

Erstes Kapitel.

Teilerprobleme.

§ 6. Hilfssätze über Teileranzahlen.

Hilfssatz[1]) **11**: *Die Anzahl $T(n)$ der (positiven ganzen) Teiler der (positiven ganzen) Zahl n genügt für jedes $\varepsilon > 0$ der Relation*

$$T(n) = O(n^\varepsilon).$$

Beweis: Wenn $n \geqq 2$ und, in Potenzen verschiedener Primzahlen zerlegt,

$$n = \prod_{p/n} p^\nu$$

ist, so ist

$$T(n) = \prod_{p/n} (\nu + 1),$$

$$\frac{T(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p/n} \frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}}.$$

Nun ist (ε fest gedacht!) bei festem p und variablem $\nu = 1, 2, \ldots$ der Ausdruck $\frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}}$ beschränkt, da er ja für $\nu = \infty$ gegen 0 strebt; für jedes $p \geqq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ und jedes zugehörige $\nu \geqq 1$ ist er sogar $\leqq 1$, weil ja dann

$$\frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}} \leqq \frac{\nu+1}{2^\nu}$$

$$\leqq 1$$

ist; daher ist, falls es überhaupt mindestens einen Primteiler von n gibt, der $\geqq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ist,

$$\prod_{\substack{p/n \\ p \geqq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}}} \frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}} \leqq 1;$$

---

1) Dieser Satz kommt zuerst bei Herrn Runge vor: *Über die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$* [Acta Mathematica, Bd. VII (1885), S. 173—186], S. 181—183. Ich gebe hier die Rungesche Begründung in unwesentlicher Vereinfachung an, obgleich ich in § 60 meines *Handbuchs* einen viel schärferen Satz über $T(n)$ im Anschluß an Herrn Wigert bewiesen habe.

da nur endlich viele Primzahlen $p < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ existieren, ist also $\frac{T(n)}{n^{\varepsilon}}$ beschränkt, d. h. unterhalb einer von n unabhängigen Schranke gelegen.

Hilfssatz[1]) **12**: *Es sei $k \geqq 1$. Die Anzahl $T_k(n)$ der Zerlegungen von n in k positive ganze Faktoren, d. h. der Lösungen von*

$$u_1 \ldots u_k = n$$

in positiven ganzen u genügt für jedes $\varepsilon > 0$ der Relation

$$T_k(n) = O\left(n^{\varepsilon}\right).$$

Beweis: Für $k = 1$ ist dies wegen

$$T_1(n) = 1$$

trivial; für $k = 2$ ist es durch den vorigen Hilfssatz bewiesen. Es sei also $k > 2$, und die Behauptung werde für $k-1$ als bewiesen angenommen. Offenbar ist

$$T_k(n) = \sum_{u/n} T_{k-1}\left(\frac{n}{u}\right).$$

Nach dem als bewiesen angenommenen gibt es eine (nur von k und ε abhängige) Konstante c, so daß für alle $n \geqq 1$

$$T_{k-1}(n) \leqq c n^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

ist; alsdann ist für alle $n \geqq 1$ und alle u/n

$$T_{k-1}\left(\frac{n}{u}\right) \leqq c\left(\frac{n}{u}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$
$$\leqq c n^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

und daher für alle $n \geqq 1$

$$T_k(n) \leqq \sum_{u/n} c n^{\frac{\varepsilon}{2}}$$
$$= c n^{\frac{\varepsilon}{2}} T_2(n)$$
$$= O\left(n^{\frac{\varepsilon}{2}} . n^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$
$$= O\left(n^{\varepsilon}\right).$$

1) Wird erst in § 8 gebraucht.

§ 7. $\zeta^2(s)$ und das Dirichletsche Teilerproblem.

Ich behaupte, daß die Funktion

$$Z(s) = \zeta^2(s)$$

alle Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt.

1) Es ist nämlich für $\sigma > 1$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s}$$

und nach Hilfssatz 11

$$T(n) = O\left(n^{\varepsilon}\right),$$

womit (11) mit $\alpha = 0$ erfüllt ist.

2) Ferner ist bekanntlich[1]) $\zeta^2(s)$ in der ganzen Ebene meromorph und besitzt nur den einen Pol zweiter Ordnung $s = 1$, übrigens, was bald zur Konstantenbestimmung gebraucht wird, mit der Reihenentwicklung[2])

$$Z(s) = \left(\frac{1}{s-1} + C + \cdots\right)^2$$
$$= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + \cdots,$$

wo C die Eulersche Konstante ist.

3) und 4) Nach Riemann[3]) ist

$$(53) \qquad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s),$$

also speziell für $\sigma < 0$

$$\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta^2(s) = \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{2s-1}\zeta^2(1-s)$$
$$= \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{2s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T(n)}{n^{1-s}}$$
$$= \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T(n)}{\pi n}(\pi^2 n)^s,$$

1) Riemann; vergl. z. B. *Handbuch*, § 67.

2) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 43 und die historische Bemerkung auf S. 887 ebenda.

3) *Handbuch*, § 70.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)Z(s) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T(n)}{\pi n}e^{s\log(\pi^2 n)},$$

wo die Reihe rechts absolut konvergiert; (13) ist erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$e_n = \frac{T(n)}{\pi n}, \quad \lambda_n = \log(\pi^2 n),$$

$$\mu = 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2},$$

$$\nu = 2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}.$$

Wie erforderlich, sind die β und δ positiv.

5) Es ist

$$\Sigma\beta = \Sigma\delta = 1.$$

6) Es ist

$$\eta = \Sigma\gamma - \Sigma\alpha + \frac{\mu-\nu}{2}$$
$$= 1,$$

so daß (16) und (17) gelten.

7) In jedem festen Streifen ist bekanntlich [1])

$$\zeta(s) = O(|t|^c),$$

also

$$Z(s) = O(|t|^{2c})$$
$$= O(e^{|t|}).$$

Der Hauptsatz ist also anwendbar; es ist $R(x)$ gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{s-1}$ in

$$\frac{x^s}{s}Z(s) = xx^{s-1}\frac{1}{1+(s-1)}Z(s)$$

$$= x(1+(s-1)\log x + \cdots)(1-(s-1)+\cdots)\left(\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2C}{s-1}+\cdots\right)$$

$$= \frac{x}{(s-1)^2} + \frac{x\log x + (2C-1)x}{s-1} + \cdots;$$

1) Vergl. z. B. *Handbuch*, S. 813. Hier und bei jeder Z-Funktion, die die Voraussetzungen 1) bis 6) erfüllt, braucht übrigens 7), d. h. die Relation (18) nur z. B. für $-\frac{1}{10} \leqq \sigma \leqq \alpha + 1 + \frac{1}{10}$ verifiziert zu werden, indem $Z(s)$ für $\sigma \geqq \alpha + 1 + \frac{1}{10}$ beschränkt ist und bei festem $\sigma_1 < -\frac{1}{10}$ für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq -\frac{1}{10}$ nach (13) und dem Hilfssatz 4 gleichmäßig $O\left(|t|^{\eta - H\sigma_1}\right)$ ist.

die Relation des Hauptsatzes ergibt daher

$$(2) \qquad \tau(x) = \sum_{n=1}^{x} T(n) = x \log x + (2C-1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Ich möchte nachträglich konstatieren, daß die Anwendung des Satzes 54 meines *Handbuchs* auf $\zeta^2(s)+\zeta'(s)-2C\zeta(s)$ genau zu $\frac{1}{2}+\varepsilon$ führen würde.

Jener Satz[1]) lautet in der hier in Betracht kommenden Spezialisierung: „Es sei für jedes $\varepsilon > 0$

$$a_n = O\left(n^{\varepsilon}\right),$$

und die für $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$(54) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

definierte Funktion $F(s)$ sei für $\sigma > \gamma$, wo $\gamma < 1$ ist, regulär und gleichmäßig $O(|t|^{\beta})$, wo $\beta > 0$ ist. Dann konvergiert die Reihe (54) für $\sigma > \frac{\gamma+\beta}{1+\beta}$."

Im vorliegenden Fall ist nach Hilfssatz 11

$$a_n = T(n) - \log n - 2C$$
$$= O\left(n^{\varepsilon}\right).$$

Die durch (54) definierte Funktion $\zeta^2(s)+\zeta'(s)-2C\zeta(s)$ ist eine ganze Funktion. Bei festem $\varepsilon > 0$ ist bekanntlich[2]) für $\sigma \geqq 0$ gleichmäßig

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

und

$$\zeta'(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

also

$$F(s) = \zeta^2(s)+\zeta'(s)-2C\zeta(s)$$
$$= O\left(|t|^{1+2\varepsilon}\right).$$

β kann also, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird, jede Zahl > 1 bedeuten; Satz 54 liefert also die Konvergenz der Reihe (54) für $\sigma > \frac{1}{2}$. Das bedeutet aber

$$\sum_{n=1}^{x} T(n) - \sum_{n=1}^{x} \log n - \sum_{n=1}^{x} 2C = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

1) *Handbuch*, § 238.

2) Vergl. z. B. *Handbuch*, S. 813.

$$\sum_{n=1}^{x} T(n) = x\log x - x + O(\log x) + 2Cx + O(1) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

(55) $$= x\log x + (2C-1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Kein $\gamma > 0$ wäre vorteilhafter als $\gamma = 0$. Für $\sigma \geqq \gamma (0 < \gamma < 1)$ gilt zwar nach Herrn Lindelöf[1]) gleichmäßig bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}\right),$$

woraus leicht[2]) auch

$$\zeta'(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}\right)$$

folgt, also

$$F(s) = O\left(|t|^{1-\gamma+2\varepsilon}\right);$$

aber für $\beta = 1-\gamma+2\varepsilon$ kommt doch nur jede Zahl $> \frac{\gamma+(1-\gamma)}{1+(1-\gamma)} = \frac{1}{2-\gamma}$ heraus, wodurch $\frac{1}{2}$ nicht verbessert wird[3]). Auch kein $\gamma < 0$ wäre besser als $\gamma = 0$. Denn für $\sigma \geqq \gamma$, wo $\gamma < 0$ ist, hat man nur

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\gamma+\varepsilon}\right),$$

was zu jeder Zahl $> \frac{\gamma+(1-2\gamma)}{1+(1-2\gamma)} = \frac{1}{2}$ führt.

Übrigens läßt sich der Satz 54 ohne weiteres, wie ein Blick auf seinen Beweis lehrt, so modifizieren, daß auf Regularität von $F(s)$ für $\sigma > \gamma$ verzichtet und nur verlangt wird, daß $F(s)$ für $\sigma > \gamma$ meromorph[4]) sei und dort bloß endlich viele Pole habe.

---

1) *Handbuch*, § 240.

2) Es ist, wenn $0 < \varepsilon < \gamma$ angenommen wird, $|\zeta'(s)| \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ mal Maximum von $|\zeta(s)|$ auf dem Kreis um s mit dem Radius ε, also $O\left((|t|+\varepsilon)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma-\varepsilon}{2}+\varepsilon}\right) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon}\right)$; daher ist $\zeta'(s) = O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}\right)$ bei jedem $\varepsilon > 0$.

3) Übrigens rechtfertigt obiges die in der Einleitung gemachte Andeutung, daß für die Erfüllung eines Kroneckerschen Desideratums der von Herrn Schnee allein herrührende Teil $0 < \beta < 1$ des Satzes 54 genügt. Denn man nehme das positive $\varepsilon < \frac{1}{3}$ an, setze $\gamma = 3\varepsilon$, wodurch obiges $\beta = 1-\varepsilon < 1$ wird, etc.

4) Natürlich läßt sich noch weiter verallgemeinern.

Dann kommt eben nicht

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = O\left(x^{\frac{\gamma+\beta}{1+\beta}+\varepsilon}\right)$$

heraus, sondern, wenn $S(x)$ die Summe der Residuen von $\frac{x^s}{s} F(s)$ für $\sigma > \gamma$ bezeichnet,

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = S(x) + O\left(x^{\frac{\gamma+\beta}{1+\beta}+\varepsilon}\right);$$

dafür kann auch

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = R(x) + O\left(x^{\frac{\gamma+\beta}{1+\beta}+\varepsilon}\right)$$

gesetzt werden, wo $R(x)$ sich nur auf die Pole des Streifens $\frac{\gamma+\beta}{1+\beta} < \sigma \leqq 1$ bezieht. Die Anwendung des so modifizierten Satzes auf $\zeta^2(s)$ direkt erspart die Betrachtung von $\zeta'(s)$ und liefert genau (55).

§ 8[1]). $\zeta^k(s)$ und das Piltzsche Teilerproblem.

Ich setze jetzt für ein festes ganzes $k \geqq 2$

$$Z(s) = \zeta^k(s)$$

und behaupte, daß diese Funktion alle Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt.

1) Für $\sigma > 1$ ist

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s}$$

und nach Hilfssatz 12

$$T_k(n) = O(n^{\varepsilon}),$$

so daß $\alpha = 0$ genommen werden kann.

2) $\zeta^k(s)$ ist bis auf den Pol $k$ter Ordnung $s = 1$ regulär.

3) und 4) Nach (53) ist

$$\Gamma^k\left(\frac{s}{2}\right) Z(s) = \Gamma^k\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{ks-\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^{1-s}}$$

$$= \Gamma^k\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{\pi^{\frac{k}{2}} n} e^{s \log(\pi^k n)},$$

1) Dem Leser, der gern schneller fortschreiten will, sei gesagt, daß der wichtige § 10 unabhängig von §§ 8—9 gelesen werden kann.

also (13) erfüllt und dabei

$$e_n = \frac{T(n)}{\pi^{\frac{k}{2}} n}, \quad \lambda_n = \log(\pi^k n), \quad \mu = \nu = k, \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

$$\beta_1 = \cdots = \beta_k = \frac{1}{2} > 0, \quad \gamma_1 = \cdots = \gamma_k = \frac{1}{2},$$

$$\delta_1 = \cdots = \delta_k = \frac{1}{2} > 0.$$

5) Es ist

$$\Sigma\beta = \Sigma\delta = \frac{k}{2}.$$

6) Es ist

$$\eta = \Sigma\gamma - \Sigma\alpha + \frac{\mu - \nu}{2}$$
$$= \frac{k}{2},$$

was $\geqq 1$ und $\geqq \alpha + \frac{1}{2}$ ist.

7) In jedem festen Streifen ist

$$\zeta(s) = O(|t|^c),$$

also

$$Z(s) = O(|t|^{kc})$$
$$= O(e^{|t|}).$$

Der Hauptsatz liefert also

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{x} T_k(n) = R(x) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right),$$

wo $R(x)$ das Residuum von

$$\frac{x^s}{s} \zeta^k(s)$$

im Punkte $s = 1$ ist. Dasselbe hat aber bekanntlich[1]) den Wert

$$x(A_k \log^{k-1} x + \cdots + A_1),$$

wo die A gewisse Konstanten bezeichnen.

Der Schnee-Landausche Satz 54 in der ursprünglichen[2])

1) Vergl. oben, § 1.

2) Zur Erzeugung einer für $\sigma > 0$ regulären Funktion sind nur die Konstanten $B_1, \ldots, B_k$ so zu wählen, daß $\zeta^k(s) + B_k \zeta^{(k-1)}(s) + \cdots + B_1 \zeta(s)$ im Punkte $s = 1$ regulär, also eine ganze Funktion ist.

oder der oben modifizierten Form hätte offenbar zu $\frac{0+\frac{k}{2}}{1+\frac{k}{2}} = \frac{k}{k+2}$ statt des klassischen Piltzschen Wertes $\frac{k-1}{k}$ geführt; für $k=2$ sind beide Zahlen gleich $\left(\text{nämlich } \frac{1}{2}\right)$; für jedes $k \geqq 3$ ist $\frac{k}{k+2} < \frac{k-1}{k}$ wegen $k^2 < k^2+k-2$. Andererseits ist mein $\frac{k-1}{k+1}$ für jedes $k \geqq 3$ besser als $\frac{k}{k+2}$, indem $k^2+k-2 < k^2+k$ ist.

Nun ist es noch von Interesse, festzustellen, was durch die Piltzsche oder meine elementare Reduktionsmethode[1]) aus Voronoïs Wert $\frac{1}{3}$ bei $k=2$ für die größeren k folgt. Da es sich für mich nur um die Exponenten von x handelt, ist es eine hinreichende Ausnutzung des Voronoïschen Ergebnisses für meinen vorliegenden Zweck, wenn ich es nur in der Form

$$(56) \qquad \tau_2(x) = x \log x + (2C-1)x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

verwende. Es fragt sich zunächst, ob bei $\tau_3(x)$ im O-Glied vor dem $+\varepsilon$ mein heutiges $\frac{1}{2}$ sich aus dem $\frac{1}{3}$ bei $\tau_2(x)$ ergibt oder nicht, u. s. w. für die $k>3$. Die Antwort lautet für $k=3$ und für jedes $k>3$ negativ. Ich möchte — wenn auch unter nur kurzer Andeutung der Zwischenrechnungen — dies ausführen, um alsdann für jedes k das Ergebnis der verschiedenen Methoden [1) Voronoï, 2) Piltz, 3) Schnee-Landau, 4) der heutigen] zu vergleichen.

1) Es handelt sich also darum, von (56) ausgehend sukzessive dadurch zu $\tau_k(x)$ aufzusteigen, daß man elementar aus der Identität

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{y} \tau_{k-1}\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{a_1 \ldots a_{k-1} \leqq z} \tau\left(\frac{x}{a_1 \ldots a_{k-1}}\right) - \tau_{k-1}(z)\,\tau(y)$$

bezw. allgemeiner, wenn ν eine beliebige positive ganze Zahl $<k$

---

1) Abschätzung endlicher Summen und Schluß von $k-1$ auf k in der anfangs zitierten Abhandlung aus den Transactions.

ist, aus der Identität[1])

$$\tau_k(x) = \sum_{a_1 \ldots a_{k-\nu} \leq y} \tau_\nu\left(\frac{x}{a_1 \ldots a_{k-\nu}}\right) + \sum_{a_1 \ldots a_\nu \leq z} \tau_{k-\nu}\left(\frac{x}{a_1 \ldots a_\nu}\right) - \tau_\nu(z)\,\tau_{n-\nu}(y)$$

weiterschließt; hierbei bezeichnen y und z beliebig wählbare Funktionen von x, deren Produkt x ist und die $\geqq 1$ für große x sind. D. h. für τ_ν und $\tau_{k-\nu}$ wird die schon gefundene Abschätzung eingesetzt, und es werden für die bei der Rechnung auftretenden Summen

$$\sum_{a_1 \ldots a_\nu \leq x} \frac{\log^q (a_1 \ldots a_\nu)}{a_1 \ldots a_\nu} = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{T_\nu(n) \log^q n}{n}$$

(und entsprechend mit $n-\nu$ statt ν) die aus τ_ν bezw. $\tau_{n-\nu}$ fließenden Abschätzungen benutzt. Dabei ergeben sich — wie der Leser unschwer[2]) konstatieren wird — als größte O-Glieder, wenn die Abschätzung von τ_ν auf $O\left(x^{a+\varepsilon}\right)$, die von $\tau_{n-\nu}$ auf $O\left(x^{b+\varepsilon}\right)$ genau angenommen wird, wo $a<1$, $b<1$ ist,

$$O\sum_{n=1}^{y} T_{k-\nu}(n)\frac{x^{a+\varepsilon}}{n^{a+\varepsilon}} + O\sum_{n=1}^{z} T_\nu(n)\frac{x^{b+\varepsilon}}{n^{b+\varepsilon}}$$

$$= O\left(x^{a+\varepsilon}\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{n^a}\right) + O\left(x^{b+\varepsilon}\sum_{n=1}^{z}\frac{1}{n^b}\right) \qquad {}^{3})$$

$$= O\left(x^{a+\varepsilon}y^{1-a}\right) + O\left(x^{b+\varepsilon}z^{1-b}\right);$$

die günstigste Wahl ist, daß man y durch

$$x^a y^{1-a} = x^b z^{1-b} = xy^{b-1}$$

1) Das folgt aus

$$\tau_k(x) = \sum_{a_1 \ldots a_k \leq x} (1.1 \ldots 1)(1.1 \ldots 1),$$

indem erst die Systeme mit $a_1 \ldots a_{k-\nu} \leq y$, dann die mit $a_{k-\nu+1} \ldots a_k \leq z$ berücksichtigt werden und dann die dabei doppelt gezählten in Abrechnung gebracht werden.

2) Vergl. S. 11—14 meiner Arbeit in den Transactions.

3) Übrigens ist auch ohne den Hilfssatz 12, den ich hier anwende, leicht für $\vartheta < 1+\varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{z} \frac{T_m(n)}{n^\vartheta} = O\left(x^{1-\vartheta+\varepsilon}\right)$$

beweisbar, nämlich durch partielle Summation.

bestimmt, d. h.

$$y = x^{\frac{1-a}{2-a-b}}$$

setzt, was

$$O\left(x^a x^{\frac{(1-a)^2}{2-a-b}} x^\varepsilon\right) = O\left(x^{\frac{1-ab}{2-a-b}+\varepsilon}\right)$$

liefert. Mit anderen Worten: Aus a bei τ_ν, b bei τ_μ ($\nu \geqq 1$, $\mu \geqq 1$) ergibt sich $\frac{1-ab}{2-a-b}$ bei $\tau_{\nu+\mu}$. Das ist genau dieselbe Zahl, welche ein allgemeiner Satz[1]) (der aber hier nicht anwendbar ist, da es sich nicht um konvergente Dirichletsche Reihen handelt) für das Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

liefert, falls rechts die erste Reihe für $\sigma > a$ ($a < 1$) konvergiert, für $\sigma > 1$ absolut, die zweite für $\sigma > b$ ($b < 1$) konvergiert, für $\sigma > 1$ absolut.

Was ist nun bei τ_k die durch elementares Weiterschließen auf Grund der Rekursionsformel

$$c_k = \underset{1 \leqq \nu \leqq k-1}{\text{Min.}} \frac{1 - c_\nu c_{k-\nu}}{2 - c_\nu - c_{k-\nu}}$$

vom Voronoïschen Anfang $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{3}$ aus sich ergebende Zahl c_k? Es wird übersichtlicher, wenn man

$$1 - c_k = v_k$$

einführt, also

$$v_k = \underset{1 \leqq \nu \leqq k-1}{\text{Max.}} \frac{v_\nu v_{k-\nu}}{v_\nu + v_{k-\nu}}$$

setzt. Man erkennt unschwer[2]), daß herauskommt:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{2}{3}, \quad v_3 = \frac{2}{5}, \quad v_4 = \frac{1}{3}, \quad v_5 = \frac{1}{4}, \quad v_6 = \frac{2}{9}, \ldots,$$

---

1) Vergl. § 214 des *Handbuchs*, wo zu setzen ist:

$$\varrho = a + \varepsilon, \quad \tau = 1 - a, \quad \varrho' = b + \varepsilon, \quad \tau' = 1 - b.$$

2) Die Zahlen $w_k = \frac{2}{v_k}$ genügen nämlich der Rekursionsformel

$$w_k = \underset{1 \leqq \nu \leqq k-1}{\text{Min.}} (w_\nu + w_{k-\nu}),$$

bilden also die abwechselnd um 1 und 2 fortschreitende Reihe 2, 3, 5, 6, 8, 9, ...

allgemein

$$v_k = \begin{cases} \frac{4}{3k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{4}{3} & \text{bei geradem } k, \\ \frac{4}{3k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{4}{3+\frac{1}{k}} & \text{bei ungeradem } k. \end{cases}$$

Es gibt v_k abgesehen vom ε die Abweichung des Exponenten von x im O-Glied der Formel für $\tau_k(x)$ von 1 an.

2) Das Piltzsche Resultat ergab bloß, wenn p_k die entsprechende Zahl ist,

$$p_1 = 1, \; p_2 = \frac{1}{2}, \; p_3 = \frac{1}{3}, \; p_4 = \frac{1}{4}, \; p_5 = \frac{1}{5}, \; p_6 = \frac{1}{6}, \cdots,$$

allgemein

$$p_k = \frac{1}{k};$$

für jedes $k > 1$ ist

$$v_k > p_k,$$

also v_k besser.

3) Die Anwendung des Schnee-Landauschen Satzes 54 bezw. der im vorigen Paragraphen genannten Modifikation ergab, wenn die zugehörige Zahl s_k genannt wird,

$$\begin{aligned} s_k &= 1 - \frac{k}{k+2} \\ &= \frac{2}{k+2} \\ &= \frac{1}{k} \frac{2}{1+\frac{2}{k}}, \end{aligned}$$

d. h.

$$s_1 = \frac{2}{3}, \; s_2 = \frac{1}{2}, \; s_3 = \frac{2}{5}, \; s_4 = \frac{1}{3}, \; s_5 = \frac{2}{7}, \; s_6 = \frac{1}{4}, \cdots.$$

Für jedes $k > 4$ ist

$$s_k > v_k;$$

für $k = 4$ und $k = 3$ stimmen beide Zahlen überein; für $k = 2$ ist v_k besser; für $k = 1$ ist der Wert 1 sogar trivial.

4) Die Methode der vorliegenden Arbeit ergibt, die betreffende Zahl mit l_k bezeichnet,

$$l_1 = 1, \; l_2 = \frac{2}{3}, \; l_3 = \frac{1}{2}, \; l_4 = \frac{2}{5}, \; l_5 = \frac{1}{3}, \; l_6 = \frac{2}{7}, \cdots,$$

allgemein

$$l_k = \frac{2}{k+1}$$
$$= \frac{1}{k} \frac{2}{1+\frac{1}{k}}.$$

Es ist

$$l_k = v_k \text{ für } k = 1 \text{ und } k = 2,$$
$$l_k > v_k \text{ für } k \geqq 3,$$
$$l_k > s_k \text{ für } k \geqq 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{k=\infty} \frac{l_k}{p_k} = 2, \quad \lim_{k=\infty} \frac{l_k}{v_k} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{l_k}{s_k} = 1,$$

so daß die Verbesserung des l_k gegenüber s_k immerhin für große k nicht so bemerkenswert ist wie z. B. für $k = 3$.

Wenn die Quotienten $\frac{2}{v_k}, \frac{2}{p_k}, \frac{2}{s_k}, \frac{2}{l_k}$ eingeführt werden, ergeben sich die vier Zahlenfolgen

1) 2, 3, 5, 6, 8, 9, ...; allgemein $\left[\frac{3k+1}{2}\right]$.

2) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...; allgemein $2k$.

3) 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...; allgemein $k+2$.

4) 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; allgemein $k+1$.

Ich erwähne noch, daß Herr Littlewood[1]) kürzlich die wichtige Entdeckung gemacht hat: „Wenn die Riemannsche Vermutung, daß alle nicht reellen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, richtig ist, so ist bei jedem festen $\delta > 0$ und jedem festen $\varepsilon > 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$ gleichmäßig

$$\zeta(s) = O(t^{\varepsilon}).\text{“}$$

Daraus folgt sofort nach dem Schnee-Landauschen Satz 54 oder seiner in § 7 angegebenen Modifikation, daß in $\tau_k(x)$ für jedes k das Restglied durch

$$O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

ersetzt werden könnte, also — unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung — die Zahlenfolge

1) Vergl. die in der Einleitung zitierte Note.

$$L_k = \frac{1}{2}$$

und für die Quotienten $\frac{2}{L_k}$ respektive

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots;\ \text{allgemein } 4.$$

Aber ich habe insbesondere die Relation[1])

$$\tau_3(x) = A_3 x \log^2 x + A_2 x \log x + A_1 x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

in meiner vorliegenden Arbeit zum ersten Male bewiesen, d. h. ohne Benutzung der Riemannschen Vermutung hergeleitet.

§ 9. Die Piltzsche Funktion $\tau_k(x; s)$.

Hilfssatz 13: *Es sei $\varrho(u)$ für jedes $x > 1$ von $u = 1$ bis $u = x$ eigentlich integrabel. Es sei ferner für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\varrho(x) = O(x^{\eta+\varepsilon}),$$

wo η eine gewisse Konstante ist. Dann ist bei konstantem s für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_1^x \frac{\varrho(u)\,du}{u^{s+1}} = c + O(x^{\eta-\sigma+\varepsilon}),$$

wo c eine passend wählbare, von s (aber nicht von x und ε) abhängige Konstante ist.

Beweis: 1) Im Falle $\sigma \leqq \eta$ ist

$$\int_1^x \frac{\varrho(u)\,du}{u^{s+1}} = O\int_1^x \frac{u^{\eta+\varepsilon}}{u^{\sigma+1}}\,du$$

$$= O\int_1^x u^{\eta-\sigma-1+\varepsilon}\,du$$

$$= O + O(x^{\eta-\sigma+\varepsilon}).$$

2) Im Falle $\sigma > \eta$ ist, wenn das positive $\varepsilon < \sigma - \eta$ gewählt wird, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, wegen

$$\frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} = O(u^{\eta-\sigma-1+\varepsilon})$$

das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\varrho(u)\,du}{u^{s+1}} = c$$

---

1) Literatur über $\tau_3(x)$ vergl. in meiner Arbeit 7 und auf S. 3 meiner Arbeit in den Transactions.

konvergent und

$$\int_1^x \frac{\varrho(u)\,du}{u^{s+1}} = c + O\int_x^\infty u^{\eta-\sigma-1+\varepsilon}\,du$$
$$= c + O(x^{\eta-\sigma+\varepsilon}).$$

Der Hilfssatz 13 ist also bewiesen.

Mit Hilfe meines Ergebnisses des § 8

(57) $$\tau_k(x) = x\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \log^{\nu-1} x + \varrho(x),$$

wo

$$\varrho(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right)$$

ist, will ich nun den Piltzschen[1]) Satz verschärfen, welcher lautet: Für jedes feste komplexe s ist

(58) $$\begin{cases} \tau_k(x;s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n)}{n^s} = x^{1-s}\sum_{\nu=1}^{k+1} B_\nu \log^{\nu-1} x + B \\ \qquad + O\left(x^{\frac{k-1}{k}-\sigma+\varepsilon}\right), \end{cases}$$

wo $B_1, \ldots, B_{k+1}, B$ nur von s und k abhängige Konstanten sind und B_{k+1} für $s \neq 1$ den Wert 0 hat. Ich werde nämlich in (58) das Schlußglied durch

$$O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}-\sigma+\varepsilon}\right)$$

ersetzen.

Es ist hinreichend, dies für ganzzahlig wachsendes x zu zeigen, da alsdann der Übergang von x zu $[x]$ den expliziten Bestandteil der rechten Seite von (58) nur um $O(x^{-\sigma+\varepsilon})$ ändert, also zu vernachlässigen ist. Nun ist für ganze $x \geqq 1$

$$\tau_k(x;s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\tau_k(n)-\tau_k(n-1)}{n^s}$$
$$= \sum_{n=1}^{x-1} \tau_k(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{\tau_k(x)}{x^s}$$
$$= s\sum_{n=1}^{x-1} \tau_k(n)\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} + \frac{\tau_k(x)}{x^s}$$
$$= s\int_1^x \frac{\tau_k(u)\,du}{u^{s+1}} + \frac{\tau_k(x)}{x^s}$$

1) 1; vergl. auch meine Arbeit in den Transactions.

Wird hierin für $\tau_k(x)$ und entsprechend $\tau_k(u)$ die rechte Seite von (57) eingesetzt, so ergibt das Fehlerglied ϱ nach dem Hilfssatz 13

$$s\int_1^x \frac{\varrho(u)\,du}{u^{s+1}} + \frac{\varrho(x)}{x^s} = cs + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}-\sigma+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}-\sigma+\varepsilon}\right)$$

$$= c' + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}-\sigma+\varepsilon}\right).$$

Der Hauptbestandteil rechts in (57) ergibt

$$s\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \int_1^x \frac{\log^{\nu-1} u\,du}{u^s} + x^{1-s}\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \log^{\nu-1} x,$$

was mit Hinzufügung des c' durch eine elementare Rechnung[1]) zum Hauptbestandteil rechts in (58) führt.

Zweites Kapitel.

Die Dirichletschen Funktionen $L(s)$.

§ 10. Das Produkt zweier L-Reihen.

Es sei k eine ganze Zahl $\geqq 1$, $\chi(n)$ ein Charakter modulo k. Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s)$$

konvergiert bekanntlich[2]), wenn $\chi(n)$ der Hauptcharakter ist, für $\sigma > 1$, sonst für $\sigma > 0$.

Nun seien

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s}$$

und

$$L_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_2(n)}{n^s}$$

zwei solche L-Reihen; $\chi_1(n)$ ist dabei ein Charakter modulo k_1, $\chi_2(n)$ modulo k_2. Es werde

(59) $$L_1(s)\,L_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

1) Vergl. S. 10 meiner Arbeit in den Transactions.

2) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 114.

gesetzt. Die rechte Seite von (59) konvergiert, wenn mindestens einer der beiden Charaktere Hauptcharakter ist, für $\sigma > 1$ und — da bekanntlich[1]) kein $L(s)$ für $s = 1$ verschwindet — natürlich nicht über 1 hinaus. Wenn keiner der beiden Charaktere Hauptcharakter ist, konvergiert jene Reihe

$$(60) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d/n} \chi_1(d)\, \chi_2\!\left(\frac{n}{d}\right)$$

nach einem bekannten Satz von Stieltjes[2]) für $\sigma > \frac{1}{2}$. Der Beweis ist übrigens in der folgenden kurzen Rechnung enthalten, welche auch den Fall umfaßt, daß mindestens einer der beiden Charaktere Hauptcharakter ist: Es ist

$$\sum_{n=1}^{x} \chi_1(n) = \varrho_1 x + O(1),$$

wo ϱ_1 für den Hauptcharakter $\frac{\varphi(k_1)}{k_1}$, sonst 0 ist, ebenso

$$\sum_{n=1}^{x} \chi_2(n) = \varrho_2 x + O(1),$$

wo $\varrho_2 = \frac{\varphi(k_2)}{k_2}$ bezw. 0 ist. Daher ist

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=1}^{x} c_n \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi_1(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \chi_2(m) + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \chi_2(m) \sum_{n=1}^{\frac{x}{m}} \chi_1(n) - \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi_1(n) \cdot \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \chi_2(m) \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi_1(n)\, \varrho_2 \frac{x}{n} + O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} 1 + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \chi_2(m)\, \varrho_1 \frac{x}{m} + O \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} 1 \\ &\qquad - \left(\varrho_1 \sqrt{x} + O(1)\right)\left(\varrho_2 \sqrt{x} + O(1)\right) \\ &= \varrho_2 x \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi_1(n)}{n} + \varrho_1 x \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi_2(m)}{m} - \varrho_1 \varrho_2 x + O\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

---

1) Vergl. z. B. *Handbuch*, §§ 105—106.

2) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 215. Übrigens hat Herr Bohr ein Beispiel entdeckt, in welchem zwei Dirichletsche Reihen für $\sigma > 0$ konvergieren und ihr formales Produkt die Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ zur genauen Konvergenzgeraden hat; vergl. seine Habilitationsschrift: *Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori* [Kopenhagen (1910), 136 S.], S. 38—39.

Nun unterscheide ich drei Fälle:

1) Falls weder χ_1 noch χ_2 Hauptcharakter ist, ist $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$, also

$$C(x) = O(\sqrt{x}).$$

Das liefert die oben genannte Konvergenz von (60) für $\sigma > \frac{1}{2}$.

2) Falls genau einer der beiden Charaktere, z. B. χ_1, Hauptcharakter ist, ist $\varrho_2 = 0$, $\varrho_1 > 0$ und

$$\begin{aligned} C(x) &= \varrho_1 x \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_2(m)}{m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(\sqrt{x}) \\ &= \varrho_1 L_2(1) x + O(\sqrt{x}) \\ &= Ax + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Dies besagt die Konvergenz der Dirichletschen Reihe rechts in

$$L_1(s) L_2(s) - A\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - \varrho_1 L_2(1)}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$, auch die der rechten Seite von

$$L_1(s) L_2(s) - L_1(s) L_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - \chi_1(n) L_2(1)}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$.

3) Falls beide Charaktere Hauptcharaktere sind, ist mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^{x} \frac{1}{n} = \frac{\varphi(k)}{k} \log x + \varrho + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \varrho_2 x \left(\frac{\varphi(k_1)}{2k_1} \log x + \varrho_3 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ &\quad + \varrho_1 x \left(\frac{\varphi(k_2)}{2k_2} \log x + \varrho_4 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \varrho_1 \varrho_2 x + O(\sqrt{x}) \\ &= A_1 x \log x + Ax + O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

wo $A_1 = \frac{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}{k_1 k_2}$ von Null verschieden ist. Dies besagt die Konvergenz der Dirichletschen Reihe rechts in

$$L_1(s) L_2(s) + A_1 \zeta'(s) - (A + A_1)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - A_1 \log n - A - A_1}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$.

Diese Ergebnisse sind als bekannt anzusehen. 3) liefert z. B. im Spezialfall $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $\chi_1(n) = 1$, $\chi_2(n) = 1$, wo $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = \varrho_4 = C$, also $A_1 = 1$, $A = \varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_4 - \varrho_1\varrho_2 = 2C - 1$ ist, die Dirichletsche Relation (1).

Ich beweise nunmehr den allgemeinen

Satz: 1) *Wenn keiner der beiden Charaktere Hauptcharakter ist, ist für jedes* $\varepsilon > 0$

$$C(x) = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right),$$

also die Reihe (60) *für* $\sigma > \frac{1}{3}$ *konvergent.*

2) *Wenn genau einer der beiden Charaktere Hauptcharakter ist, ist*

$$C(x) = Ax + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

3) *Wenn beide Charaktere Hauptcharaktere sind, ist*

$$C(x) = A_1 x \log x + Ax + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Bekanntlich[1]) ist

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

mit Ausnahme des Poles $s = 1$ beim Hauptcharakter, für jeden Charakter nach jedem Modul k überall regulär.

Bekanntlich[2]) gibt es zu $\chi(n)$ und k ein gewisses K/k und einen sog. eigentlichen Charakter $X(n)$ modulo K derart, daß für $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{\nu=1}^{\mathfrak{c}} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n^s}$$

ist, wo $\mathfrak{c}$ eine gewisse ganze Zahl $\geqq 0$ ist, die p_ν Primzahlen, die ε_ν Einheitswurzeln sind ($\nu = 1, \ldots, \mathfrak{c}$) und $\prod$ im Falle $\mathfrak{c} = 0$ die Zahl 1 bedeutet. Ferner genügt bekanntlich[3]), wenn $\overline{X}(n)$ den zu $X(n)$ konjugierten Charakter, $\overline{\Lambda}(s)$ die zugehörige Funktion bezeichnet, die durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n^s}$$

definierte Funktion $\Lambda(s)$, welche entweder (nämlich für $K = 1$) gleich $\zeta(s)$ oder (nämlich für $K > 1$) eine ganze Funktion ist, der

---

1) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 124.

2) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 125.

3) Vergl. z. B. *Handbuch*, § 128.

Funktionalgleichung

$$\Theta\left(\frac{\pi}{K}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \Delta(s) = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{-\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \bar{\Delta}(1-s),$$

wo Θ eine Konstante vom absoluten Betrage 1 ist und a einen der beiden konstanten Werte 0, 1 hat. Daher ist

$$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \Delta(s) = \frac{1}{\Theta}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \bar{\Delta}(1-s).$$

Mit Rücksicht auf

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{c}\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \Delta(s)$$

und

$$\bar{L}(s) = \prod_{\nu=1}^{c}\left(1-\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu^s}\right) \bar{\Delta}(s),$$

wo $\bar{L}(s)$ die dem zu χ konjugierten Charakter $\bar{\chi}$ entsprechende Funktion, $\bar{\varepsilon}_\nu$ die zu ε_ν konjugierte Einheitswurzel $\frac{1}{\varepsilon_\nu}$ ist, ist daher

$$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s) = \frac{1}{\Theta}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \prod_{\nu=1}^{c} \frac{1-\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}}{1-\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu^{1-s}}} \bar{L}(1-s).$$

Für $\sigma < 0$ ist daher, weil sowohl

$$\bar{L}(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}$$

als auch

$$p_\nu^s \frac{1-\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}}{1-\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu^{1-s}}} = p_\nu^s\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right)\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{p^{1-s}}+\frac{\bar{\varepsilon}_\nu^2}{p^{2-2s}}+\cdots\right)$$

$$= (-\varepsilon_\nu + p_\nu^s)\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{p_\nu} p^s + \frac{\bar{\varepsilon}_\nu^2}{p_\nu^2} p^{2s} + \cdots\right)$$

absolut konvergente Dirichletsche Reihen in $-s$ sind,

$$(61)\quad \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s) = \frac{1}{\Theta}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \frac{1}{\left(\prod_{\nu=1}^{c} p_\nu\right)^s} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n^s,$$

wo die Reihe rechts für $\sigma < 0$ absolut konvergiert.

Liegen also zwei L-Funktionen vor, denen die Zahlen $\mathfrak{a}_1, \Theta_1, K_1, \mathfrak{c}_1, p'_\nu$ bezw. $\mathfrak{a}_2, \Theta_2, K_2, \mathfrak{c}_2, p''_\nu$ entsprechen, und wird

$$L_1(s) L_2(s) = Z(s)$$

gesetzt, so ist nach (61) für $\sigma < 0$

$$\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}_2}{2}\right) Z(s)$$

$$= \frac{1}{\Theta_1\Theta_2}\left(\frac{\pi^2}{K_1K_2}\right)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_2}{2}\right) \frac{1}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{\mathfrak{c}_1} p'_\nu \prod\limits_{\nu=1}^{\mathfrak{c}_2} p''_\nu\right)^s} \sum_{n=1}^{\infty} D_n n^s,$$

wo die Reihe rechts absolut konvergiert, d. h.

$$= \Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{K_1K_2}}{\pi\Theta_1\Theta_2} D_n \left(\frac{\pi^2 n}{K_1 K_2 \prod\limits_{\nu=1}^{\mathfrak{c}_1} p'_\nu \prod\limits_{\nu=1}^{\mathfrak{c}_2} p''_\nu}\right)^s$$

(62) $$= \Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}_2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s},$$

wo die e_n und λ_n den Bedingungen 3) des Hauptsatzes genügen. Dessen Voraussetzung 1) gilt mit $\alpha = 0$ wegen

$$|c_n| = \left|\sum_{d/n} \chi_1(d)\chi_2\left(\frac{n}{d}\right)\right|$$
$$\leqq T(n);$$

2) gilt offenbar, da $(s-1)^2 Z(s)$ ganz ist. 4) wird durch (62) verifiziert, mit den Parametern

$$\mu = \nu = 2, \quad \alpha_1 = \frac{\mathfrak{a}_1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\mathfrak{a}_2}{2}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1+\mathfrak{a}_1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1+\mathfrak{a}_2}{2}, \quad \delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}.$$

5) gilt, 6) auch wegen

$$\eta = \Sigma\gamma - \Sigma\alpha + \frac{\mu-\nu}{2}$$
$$= 1,$$

7) auch, da bekanntlich[1]) in jedem endlichen Streifen

$$L(s) = O(|t|^c)$$

ist.

---

1) Dies folgt z. B. aus § 124.

Der Hauptsatz ist also anwendbar. Für $R(x)$ ergibt sich (die Verifikation ist sogar unnötig auf Grund der obigen elementaren Rechnungen, die beim Endergebnis $O(\sqrt{x})$ stehen blieben) in den drei Fällen resp. der Wert

$$0, \; Ax, \; A_1 x \log x + Ax.$$

Und die Abweichung des $C(x)$ von $R(x)$ ist, eben nach dem Hauptsatz,

$$O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Ich mache aber besonders darauf aufmerksam, daß der Kern desselben in seiner soeben mitbewiesenen Geltung für zwei eigentliche Charaktere $\chi_1(n)$, $\chi_2(n)$ liegt. Daraus läßt er sich leicht allgemein schließen (was durch den obigen Beweis mit einem Schlage geschah). Denn es sei schon bewiesen, daß in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_1(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_2(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

$$\mathfrak{C}(x) = \sum_{n=1}^{x} b_n = \mathfrak{A}_1 x \log x + \mathfrak{A} x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

ist (wo $\mathfrak{A}_1 = 0$, wenn X_1 und X_2 nicht beide identisch 1 sind, $\mathfrak{A} = 0$, wenn weder X_1 noch X_2 identisch 1 ist); dann folgt daraus auf Grund der für $\sigma > 1$ giltigen Identität

$$\begin{aligned} L_1(s)\, L_2(s) &= \prod_{\nu=1}^{c_1}\left(1 - \frac{\varepsilon'_\nu}{p'^s_\nu}\right) \prod_{\nu=1}^{c_2}\left(1 - \frac{\varepsilon''_\nu}{p''^s_\nu}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{g_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \end{aligned}$$

(wo m endlich ist) sofort

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=1}^{m} g_n \mathfrak{C}\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \mathfrak{A}_1 \sum_{n=1}^{m} g_n \frac{x}{n} \log \frac{x}{n} + \mathfrak{A} \sum_{n=1}^{m} g_n \frac{x}{n} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \\ &= (\mathfrak{A}_1 x \log x + \mathfrak{A} x) \sum_{n=1}^{m} \frac{g_n}{n} - \mathfrak{A}_1 x \sum_{n=1}^{m} \frac{g_n \log n}{n} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \\ &= A_1 x \log x + Ax + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Was nun alle möglichen Paare eigentlicher Charaktere bezw. zugehöriger Funktionen $L_1(s)$, $L_2(s)$ betrifft, so ist mein allgemeiner

Satz in zwei speziellen Fällen schon bekannt gewesen. Gerade diese regten mich zu meiner allgemeinen Untersuchung an; es sind eben die in der Einleitung schon genannten (und um ε besseren) Ergebnisse von Voronoï für

$$\zeta(s)\,\zeta(s)$$

und von Herrn Sierpiński für

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots\right).$$

In jedem Fall würde der Schnee-Landausche Satz 54 (bezw. seine in § 7 angegebene Modifikation für meromorphe Funktionen) nur $\frac{1}{2}$, nicht $\frac{1}{3}$ ergeben.

Wegen der Wichtigkeit des in diesem Paragraphen bewiesenen Satzes über $L_1(s)\,L_2(s)$ will ich für ihn noch einen zweiten Beweis angeben, gleichfalls durch passende Spezialisierung des Hauptsatzes dieser Arbeit. Der oben gegebene Beweis benutzte allerdings nur solche bekannten Eigenschaften der vorkommenden Funktionen, welche in meinem Handbuch entwickelt sind; jetzt muß ich auf andere Stellen der Literatur Bezug nehmen. Der zweite Beweis wird aber insofern ein neues Licht auf die Sache werfen, als er lehren wird: die Multiplikationseigenschaft

$$\chi(nn') = \chi(n)\,\chi(n')$$

der Charaktere ist für den vorliegenden Zweck unwesentlich, und nur ihre Periodizität

$$\chi_1(n+k_1) = \chi_1(n),$$
$$\chi_2(n+k_2) = \chi_2(n)$$

kommt zur Anwendung. Diese Periodizität liefert für $\sigma > 1$ sofort die Identität

$$L_1(s)\,L_2(s) = \sum_{\lambda_1=1}^{k_1} \chi_1(\lambda_1) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\lambda_1 \,(\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{\lambda_2=1}^{k_2} \chi_2(\lambda_2) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\lambda_2 \,(\mathrm{mod.}\, k_2)}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{\lambda_1=1}^{k_1} \sum_{\lambda_2=1}^{k_2} \chi_1(\lambda_1)\,\chi_2(\lambda_2) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\lambda_1 \,(\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\lambda_2 \,(\mathrm{mod.}\, k_2)}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und lehrt: Der obige Satz ist enthalten in dem folgenden, jetzt zu beweisenden

Satz: *Es seien $\lambda_1, k_1, \lambda_2, k_2$ ganz, $0 < \lambda_1 \leqq k_1$, $0 < \lambda_2 \leqq k_2$. Es werde für $\sigma > 1$*

$$G_1(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \lambda_1 \, (\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

$$G_2(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \lambda_2 \, (\mathrm{mod.}\, k_2)}}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

$$G_1(s)\, G_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

gesetzt. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{x} b_n = B_1 x \log x + Bx + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Der Hauptsatz wird nicht auf $G_1(s)\, G_2(s)$ unmittelbar anwendbar sein, wohl aber, wenn für $\sigma > 1$ vier Funktionen $\Phi_{11}(s)$, $\Phi_{12}(s)$, $\Phi_{21}(s)$, $\Phi_{22}(s)$ durch die Gleichungen

$$\Phi_{11}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \lambda_1 \, (\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv -\lambda_1 \, (\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

$$\Phi_{12}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \lambda_1 \, (\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv -\lambda_1 \, (\mathrm{mod.}\, k_1)}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und $\Phi_{21}(s)$, $\Phi_{22}(s)$ entsprechend mit λ_2, k_2 eingeführt werden, auf jeden der vier Summanden der rechten Seite in

$$4G_1(s)\, G_2(s) = \Phi_{11}(s)\, \Phi_{21}(s) + \Phi_{11}(s)\, \Phi_{22}(s) + \Phi_{12}(s)\, \Phi_{21}(s) + \Phi_{12}(s)\, \Phi_{22}(s).$$

Der obige Satz wird jedenfalls bewiesen sein, wenn für jede der vier Dirichletschen Reihen ($u = 1, 2$; $v = 1, 2$)

$$\Phi_{1u}(s)\, \Phi_{2v}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

gezeigt werden kann:

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = D_1 x \log x + Dx + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

In der Tat genügt bekanntlich[1]) bei festem w der Strecke $0 < w \leqq 1$ die für $\sigma > 1$ durch

1) Vergl. z. B. Kinkelin 1, S. 11; Piltz 2, S. 20; Hurwitz 1, S. 93; Lipschitz 7, S. 138; Bachmann 1, S. 346; de la Vallée Poussin 2, S. 290.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+w)^s} + \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(m-w)^s}$$

(wo im Falle $w = 1$ in $\sum'$ das Glied $m = 1$ fehlt) definierte Funktion $\zeta_1(w, s)$, die bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ überall regulär ist, für $\sigma < 0$ der Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(w, s) = 2\pi^{s-\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi w}{n^{1-s}};$$

die für $\sigma > 1$ durch

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+w)^s} - \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(m-w)^s}$$

definierte ganze Funktion $\zeta_2(w, s)$ (die übrigens in den Fällen $w = \frac{1}{2}$ und $w = 1$ identisch Null ist) der Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \zeta_2(w, s) = 2\pi^{s-\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi w}{n^{1-s}}.$$

Nun ist offenbar

$$\Phi_{1u}(s) = \frac{1}{k_1^s} \zeta_u\left(\frac{\lambda_1}{k_1}, s\right),$$

$$\Phi_{2v}(s) = \frac{1}{k_2^s} \zeta_v\left(\frac{\lambda_2}{k_2}, s\right);$$

also genügt jede der vier Funktionen

$$Z(s) = \Phi_{1u}(s)\, \Phi_{2v}(s),$$

wenn a_1 und a_2 bezw. den Wert 0 oder 1 bezeichnen (je nachdem u oder v den Wert 1 oder 2 haben), einer Funktionalgleichung

$$\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}\right) Z(s) = \Gamma\left(\frac{1-s+a_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s+a_2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s}$$

im Sinne der Voraussetzungen 3) und 4) des Hauptsatzes. Die Voraussetzung 1) ist wegen

$$|c_n| \leqq 4T(n)$$

mit $\alpha = 0$ erfüllt, die Voraussetzungen 2), 5), 6) offenbar mit $\eta = 1$ auch; 7) gleichfalls, weil bekanntlich[1]) in jedem endlichen Streifen

1) Dies folgt z. B. aus § 124 des *Handbuchs*.

$$\zeta_1(w, s) = O\left(|t|^{C_1}\right),$$
$$\zeta_2(w, s) = O\left(|t|^{C_2}\right),$$

also

$$Z(s) = O\left(|t|^{C_3}\right)$$

ist.

Der Hauptsatz ist also anwendbar; er liefert

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = D_1 x \log x + Dx + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

und damit den behaupteten Satz.

§ 11. Das Produkt mehrerer L-Reihen.

Es seien k ($\geqq 2$) Funktionen $L_1(s), \ldots, L_k(s)$ gegeben. Es hat

$$\frac{x^s}{s} L_1(s) \ldots L_k(s)$$

im Punkt $s = 1$ das Residuum

$$R(x) = x\,(A_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + A_0),$$

wo von oben an so viele A_ν verschwinden, als Nicht-Hauptcharaktere unter den k gegebenen vorhanden sind (also eventuell $R(x) = 0$ ist). Die ältere Schnee-Landausche Methode würde für die summatorische Funktion in

$$L_1(s) \ldots L_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

ergeben:

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = R(x) + O\left(x^{\frac{k}{k+2}+\varepsilon}\right);$$

meine neue Methode liefert den schärferen

Satz: *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = R(x) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Ich brauche nur den Hauptsatz auf

$$Z(s) = L_1(s) \ldots L_k(s)$$

anzuwenden; nach (61) ist für $\sigma < 0$

$$\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{s+a_k}{2}\right)Z(s)$$
$$=\Gamma\left(\frac{1-s+a_1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1-s+a_k}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\lambda_n s},$$

wo 3) gilt; ferner ist nach dem Hilfssatz 12

$$\begin{aligned}|c_n| &= \left|\sum_{n_1\ldots n_k=n}\chi_1(n_1)\ldots\chi_k(n_k)\right|\\ &\leqq T_k(n)\\ &= O\left(n^{\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

also 1) mit $\alpha = 0$ erfüllt. 2) gilt natürlich, 4) nach der obigen Identität mit

$$\mu=\nu=k,\quad \alpha_1=\frac{a_1}{2},\ldots,\quad \alpha_k=\frac{a_k}{2},\quad \beta_1=\cdots=\beta_k=\frac{1}{2},$$
$$\gamma_1=\frac{1+a_1}{2},\ldots,\quad \gamma_k=\frac{1+a_k}{2},\quad \delta_1=\cdots=\delta_k=\frac{1}{2}.$$

5) gilt, 6) auch wegen

$$\begin{aligned}\eta &= \Sigma\gamma-\Sigma\alpha+\frac{\mu-\nu}{2}\\ &=\frac{k}{2}.\end{aligned}$$

Wegen

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}=\frac{k-1}{k+1}$$

liefert also der Hauptsatz den oben ausgesprochenen Satz.

Übrigens würde im Falle keines Hauptcharakters der in § 8 erwähnte allgemeine Satz über Multiplikation Dirichletscher Reihen nur zu $\frac{k-1}{k}$ führen; denn, wenn dies bis $k-1$ als bewiesen angenommen wird, so ergibt sich Konvergenz der Dirichletschen Reihe für

$$L_1(s)\ldots L_k(s)=(L_1(s)\ldots L_\nu(s))\,.\,(L_{\nu+1}(s)\ldots L_k(s))\qquad(1\leqq\nu\leqq k-1)$$

im Gebiete

$$\begin{aligned}\sigma &> \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{k-\nu}+\left(1-\frac{1}{k-\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu(k-\nu)}}{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{k-\nu}}\\ &=\frac{\nu-1+k-\nu-1+1}{k}\\ &=\frac{k-1}{k},\end{aligned}$$

so daß sogar für jede Wahl von ν das Ergebnis gleich gut ist.

Natürlich läßt sich der obige Satz auch auf dem zweiten der in § 10 angegebenen Wege beweisen.

§ 12. Anwendungen auf den quadratischen Zahlkörper.

Es sei $\varkappa$ ein quadratischer Zahlkörper, D seine Grundzahl. Dann ist bekanntlich die zugehörige Zetafunktion für $\sigma > 1$ durch

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$
$$= \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

definiert. Bekanntlich ist $\left(\frac{D}{n}\right)$ Charakter modulo $|D|$, natürlich nicht Hauptcharakter. Der in § 10 bewiesene Satz sagt also, wenn der Summationsbuchstabe $\mathfrak{n}$ die Ideale des Körpers durchläuft, aus:

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} 1 = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

(63) $$= \alpha x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right),$$

was im Spezialfall $D = -4$ durch Herrn Sierpiński[1] (sogar ohne das ε) bekannt war. Also

$$\zeta_\varkappa(s) - \alpha\zeta(s)$$

ist für $\sigma > \frac{1}{3}$ durch eine Dirichletsche Reihe darstellbar. Anders formuliert: Es ist

(64) $$\sum_{n=1}^{x} \left(\frac{D}{n}\right) \left[\frac{x}{n}\right] = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Das gilt nach dem soeben gesagten für jedes D, das fähig ist, Grundzahl eines quadratischen Körpers zu sein, d. h. für jede sog. Fundamentaldiskriminante. Natürlich ist (64) auch für jedes nicht-quadratische D, das $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist, giltig; denn $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist auch hier bekanntlich Charakter modulo $|D|$. Diese D sind diejenigen Zahlen, welche fähig sind, Diskriminante einer nicht zerfallenden binären quadratischen Form $au^2 + buv + cv^2$ zu sein. Übrigens liegt dieser scheinbar weitergehende Satz nicht tiefer,

1) Vergl. die in der Einleitung zitierte Arbeit vom Jahre 1906.

da jede solche Diskriminante D bekanntlich gleich einem Quadrat Q^2 mal einer Fundamentaldiskriminante D_0 ist und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \prod_{p/Q}\left(1-\left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_0}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$
$$= \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_0}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\cdot\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_0}{n}\right)\frac{1}{n^s}\cdot\zeta(s)$$

aus

$$A(x) = \sum_{n=1}^{x}\left(\frac{D_0}{n}\right)\left[\frac{x}{n}\right] = \alpha x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

folgt:

$$\sum_{n=1}^{x}\left(\frac{D}{n}\right)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n=1}^{m} a_n A\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$= \alpha\sum_{n=1}^{m} a_n\frac{x}{n} + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$
$$= \alpha' x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Von (63) läßt sich z. B. eine interessante Anwendung auf die Anzahl $Q(x)$ der quadratfreien Ideale eines quadratischen Körpers mit Norm $\leqq x$ machen; allerdings hat Herr Axer[1]) hier schon vorgearbeitet, und ich habe, da ich ein bestimmtes Desideratum von ihm erfüllt habe, nur bei ihm abzuschreiben, und zwar bloß das Resultat, indem ich für den Beweis auf die genannte Stelle verweise.

Im Körper der rationalen Zahlen war für die entsprechende Funktion (Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$) vor mir

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)}x + O(\sqrt{x})$$

bekannt, und ich[2]) hatte mit den Mitteln der modernen Primzahltheorie

$$Q(x) = \frac{1}{\zeta(2)}x + o(\sqrt{x})$$

---

1) *Über einige Grenzwertsätze* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXX (1911) Abteilung IIa, S. 1253—1298], S. 1258—1259 und 1261—1262.

2) 20, S. 237—241.

bewiesen. Für jeden quadratischen Körper hatte ich, was leicht war,

$$Q(x) = \frac{\alpha}{\zeta(2)} x + O(\sqrt{x} \log x)$$

bewiesen, und Herr Axer hat gefunden, daß für jeden quadratischen Körper, bei dem

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1 = \alpha x + O(x^{\vartheta})$$

mit irgend einem $\vartheta < \frac{1}{2}$ wahr ist — was bisher nur für $P(i)$ durch Herrn Sierpińskis Verdienst feststand —,

$$Q(x) = \frac{\alpha}{\zeta(2)} x + o(\sqrt{x})$$

ist. Dies ist also auf Grund von (63) für jeden quadratischen Körper negativer oder positiver Diskriminante wahr.

Ich nenne noch eine andere Anwendung. Es sei bei gegebenem quadratischen Zahlkörper $k \geqq 1$, $T_k(n)$ die Anzahl der Lösungen von $N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) = n$, ferner

$$\tau_k(x; s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n)}{n^s}$$

$$= \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \leqq x} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)^s}$$

und

$$\tau_k(x) = \tau_k(x; 0)$$

die Anzahl aller Zerlegungen aller Ideale mit Norm $\leqq x$ in k Faktoren[1]). Dann ist bekannt[2]):

$$\tau_k(x; s) = x^{1-s} \sum_{\nu=1}^{k+1} B_\nu \log^{\nu-1} x + B + O\left(x^{1 - \frac{1}{2k} - \sigma + \varepsilon}\right),$$

wo $B_1, \ldots, B_{k+1}$, B von s und k abhängige Konstanten sind und B_{k+1} für $s \neq 1$ verschwindet. Im Falle $\varkappa = P(i)$ ließe sich dies natürlich, von Herrn Sierpińskis Satz ausgehend, verschärfen, aber — analog zu den in § 8 durchgeführten Überlegungen — mit geringerem

1) Ich wähle mit Absicht dieselben Bezeichnungen wie in § 9 für den Körper der rationalen Zahlen.

2) Vergl. meine Arbeit in den Transactions.

Ergebnis als bei Verwendung meiner direkten transzendenten Methode. Immerhin brauche ich — wiederum analog zu § 8 — jene Methode nur auf $\tau_k(x)$ anzuwenden, da dann der Übergang zu $\tau_k(x; s)$ durch partielle Summation leicht ist. Die zu $\tau_k(x)$ gehörige Funktion ist

$$Z(s) = (\zeta_\kappa(s))^k$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \zeta(s)\right)^k,$$

also ein Produkt von $2k$ Funktionen $L(s)$ im Sinne des § 11, von denen genau k zu Hauptcharakteren gehören. Nach dem Satz des § 11 ist daher

(65) $$\tau_k(x) = x \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \log^{\nu-1} x + O\left(x^{\frac{2k-1}{2k+1}+\varepsilon}\right).$$

Die Zahl $\frac{2k-1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ im Exponenten ist besser als das alte $1 - \frac{1}{2k}$.

Aus (65) folgt aber wörtlich wie in § 9, nur im Exponenten hier $\frac{2k-1}{2k+1}$ statt $\frac{k-1}{k+1}$ geschrieben,

$$\tau_k(x; s) = x^{1-s} \sum_{\nu=1}^{k+1} B_\nu \log^{\nu-1} x + B + O\left(x^{\frac{2k-1}{2k+1}-\sigma+\varepsilon}\right).$$

§ 13. Anwendungen auf den Kreiskörper.

Herrn Sierpińskis Ergebnis habe ich (um ε verschlechtert) auf jeden quadratischen Körper ausgedehnt. Es ist interessant, daß es auch auf jeden Kreisteilungskörper verallgemeinert werden kann, so daß also nur der Spezialfall $m = 4$ (nebst den trivialen $m = 1$, $m = 2$) des folgenden Satzes bekannt ist:

Satz: *Im Körper der m ten Einheitswurzeln ist,* $\varphi(m) = h$ *gesetzt,*

(66) $$\sum_{Nn \leqq x} 1 = \alpha x + O\left(x^{1-\frac{2}{h+1}+\varepsilon}\right).$$

Bekannt war nur $1 - \frac{1}{h}$ statt $1 - \frac{2}{h+1}$.

Beweis: Bekanntlich ist

$$\zeta_\varkappa(s) = L_1(s) \dots L_h(s) \prod_{p/m} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^{fs}}\right)^q},$$

wo alle zu den h Charakteren modulo m gehörigen Funktionen multipliziert werden und das endliche Produkt am Schluß (bei welchem f und q gewisse von m und p abhängige positive ganze Zahlen sind) eine für $\sigma > 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}$$

darstellt. Nach dem Satz des § 11 ist in

$$L_1(s) \dots L_h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^s}$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} f_n = \beta x + O\left(x^{1 - \frac{2}{h+1} + \varepsilon}\right);$$

daher ist, wie aus

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}$$

abzulesen ist,

$$\sum_{Nn \leqq x} 1 = \sum_{n=1}^{x} g_n F\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \beta x \sum_{n=1}^{x} \frac{g_n}{n} + O \sum_{n=1}^{x} |g_n| \frac{x^{1 - \frac{2}{h+1} + \varepsilon}}{n^{1 - \frac{2}{h+1} + \varepsilon}};$$

wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{n^{1 - \frac{2}{h+1} + \varepsilon}}$$

und der Relation

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{g_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} + O\left(\frac{x^\varepsilon}{x}\right)$$

ist also

$$\sum_{Nn \leq x} 1 = \beta x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} + O\left(x^{1-\frac{2}{h+1}+\varepsilon}\right)$$

(66) $$= \alpha x + O\left(x^{1-\frac{2}{h+1}+\varepsilon}\right).$$

Weiter gilt der

Satz: *Im Körper der mten Einheitswurzeln ist*

$$\tau_k(x;s) = \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \leq x} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)^s}$$

(67) $$= x^{1-s} \sum_{\nu=1}^{k+1} B_\nu \log^{\nu-1} x + B + O\left(x^{1-\frac{2}{hk+1}-\sigma+\varepsilon}\right).$$

Bekannt war bisher[1] nur $1-\frac{1}{hk}$ statt $1-\frac{2}{hk+1}$.

Beweis: Es ist

$$\zeta_m^k(s) = (L_1(s) \ldots L_h(s))^k \prod_{p/m} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^{fs}}\right)^{gk}},$$

also im Spezialfall $s = 0$ die Behauptung (67) nach dem Satz des § 11 und genau derselben Überlegung, die soeben bei $k = 1$ zum Beweise von (66) angestellt wurde, richtig. Daraus folgt (67) für jedes s wörtlich wie in den §§ 9 und 12.

Drittes Kapitel.

Ellipsoidprobleme.

§ 14. Hilfssätze.

Es sei D eine ganze, nicht quadratische Zahl $\gtrless 0$, die $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist; mit anderen Worten: eine Diskriminante im Sinne der Theorie der binären quadratischen Formen $au^2+buv+cv^2$. Bekanntlich läßt sich D in die Form $Q^2 D_0$ setzen, wo $Q>0$ und D_0 eine Fundamentaldiskriminante ist. Es sei

$$\{a_1, b_1, c_1\}, \ldots, \{a_h, b_h, c_h\}$$

1) Vergl. meine Arbeit in den Transactions.

ein Repräsentantensystem der primitiven zu D gehörigen Klassen im Falle $D > 0$, der primitiven positiven Klassen im Falle $D < 0$. Dann ist bekanntlich, wenn in jeder Summe u, v alle die zugehörige quadratische Form zu Q teilerfremd machende[1]) Paare ganzer Zahlen exkl. 0,0 durchlaufen, wobei im Falle $D > 0$ der Punkt u, v noch einem bestimmten[2]) Winkelraum angehören muß,

$$\sum \frac{1}{(a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2)^s} + \cdots + \sum \frac{1}{(a_h u^2 + b_h uv + c_h v^2)^s}$$

$$= \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s},$$

wo bezw. $\tau = 1, 2, 4, 6$ für $D > 0$, < -4, $= -4$, $= -3$ ist und n in $\sum'$ alle zu Q teilerfremden positiven ganzen Zahlen durchläuft. Der in § 10 bewiesene Satz über das Produkt zweier L-Reihen sagt also aus: Die Anzahl der Gitterpunkte, bei denen die Form zu Q teilerfremd ist, 1) für $D < 0$ in den Ellipsen

$$a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2 \leqq x, \ldots, a_h u^2 + b_h uv + c_h v^2 \leqq x$$

bezw. 2) für $D > 0$ in den h Hyperbelsektoren, die durch diese Ungleichungen nebst linearen Nebenbedingungen bestimmt sind, ist

$$\alpha x + O\left(x^{\frac{1}{3} + \varepsilon}\right);$$

für jedes einzelne dieser h Gebiete und auch für ihre Summe war bisher nur

$$\beta x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

bekannt. Es entsteht nun die Frage, ob man auch für jedes einzelne der h Gebiete die Zahl $\frac{1}{2}$ verbessern kann.

Für $D > 0$ kann ich es nicht; für $D < 0$ kann ich es ausnahmslos. Es sei also ein beliebiges System ganzer Zahlen a, b, c gegeben und $D = b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$; die Zahlen a, b, c brauchen jetzt nicht teilerfremd zu sein[3]). Dann werde ich für die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

---

1) Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß u und v gewissen $Q\,\varphi(Q)$ Restklassenpaaren modulo Q angehören.

2) Auf dessen nähere Gestalt kommt es hier nicht an.

3) Natürlich wird die Aufgabe dadurch nicht schwerer, da man ja einen konstanten Faktor wegdividieren kann. Aus der Richtigkeit der Behauptung für ganzzahlige a, b, c folgt sie aus demselben Grunde sofort für rationale oder überhaupt in rationalem Verhältnis stehende a, b, c mit $D < 0$, $a > 0$.

$$au^2 + buv + cv^2 \leqq x$$

mit den Nebenbedingungen

$$u \equiv z_1 \pmod{M_1},$$
$$v \equiv z_2 \pmod{M_2},$$

wo z_1, M_1, z_2, M_2 fest sind, beweisen, daß sie

$$\frac{J}{M_1 M_2} x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

ist, wo J den Inhalt der Ellipse

$$au^2 + buv + cv^2 \leqq 1,$$

d. h. die Zahl $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-D}}$ darstellt.

Ich will danach den Beweis einer viel allgemeineren Tatsache [1]) führen und schicke dem Ganzen einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 14: *Es seien a, b, c ganze Zahlen und*

$$D = b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0.$$

Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$au^2 + buv + cv^2 = n$$

gleich

$$O(n^\varepsilon).$$

Beweis: Aus

$$au^2 + buv + cv^2 = n \qquad (n \geqq 1)$$

folgt

$$\begin{aligned} 4an &= (2au + bv)^2 - Dv^2 \\ &= (2au + bv + v\sqrt{D})(2au + bv - v\sqrt{D}). \end{aligned}$$

Die Anzahl der ganzzahligen Lösungen u, v dieser Gleichung ist offenbar höchstens gleich der τ-fachen Anzahl der Ideale des Körpers $P(\sqrt{D}) = P(\sqrt{D_0})$, die $4an$ zur Norm haben, also

$$\leqq \tau \sum_{d/4an} \left(\frac{D_0}{d}\right) \leqq \tau T(4an)$$
$$= O(n^\varepsilon).$$

(Natürlich läßt sich der Beweis dieses Hilfssatzes auch im Rahmen der Theorie der quadratischen Formen führen.)

1) $k$te Dimension; Gitterpunkte mit gewissen komplexen Gewichten.

Hilfssatz [1]) **15**: *Es seien* a, b, c *ganz*, $b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$. *Es sei* Γ *eine gegebene positive Größe. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine (nur von* $a, b, c, \Gamma, \varepsilon$ *abhängige) Zahl* G, *so daß für jedes* $n \geqq 1$ *und jedes System ganzer Zahlen* d, e, f, *für das*

$$|d| < \Gamma\sqrt{n}, \ |e| < \Gamma\sqrt{n}, \ |f| < \Gamma n$$

ist, die Lösungszahl von

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = n \tag{68}$$

höchstens

$$Gn^{\varepsilon}$$

ist.

Beweis: Nach Hilfssatz 14 gibt es ein $H = H(a, b, c, \varepsilon)$, so daß für alle ganzen $m \geqq 0$ die Lösungszahl (in ganzen U, V) von

$$aU^2 + bUV + cV^2 = m$$

höchstens $1 + Hm^{\varepsilon}$ ist.

Nun sei x, y eine Lösung von (68). Dann ist, $4ac - b^2 = \Delta$ gesetzt,

$$\begin{aligned} a(\Delta x + 2cd - be)^2 + b(\Delta x + 2cd - be)(\Delta y + 2ae - bd) \\ + c(\Delta y + 2ae - bd)^2 + \Delta^2 f - a(2cd - be)^2 - b(2cd - be)(2ae - bd) \\ - c(2ae - bd)^2 = \Delta^2 n. \end{aligned}$$

Wird

$$\Delta x + 2cd - be = U, \quad \Delta y + 2ae - bd = V$$

gesetzt, so entspricht also jeder Lösung x, y von (68) eine Lösung U, V von

$$\begin{cases} aU^2 + bUV + cV^2 = \Delta^2 n - \Delta^2 f + a(2cd - be)^2 \\ \qquad + b(2cd - be)(2ae - bd) + c(2ae - bd)^2 \end{cases} \tag{69}$$

und umgekehrt jeder Lösung U, V von (69) eine oder keine Lösung x, y von (68), je nachdem zufällig zugleich

$$U \equiv 2cd - be \pmod{\Delta}, \quad V \equiv 2ae - bd \pmod{\Delta}$$

ist oder nicht. Die rechte Seite von (69) ist nach Voraussetzung absolut genommen

$$\begin{aligned} &\leqq \Delta^2 n + \Delta^2 \Gamma n + a(2c\Gamma\sqrt{n} + |b|\Gamma\sqrt{n})^2 \\ &\qquad + b(2c\Gamma\sqrt{n} + |b|\Gamma\sqrt{n})(2a\Gamma\sqrt{n} + |b|\Gamma\sqrt{n}) \\ &\qquad + c(2a\Gamma\sqrt{n} + |b|\Gamma\sqrt{n})^2 \\ &= Kn, \end{aligned}$$

1) Die Hilfssätze 15 und 16 werden erst in § 16 angewendet.

wo K nur von a, b, c, Γ abhängt. Die Lösungszahl[1]) von (69) und somit a fortiori die von (68) ist daher

$$\begin{aligned} &\leqq 1 + H(Kn)^{\varepsilon} \\ &\leqq (1 + HK^{\varepsilon})\, n^{\varepsilon} \\ &= Gn^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 16: Es sei $k \geqq 2$,

$$Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\ \nu = 1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$$

eine positiv-definite quadratische Form mit ganzzahligen[2]) $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. *Sie nimmt also keinen ganzzahligen Wert unendlich oft an, ist stets* $\geqq 0$, *und* 0 *nur für* $u_1 = \cdots = u_k = 0$. *Es sei* $A(n)$ *die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

(70) $$Q(u_1, \ldots, u_k) = n.$$

Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$A(n) = O\left(n^{\frac{k-2}{2} + \varepsilon}\right).$$

Vorbemerkung: Der Fall $k = 2$ ist durch Hilfssatz 14 erledigt. Es sei also $k \geqq 3$. Es sei gleich bemerkt, daß in der Abschätzung von $A(n)$ unmöglich eine kleinere absolute Konstante als $\frac{k-2}{2}$ herauskommen kann, indem offenbar

$$\sum_{n=0}^{x} A(n)$$

als Anzahl der Lösungen von

$$Q(u_1, \ldots, u_k) \leqq x$$

asymptotisch gleich $Jx^{\frac{k}{2}}$ ist, wo J den Inhalt der Ellipse $Q = 1$ bezeichnet; übrigens ist bekanntlich (wie sich aus geometrischen Erwägungen sofort ergibt und als wichtige Anwendung meiner Methoden nachher verschärft werden soll)

---

1) Wenn die rechte Seite von (69) negativ ist, ist die Lösungszahl von (69) Null, also gewiß $\leqq 1 + H(Kn)^{\varepsilon}$.

2) So daß also jetzt die binäre Form in der Bezeichnungsweise $a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$, d. h. mit geradem mittleren Koeffizienten angenommen wird.

$$\sum_{n=0}^{x} A(n) = Jx^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right).$$

Wäre also auch nur

$$A(n) = o\left(n^{\frac{k-2}{2}}\right),$$

so wäre

$$\sum_{n=0}^{x} A(n) = o\left(x^{\frac{k}{2}}\right),$$

im Widerspruch hierzu.

Beweis: Bekanntlich liegt für jedes $n \geqq 1$ der Wert jeder Variabeln $u_1, \ldots, u_k$ in einer Lösung von (70) unterhalb des Produktes von $n^{\frac{1}{2}}$ mit einer von n unabhängigen Größe. In der Tat gibt es ja bei variablen u eine Darstellung der Form Q in der Gestalt

$$Q = (l_{11} u_1 + \cdots + l_{1k} u_k)^2 + (l_{22} u_2 + \cdots + l_{2k} u_k)^2 + \cdots + (l_{kk} u_k)^2,$$

wo die l reell und $l_{11}, \cdots, l_{kk}$ von Null verschieden sind, so daß in (70)

$$|u_k| \leqq \frac{1}{|l_{kk}|} n^{\frac{1}{2}}$$

ist (und entsprechend, wenn irgend eine andere Variable bevorzugt wird).

Es sei also eine — nur von der gegebenen Form, d. h. k und den $a_{\mu\nu}$ abhängige — Zahl B so gewählt, daß für alle $n \geqq 1$ aus (70)

$$|u_\nu| \leqq B n^{\frac{1}{2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

folgt.

Die Anzahl aller für $u_3, \ldots, u_k$ in Betracht kommenden Systeme ist also höchstens

$$(1 + 2B)^{k-2} n^{\frac{k-2}{2}}$$

Um festzustellen, wieviele Systeme $u_1, \ldots, u_k$ bei festen $u_3, \ldots, u_k$ möglich sind, fasse ich Q als binäre quadratische (unhomogene) Form in u_1, u_2 auf:

$$Q = a u_1^2 + b u_1 u_2 + c u_2^2 + d u_1 + e u_2 + f,$$

wo

$$a = a_{11},\ b = 2a_{12},\ c = a_{22},\ d = 2(a_{13} u_3 + \cdots + a_{1k} u_k),$$
$$e = 2(a_{23} u_3 + \cdots + a_{2k} u_k),\ f = Q(0, 0, u_3, \ldots, u_k)$$

ist. Dann ist

$$|d| \leqq 2B(|a_{13}| + \cdots + |a_{1k}|)\sqrt{n},$$
$$|e| \leqq 2B(|a_{23}| + \cdots + |a_{2k}|)\sqrt{n},$$
$$|f| \leqq B^2(|a_{33}| + 2|a_{34}| + |a_{44}| + \cdots + |a_{kk}|)n.$$

Der Hilfssatz 15 ist also anwendbar und liefert bei festem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer nur von ε und der gegebenen Form abhängigen Größe G, so daß für alle $n \geqq 1$ bei festen $u_3, \ldots, u_k$ die Lösungszahl von (70) in u_1, u_2 höchstens Gn^ε ist. Die Gesamtlösungszahl von (70) in $u_1, \ldots, u_k$ ist also

$$\leqq Gn^\varepsilon (1+2B)^{k-2} n^{\frac{k-2}{2}} = O\left(n^{\frac{k-2}{2}+\varepsilon}\right).$$

§ 15. Gitterpunkte in Ellipsen.

Satz: *Es seien a, b, c ganz, $-\Delta = b^2 - ac < 0$, $a > 0$. Dann ist die Anzahl*[1] *der Gitterpunkte des Gebietes*

$$au^2 + 2buv + cv^2 \leqq x$$

gleich

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Die Dirichletsche Reihe

$$Z(s) = \sum_{u,v} \frac{1}{(au^2 + 2buv + cv^2)^s}, \tag{71}$$

wo u, v alle Paare ganzer Zahlen exkl. 0, 0 durchlaufen, werde

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

gesetzt; dann ist die Behauptung mit

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

identisch.

Herr Lerch[2] hat, sogar bei beliebigen[3] reellen a, b, c mit

1) Übrigens ist es nach Hilfssatz 14 gleichgiltig, ob der Rand mitgezählt wird oder nicht.

2) 7, S. 10—12.

3) Natürlich ist $Z(s)$ dann keine Reihe vom Typus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$.

$-\varDelta = b^2 - ac < 0$, $a > 0$, für die durch (71) zunächst in der Halbebene $\sigma > 1$ definierte [1]) Funktion $Z(s)$ folgende drei Tatsachen entdeckt:

1) $Z(s)$ ist in der ganzen Ebene meromorph, nämlich bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{\pi}{\varDelta}$ überall regulär.

2) Es besteht die Funktionalgleichung

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,Z(s) = \varDelta^{-\frac{1}{2}}\pi^{-1+s}\Gamma(1-s)\,\overline{Z}(1-s), \tag{72}$$

wo $\overline{Z}(s)$ die der sog. zu $Q = au^2 + 2buv + cv^2$ reziproken Form $\overline{Q} = \frac{c}{\varDelta}u^2 - \frac{2b}{\varDelta}uv + \frac{a}{\varDelta}v^2$ entsprechende Funktion ist [2]).

3) Es besteht — was die Eigenschaften 1) und 2) in Evidenz setzt — in der ganzen Ebene die Relation

$$(73)\quad \begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)\,Z(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\varDelta}(s-1)} - \dfrac{1}{s} + \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}(\vartheta(y)_Q - 1)\,dy \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\varDelta}}\displaystyle\int_1^\infty y^{-s}(\vartheta(y)_{\overline{Q}} - 1)\,dy, \end{cases}$$

---

1) Nach der trivialen Abschätzung

$$\sum_{au^2+2buv+cv^2 \leqq x} 1 = \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}}x + O(\sqrt{x})$$

ist $Z(s)$ exkl. des Poles $s = 1$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär. Der Lerchsche Satz besagt aber viel mehr.

2) Mit Rücksicht auf die in § 16 zur Verwendung kommende Epsteinsche Verallgemeinerung schreibe ich die Funktionalgleichung in der Form (72) und die Gleichung (73) in obiger Gestalt. Natürlich ist hier die Einführung des $\overline{Z}$ wegen der für $\sigma > 1$ giltigen Identität

$$\begin{aligned} \overline{Z}(s) &= \sum_{u,v} \frac{1}{\left(\frac{c}{\varDelta}u^2 - \frac{2b}{\varDelta}uv + \frac{a}{\varDelta}v^2\right)^s} \\ &= \varDelta^s \sum_{u,v} \frac{1}{(av^2 + 2bv(-u) + c(-u)^2)^s} \\ &= \varDelta^s Z(s) \end{aligned}$$

unnötig, und Herr Lerch hat auch die einfachere Gestalt von (72):

$$\left(\frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\,Z(s) = \left(\frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi}\right)^{1-s}\Gamma(1-s)\,Z(1-s).$$

Auch statt (73) hat er eine andere, gleichwertige Integraldarstellung mit ϑ-Funktionen.

wo

$$\vartheta(y)_Q = \sum_{u,v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y Q(u,v)}$$

ist.

Jedes der beiden Integrale rechts in (73) stellt eine ganze Funktion dar, weil es in jedem endlichen Gebiete die gleichmäßige Grenze der ganzen Funktion $\int_1^\omega$ für $\omega = \infty$ ist. Für einen bestimmten Zweck muß ich auf den Beweis hierfür näher eingehen, nämlich überdies konstatieren, daß in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ jedes der beiden Integrale beschränkt ist. In der Tat ist für alle $y > 0$

$$\left.\begin{array}{r}\vartheta(y)_Q - 1\\ \text{bezw. } \vartheta(y)_{\overline{Q}} - 1\end{array}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n \pi y},$$

wo μ_n alle Werte von Q bezw. $\overline{Q}$ exkl. 0, wachsend geordnet, durchläuft (natürlich mit der zugehörigen Vielfachheit). Für $y \geqq 1$ ist offenbar

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n \pi y} &= e^{-\mu_1 \pi y} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n - \mu_1)\pi y}\\ &\leqq e^{-\mu_1 \pi y} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n - \mu_1)\pi}\\ &= c e^{-\mu_1 \pi y}.\end{aligned}$$

Daher ist in jedem Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ für $y \geqq 1$

$$\left.\begin{array}{r}|y^{s-1}(\vartheta(y)_Q - 1)|\\ \text{bezw. } |y^{-s}(\vartheta(y)_{\overline{Q}} - 1)|\end{array}\right\} < c y^{c'} e^{-\mu_1 \pi y}$$

$$< e^{-\beta y}$$

bei passender Wahl eines positiven β, woraus die obige Behauptung sich ergibt, daß jedes der Integrale in (73) eine ganze Funktion darstellt, die in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ beschränkt ist.

Nun seien a, b, c ganz. Ich behaupte, daß $Z(s)$ den Bedingungen des Hauptsatzes genügt.

1) Es ist nach Hilfssatz 14

$$c_n = O(n^{\varepsilon}),$$

also das $\alpha = 0$.

2) Nach dem Gesagten ist $Z(s)$ regulär bis auf einen Pol.

3) und 4) Nach (72) ist für $\sigma < 0$

$$\Gamma(s)\,Z(s) = \Gamma(1-s) \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s}$$

im bekannten Sinne, und zwar ist hier

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \delta_1 = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{\lambda_n s} = \sum_{u,\,v} \Delta^{-\frac{1}{2}} \pi^{2s-1} \frac{1}{\left(\frac{cu^2 - 2buv + av^2}{\Delta}\right)^{1-s}}$$

$$= \sum_{u,\,v} \Delta^{-\frac{1}{2}} \pi^{-1} \left(\frac{cu^2 - 2buv + av^2}{\Delta}\right)^{-1} \left(\frac{\pi^2(cu^2 - 2buv + av^2)}{\Delta}\right)^s.$$

5) Es ist

$$\Sigma\beta = 1$$
$$= \Sigma\delta.$$

6) Es ist

$$\eta = \Sigma\gamma - \Sigma\alpha + \frac{\mu - \nu}{2}$$
$$= 1.$$

7) Nach dem über die rechte Seite von (73) bemerkten und Hilfssatz 4 ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$

$$Z(s) = O\left(e^{2|t|}\right).$$

Der Hauptsatz ergibt also

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\, x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right),$$

was zu beweisen war.

§ 16. Gitterpunkte im regelmäßigen und unregelmäßigen Gitter und andere Abschätzungen bei k-dimensionalen Ellipsoiden.

Satz: *Es sei* $k \geqq 2$,

$$Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$$

eine definite positive Form mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. *Es werde die Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt.

Es seien

M eine positive ganze Zahl,

$z_1, \ldots, z_k$ ganze rationale Zahlen[1]*,*

$h_1, \ldots, h_k$ reelle Zahlen.

Dann ist die über alle Gitterpunkte des k-dimensionalen Ellipsoids

$$Q(u_1, \ldots, u_k) \leqq x,$$

die den Nebenbedingungen

$$u_1 \equiv z_1 \pmod{M}, \ldots, u_k \equiv z_k \pmod{M}$$

genügen, erstreckte Summe

$$\sum e^{2\pi i (h_1 u_1 + \cdots + h_k u_k)} = c x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}\frac{k}{k+1}+\varepsilon}\right), \tag{74}$$

wo 1) im Falle durchweg ganzer $h_\nu M$, wenn

$$J = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\varDelta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

den Inhalt des Ellipsoids $Q = 1$ bezeichnet,

$$c = \frac{J}{M^k} e^{2\pi i (h_1 z_1 + \cdots + h_k z_k)}$$

ist, 2) sonst

$$c = 0$$

ist.

Vorbemerkung: Für $k = 1$ ist der Satz nicht etwa falsch, sondern trivial. In der Tat ist bei ganzem (oder auch nur positivem) $a > 0$

$$\sum_{a u^2 \leqq x} e^{2\pi i h u} = \sum_{a(vM+z)^2 \leqq x} e^{2\pi i h (vM+z)} = e^{2\pi i h z} \sum_{v=v_0}^{v_1} e^{2\pi i h v M},$$

wo

$$v_0 = -\frac{\sqrt{x}}{M\sqrt{a}} + O(1),$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{x}}{M\sqrt{a}} + O(1)$$

ist. Offenbar ist die letzte Summe

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{M\sqrt{a}}\sqrt{x} + O(1) & \text{für ganzes } hM, \\ O(1) & \text{sonst,} \end{cases}$$

1) Die Festsetzung $0 < z_\nu \leqq M$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ würde nichts ändern.

wegen der für $|y| = 1$ exkl. $y = 1$ giltigen Abschätzung

$$\left|\sum_{v=v_0}^{v_1} y^v\right| = \left|\frac{y^{v_0} - y^{v_1+1}}{1-y}\right| \leqq \frac{2}{|1-y|}.$$

Beweis: Es werde

$$Z(s) = \sum_{v_1,\ldots,v_k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (h_1(v_1 M + z_1) + \cdots + h_k(v_k M + z_k))}}{\{Q(v_1 M + z_1, \ldots, v_k M + z_k)\}^s}$$

gesetzt, wo im Falle[1]) ganzer $\frac{z_1}{M}, \cdots, \frac{z_k}{M}$ das Glied mit dem Nenner 0 fehlt. Dies $Z(s)$ ist eine Dirichletsche Reihe vom Typus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

und für $\sigma > \frac{k}{2}$ absolut konvergent, da ja

$$\sum_{n=1}^{x} |c_n| \leqq \text{Anzahl der Gitterpunkte von } Q \leqq x \text{ exkl. des Nullpunktes mit Nebenbedingungen,}$$
$$\leqq \text{Anzahl der Gitterpunkte von } Q \leqq x$$
$$= O\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$$

ist.

Nun werde für $\sigma > \frac{k}{2}$

(75) $$\mathfrak{Z}(s) = e^{-2\pi i (h_1 z_1 + \cdots + h_k z_k)} M^{2s} Z(s)$$
$$= \sum_{v_1,\ldots,v_k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i M (h_1 v_1 + \cdots + h_k v_k)}}{\left\{Q\left(v_1 + \frac{z_1}{M}, \cdots, v_k + \frac{z_k}{M}\right)\right\}^s}$$

(ohne etwaigen Nenner 0) gesetzt.

Herr Epstein[2]) hat folgende drei Eigenschaften von $\mathfrak{Z}(s)$ bewiesen[3]).

---

1) Also z. B. stets im Falle $M = 1$.

2) 1, 2. Der Spezialfall $k = 2$ und der Spezialfall $Q = a_1 u_1^2 + \cdots + a_k u_k^2$ war allerdings schon durch Herrn Lerch (9, S. 16—18 bezw. 3, S. 66—68) bekannt.

3) Bei denen statt $\frac{z_1}{M}, \cdots, \frac{z_k}{M}$ auch beliebige reelle Zahlen stehen dürfen und für die $a_{\mu\nu}$ auch gewisse komplexe Systeme zulässig sind, was beides hier nicht in Betracht kommt.

1) $\mathfrak{Z}(s)$ ist in der ganzen Ebene meromorph, und zwar mit eventueller Ausnahme des Punktes $s = \frac{k}{2}$ regulär.

2) Es bezeichne $\overline{Q}(u_1, \ldots, u_k)$ die zu Q reziproke quadratische Form; es werde für $\sigma > \frac{k}{2}$

$$\overline{\mathfrak{Z}}(s) = \sum_{v_1, \ldots, v_k = -\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{M}(z_1 v_1 + \cdots + z_k v_k)}}{\{\overline{Q}(v_1 + h_1 M, \ldots, v_k + h_k M)\}^s}$$

(ohne eventuellen Nenner 0) gesetzt, was dort absolut konvergiert[1]) und vom Typus $\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-l_n s}$ ist, so daß für $\sigma < 0$

$$\overline{\mathfrak{Z}}\left(\frac{k}{2} - s\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{l_n s}$$

absolut konvergiert. Dann besteht für $\sigma < 0$ die Funktionalgleichung

$$(76) \quad \pi^{-s}\Gamma(s)\mathfrak{Z}(s) = \varDelta^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu} \pi^{-\frac{k}{2}+s} \Gamma\left(\frac{k}{2} - s\right)\overline{\mathfrak{Z}}\left(\frac{k}{2} - s\right)$$
$$= \Gamma\left(\frac{k}{2} - s\right) \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left(e^{l_n + \log \pi}\right)^s.$$

3) Es werde

$$\sum_{v_1, \ldots, v_k = -\infty}^{\infty} e^{-\pi y Q(v_1 + g_1, \ldots, v_k + g_k) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} G_\nu v_\nu} = \vartheta \left| \begin{matrix} g \\ G \end{matrix} \right| (y)_Q$$

gesetzt und entsprechend $\vartheta \left| \begin{matrix} g \\ G \end{matrix} \right| (y)_{\overline{Q}}$ definiert. Dann ist

a) für durchweg ganze $\frac{z_\nu}{M}$ und $h_\nu M$

$$(77) \quad \begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)\mathfrak{Z}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\varDelta}\left(s - \frac{k}{2}\right)} - \dfrac{1}{s} + \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}\left(\vartheta \left| \begin{matrix} \frac{z}{M} \\ hM \end{matrix} \right| (y)_Q - 1\right) dy \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\varDelta}} \displaystyle\int_1^\infty y^{\frac{k}{2} - s - 1}\left(\vartheta \left| \begin{matrix} hM \\ -\frac{z}{M} \end{matrix} \right| (y)_{\overline{Q}} - 1\right) dy; \end{cases}$$

1) Die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $\overline{Q}(v_1 + j_1, \ldots, v_k + j_k) \leqq x$ bei beliebigen reellen j ist offenbar $O\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$, da der Spielraum jeder Variablen $O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ ist.

b) für durchweg ganze $\frac{z_\nu}{M}$, ohne daß alle $h_\nu M$ ganz sind,

$$(78)\begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)\,\mathfrak{Z}(s) = -\dfrac{e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}}{s} + \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}\frac{z}{M}\\ hM\end{matrix}\right|(y)_Q - e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}\right)dy \\ + \dfrac{e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}}{\sqrt{\Delta}}\displaystyle\int_1^\infty y^{\frac{k}{2}-s-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}hM\\ -\frac{z}{M}\end{matrix}\right|(y)_{\overline{Q}}\,dy; \end{cases}$$

c) für durchweg ganze $h_\nu M$, ohne daß alle $\frac{z_\nu}{M}$ ganz sind,

$$(79)\begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)\,\mathfrak{Z}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}\left(s-\frac{k}{2}\right)} + \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}\frac{z}{M}\\ hM\end{matrix}\right|(y)_Q\,dy \\ + \dfrac{e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}}{\sqrt{\Delta}}\displaystyle\int_1^\infty y^{\frac{k}{2}-s-1}\left(\vartheta\left|\begin{matrix}hM\\ -\frac{z}{M}\end{matrix}\right|(y)_{\overline{Q}} - e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}\right)dy; \end{cases}$$

d) wenn weder alle $\frac{z_\nu}{M}$ noch alle $h_\nu M$ ganz sind,

$$(80)\begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)\,\mathfrak{Z}(s) = \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}\frac{z}{M}\\ hM\end{matrix}\right|(y)_Q\,dy \\ + \dfrac{e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}}{\sqrt{\Delta}}\displaystyle\int_1^\infty y^{\frac{k}{2}-s-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}hM\\ -\frac{z}{M}\end{matrix}\right|(y)_{\overline{Q}}\,dy. \end{cases}$$

Jedes der acht Integrale in diesen Formeln ist eine ganze Funktion und zwar in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ beschränkt. In der Tat ist für $y \geqq 1$ bei Q (und bei $\overline{Q}$ ist es entsprechend), wenn μ_n die positiven mit ganzen v durch $Q(v_1+g_1, \ldots, v_k+g_k)$ darstellbaren Zahlen durchläuft (wo $g_1, \ldots, g_k$ fest sind)

$$\left.\begin{matrix} |\vartheta(y)_Q| \\ \text{bezw.}^{1)}\quad \left|\vartheta(y)_Q - e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_\nu h_\nu}\right| \end{matrix}\right\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n \pi y}$$

$$\leqq e^{-\mu_1 \pi y}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n-\mu_1)\pi}$$

$$= c e^{-\mu_1 \pi y}.$$

1) Wenn 0 darstellbar ist.

Daher ist in jedem Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ für $y \geqq 1$ der Integrand jedes der acht Integrale

$$< e^{-\beta y}$$

bei passender Wahl eines festen $\beta > 0$.

Folglich ist in jedem festen Streifen

$$\mathfrak{Z}(s) = O(e^{2|t|}),$$

also auch

$$Z(s) = O(e^{2|t|}),$$

und die zweite und siebente Voraussetzung des Hauptsatzes sind bei $Z(s)$ erfüllt.

Nach (75) und (76) gelten die dritte und vierte Voraussetzung, indem dabei

$$\mu = \nu = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{k}{2}, \quad \delta_1 = 1$$

ist. Es ist ferner erstens nach Hilfssatz 16

$|c_n| \leqq$ Anzahl der Darstellungen von n durch Q mit Nebenbedingungen,

$\leqq$ Anzahl der Darstellungen von n durch Q ohne Nebenbedingungen

$= O(n^{\alpha + \varepsilon})$

mit $\alpha = \frac{k}{2} - 1$,

fünftens

$$\Sigma\beta = 1 = \Sigma\delta$$

und sechstens

$$\eta = \Sigma\gamma - \Sigma\alpha + \frac{\mu - \nu}{2} = \frac{k}{2}$$

sowohl $\geqq 1$ als auch $\geqq \alpha + \frac{1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$.

Der Hauptsatz ist also anwendbar und ergibt

$$\sum e^{2\pi i(h_1 u_1 + \cdots + h_k u_k)} = \sum_{n=1}^{x} c_n + O(1)$$

$$= R(x) + O\left(x^{\frac{k-1}{2}\frac{k}{k+1} + \varepsilon}\right).$$

Hierbei ist nach (75), (77), (78), (79), (80) im Falle nicht durchweg ganzer $h_\nu M$

$$R(x) = 0,$$

andernfalls

$$R(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}} e^{2\pi i (h_1 z_1 + \cdots + h_k z_k)} M^{-k} \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \frac{J e^{2\pi i (h_1 z_1 + \cdots + h_k z_k)}}{M^k} x^{\frac{k}{2}},$$

wo J den Inhalt des Ellipsoids $Q = 1$ darstellt.

Damit ist der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz: In den Voraussetzungen des bewiesenen Satzes werde jetzt etwas abgeändert. Statt eines M seien k (nicht notwendig übereinstimmende) positive ganze Zahlen $M_1, \ldots, M_k$ gegeben und die u_ν seien jetzt den Kongruenzen

(81) $$u_1 \equiv z_1 \pmod{M_1}, \quad \ldots, \quad u_k \equiv z_k \pmod{M_k}$$

unterworfen. Dann läßt sich natürlich auf Grund des vorigen Satzes die zugehörige Summe

$$\sum e^{2\pi i (h_1 u_1 + \cdots + h_k u_k)}$$

auch auf $O\left(x^{\frac{k-1}{2}\frac{k}{k+1}+\varepsilon}\right)$ abschätzen. Es bezeichne nämlich M das kleinste gemeinsame Vielfache von $M_1, \ldots, M_k$. Dann repräsentieren die Kongruenzen (81) $\frac{M}{M_1} \cdots \frac{M}{M_k} = \frac{M^k}{M_1 \ldots M_k}$ Systeme von Restklassen modulo M. Die Summe aller dieser $\frac{M^k}{M_1 \ldots M_k}$ rechten Seiten von (74) hat aber die Gestalt

$$c' x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}\frac{k}{k+1}+\varepsilon}\right).$$

c' kann nur dann von Null verschieden sein, wenn alle $h_\nu M$ ganz sind. Wenn aber alle $h_\nu M$ ganz sind, ergibt sich

$$c' = \frac{J}{M^k} \sum e^{2\pi i h_1 y_1} \ldots \sum e^{2\pi i h_k y_k},$$

wo y_ν alle Zahlen eines vollständigen Restsystems modulo M durchläuft, die $\equiv z_\nu \pmod{M_\nu}$ sind, also z. B. die Zahlen $z_\nu + w M_\nu$,

$0 \leqq w < \frac{M}{M_\nu}$. Der zugehörige Faktor

$$\sum e^{2\pi i h_\nu y_\nu} = e^{2\pi i h_\nu z_\nu} \sum_{w=0}^{\frac{M}{M_\nu}-1} e^{2\pi i h_\nu M_\nu w}$$

ist offenbar, da ja $e^{2\pi i h_\nu M_\nu}$ eine $\frac{M}{M_\nu}$te Einheitswurzel ist, 0, falls $h_\nu M_\nu$ ganz ist, sonst $\frac{M}{M_\nu} e^{2\pi i h_\nu z_\nu}$. Definitiv kommt also heraus:

$$c = \begin{cases} 0, \text{ wenn nicht alle } h_\nu M_\nu \text{ ganz sind,} \\ \dfrac{J}{M_1 \ldots M_k} e^{2\pi i (h_1 z_1 + \cdots + h_k z_k)} \text{ sonst.} \end{cases}$$

Speziell für den in der Einleitung erwähnten Spezialfall $h_1 = \cdots = h_k = 0$ ist also die Anzahl der Gitterpunkte von $Q \leqq x$ mit den Nebenbedingungen (81)

$$\frac{J}{M_1 \ldots M_k} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k-1}{2} \frac{k}{k+1} + \varepsilon}\right);$$

insbesondere ist die Formel (9) der Einleitung hiermit (und schon als Spezialfall $h_1 = \cdots = h_k = 0$ des Satzes zu Anfang dieses Paragraphen) bewiesen.

§ 17. Folgerungen.

Der Satz des § 16 soll zunächst für die dreidimensionale Kugel und die vierdimensionale Kugel spezialisiert werden. Für erstere,

$$u^2 + v^2 + w^2 \leqq x,$$

kommt als Gesamtzahl der Gitterpunkte

$$\frac{4}{3} \pi x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4} + \varepsilon}\right)$$

heraus, ein neues, schon in der Einleitung erwähntes Ergebnis dieser Arbeit. Für letztere,

$$u^2 + v^2 + w^2 + y^2 \leqq x,$$

ergibt sich

$$\frac{\pi^2}{2} x^2 + O\left(x^{\frac{6}{5} + \varepsilon}\right).$$

Doch mache ich ausdrücklich darauf aufmerksam, daß das letzte Resultat wegen einer ganz speziellen Eigenschaft der quaternären

Form $u^2+v^2+w^2+y^2$ keinen Fortschritt darstellt. Nach Jacobi[1]) ist nämlich die Lösungszahl c_n der Gleichung

$$u^2+v^2+w^2+y^2 = n$$

für jedes ganze positive n, wenn $S(n)$ die Summe der Teiler von n, und u den größten ungeraden Teiler von n bezeichnet,

$$\begin{aligned} &= 24\,S(u) \quad \text{für gerades } n,\\ &= 8S(u) \quad \text{für ungerades } n. \end{aligned}$$

Nun ist nach dem bekannten[2]) Paradigma

$$\sum_{n=1}^{x} S(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x\log x),$$

wo $S(n)$ die Summe aller Teiler von n ist, leicht beweisbar:

$$\sum_{u\leqq x} S(u) = \frac{\pi^2}{32}x^2 + O(x\log x),$$

wo der Buchstabe u alle ungeraden Zahlen des betr. Intervalle durchläuft, desgl. v beim Beweise. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{u\leqq x} S(u) &= \sum_{uv\leqq x} u\\ &= \sum_{v\leqq x}\ \sum_{u\leqq \frac{x}{v}} u\ ; \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} \sum_{u\leqq y} u &= \sum_{v=1}^{\left[\frac{y+1}{2}\right]} (2v-1)\\ &= \left[\frac{y+1}{2}\right]^2\\ &= \frac{y^2}{4} + O(y) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \sum_{u\leqq x} S(u) &= \sum_{v\leqq x} \frac{x^2}{4v^2} + O\left(x\sum_{v\leqq x}\frac{1}{v}\right)\\ &= \frac{x^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{8} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + O(x\log x)\\ &= \frac{\pi^2}{32}x^2 + O(x\log x)\\ (82) \qquad &= \frac{\pi^2}{32}x^2 + O(x^{1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

1) Vergl. z. B. Tannery und Molk, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,* Bd. IV, Paris (1902), S. 262—263.

2) Vergl. Dirichlet 12.

Andererseits ist nach der Jacobischen Formel für $x \geqq 2$

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = 8 \sum_{u \leqq x} S(u) + 24 \sum_{u \leqq \frac{x}{2}} S(u) + 24 \sum_{u \leqq \frac{x}{4}} S(u) + \cdots$$
$$+ 24 \sum_{u \leqq \frac{x}{2^R}} S(u),$$

wo $R = R(x)$ durch

$$\frac{x}{2^R} \geqq 1 > \frac{x}{2^{R+1}}$$

bestimmt ist. Daher liefert (82)

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = \frac{\pi^2}{32}\left(8x^2 + 24\frac{x^2}{4} + 24\frac{x^2}{4^2} + \cdots + 24\frac{x^2}{4^R}\right) + O\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2^n}\right)^{1+\varepsilon}$$
$$= \frac{\pi^2}{32}\left(8x^2 + 24\left(\frac{x^2}{3} + O\left(\frac{x^2}{4^{R+1}}\right)\right)\right) + O(x^{1+\varepsilon})$$
$$= \frac{\pi^2}{32}(16x^2 + O(1)) + O(x^{1+\varepsilon})$$
$$= \frac{\pi^2}{2}x^2 + O(x^{1+\varepsilon}),$$

und 1 ist besser als $\frac{6}{5}$.

Aber für die dreidimensionale Kugel ist mein Resultat bereits bei der Abzählung der regelmäßigen Gitterpunkte als neu anzusehen. Ferner ist folgende Abzählung unregelmäßiger Gitterpunkte wegen einer nachfolgenden Anwendung von Interesse:

$$u^2 + v^2 + w^2 \leqq x, \quad u \equiv a, \quad v \equiv b, \quad w \equiv c \pmod{2},$$

wo a, b, c eine beliebige der 8 Möglichkeiten darstellt. Der Satz zu Anfang des vorigen Paragraphen ergibt

$$\frac{\pi}{6}x^2 + O\left(x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right).$$

Damit hat es folgende Bewandtnis. Die Lösungszahl c_n der Gleichung

$$u^2 + v^2 + w^2 = n$$

steht für alle $n \geqq 1$ mit der Anzahl $F(n)$ der Klassen positiver Formen $au^2 + 2buv + cv^2$ der Diskriminante $b^2 - ac = -n$, bei denen a und c nicht beide gerade sind, nach Gauß[1]) in der Beziehung

1) Vergl. z. B. Kronecker, *Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVII (1860), S. 248—255]; auf S. 251, Z. 6 v. u. ebenda lies: $3G(n)$ statt $G(n)$, 5 statt 2, — statt +.

$c_n = 12F(n)$, falls $n \equiv 1 \pmod{4}$ und n dabei kein Quadrat ist,
$c_n = 12F(n) - 6$, falls n ein ungerades Quadrat ist,
$c_n = 12F(n)$, falls $n \equiv 2 \pmod{4}$ ist,
$c_n = \ \ 8F(n)$, falls $n \equiv 3 \pmod{8}$ ist.

Für $n \equiv 7 \pmod{8}$ ist bekanntlich $c = 0$, und über die durch 4 teilbaren n will ich hier die entsprechende Untersuchung unterlassen, da nichts wesentlich neues gegenüber den n des Textes herauskommt[1]).

Wenn nun u, v, w unabhängig alle Zahlen der Restklassen 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 (modulo 2) durchlaufen, so kommen alle Lösungen von

$$u^2 + v^2 + w^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

heraus; desgleichen für 1, 1, 0; 1, 0, 1; 0, 1, 1 alle von

$$u^2 + v^2 + w^2 \equiv 2 \pmod{4},$$

schließlich für 1, 1, 1 die von

$$u^2 + v^2 + w^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Also habe ich, da der vom -6 der obigen Beziehung zwischen c und F bei ungeraden Quadraten entstehende Fehler offenbar $O(\sqrt{x})$, also zu vernachlässigen ist, bewiesen:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{4}}}^{x} F(n) = \frac{\pi}{24} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 2 \pmod{4}}}^{x} F(n) = \frac{\pi}{24} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 3 \pmod{8}}}^{x} F(n) = \frac{\pi}{48} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right).$$

Es bezeichne $G(x)$ die über alle in 3 Quadrate zerlegbaren positiven n (d. h. alle, die nicht von der Form $4^b(8m+7)$, $b \geqq 0$, $m \geqq 0$ sind) $\leqq x$ erstreckte Summe $\sum F(n)$. Dann ergibt sich auf Grund der Formel

$$F(4n) = \begin{cases} 2F(n), & \text{wenn } n \text{ kein ungerades Quadrat ist,} \\ 2F(n) - 1, & \text{wenn } n \text{ ein ungerades Quadrat ist,} \end{cases}$$

1) Übrigens ist $c_{4n} = c_n$ und $F(4n) = 2F(n) - 1$ bezw. $2F(n)$, je nachdem n ein ungerades Quadrat ist oder nicht, wodurch sich natürlich auch für alle durch 4 teilbare, in 3 Quadrate zerlegbare n eine Beziehung zwischen c_n und $F(n)$ ergibt.

leicht folgendes. Zunächst ist, wenn $\sum'$ bezeichnet, daß nur die in 3 Quadrate zerlegbaren n berücksichtigt werden, und der Index ϱ der Summe $\sum_{\varrho}$ angibt, daß 4 genau ϱ mal in n aufgeht,

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x}{}'_{0} F(n)$$
$$= \frac{5\pi}{48} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

also

$$K(x) = \sum_{n=1}^{x}{}'_{1} F(n)$$
$$= 2\sum_{m=1}^{\frac{x}{4}}{}'_{0} F(m) - \text{Anzahl der ungeraden Quadrate bis } \frac{x}{4}$$
$$= 2H\left(\frac{x}{4}\right) + O(\sqrt{x})$$
$$= \frac{5\pi}{192} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

d. h. bei passender Wahl eines $c = c(\varepsilon)$ für alle $x \geqq 1$

$$\left| K(x) - \frac{5\pi}{192} x^{\frac{3}{2}} \right| \leqq c x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}.$$

Folglich ist, wenn die ganze Zahl $B = B(x)$ durch

$$4^{B} \leqq x < 4^{B+1}$$

bestimmt ist,

$$G(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 4^{\lambda}(8m+7)}}^{x} F(n)$$
$$= H(x) + K(x) + \sum_{n=1}^{x}{}'_{2} F(n) + \sum_{n=1}^{x}{}'_{3} F(n) + \cdots + \sum_{n=1}^{x}{}'_{B} F(n)$$
$$= H(x) + K(x) + 2K\left(\frac{x}{4}\right) + 2^{2} K\left(\frac{x}{4^{2}}\right) + \cdots + 2^{B-1} K\left(\frac{x}{4^{B-1}}\right)$$
$$= H(x) + \sum_{\varrho=0}^{B-1} 2^{\varrho} K\left(\frac{x}{2^{2\varrho}}\right)$$
$$= \frac{5\pi}{48} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}-\varepsilon}\right) + \sum_{\varrho=0}^{B-1} 2^{\varrho} \frac{5\pi}{192} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2^{3\varrho}} + O\sum_{\varrho=0}^{B-1} 2^{\varrho} \frac{x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}}{2^{\frac{5}{2}\varrho+2\varrho\varepsilon}}$$
$$= \frac{5\pi}{48} x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}-\varepsilon}\right) + \frac{5\pi}{192} x^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2\varrho}} - \sum_{\varrho=B}^{\infty} \frac{1}{2^{2\varrho}} \right) + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}\varrho+2\varrho\varepsilon}} \right.$$

$$= \frac{5\pi}{48} x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}) + \frac{5\pi}{192} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$$

$$= \frac{5\pi}{36} x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Aber über die Summe

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 7 \pmod 8}}^{x} F(n)$$

und damit

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n = 4^{\nu}(8m+7)}}^{x} F(n)$$

kann meine Methode nichts Neues aussagen und daher Herrn Mertens'[1]) Satz

$$(83) \qquad \sum_{n=1}^{x} F(n) = \frac{\pi}{6} x^{\frac{3}{2}} + O(x)$$

nicht verbessern.

Herr Mertens hatte dies durch Betrachtung der reduzierten Formen gefunden. Die reduzierten positiven Formen (a, b, c) der Diskriminante $b^2 - ac = -n$ sind durch die Ungleichungen

$$(84) \qquad 2|b| \leqq a \leqq c$$

bestimmt; je zwei sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie (a, b, c), $(a, -b, c)$ lauten, wo $b \gtrless 0$ ist, und in (84) mindestens ein Gleichheitszeichen gilt. Die Summe links in (83) ist also gleich der Anzahl derjenigen Gitterpunkte der (von einem zweischaligen Hyperboloid und Ebenen begrenzten) Figur

$$ac - b^2 \leqq x, \quad 2|b| \leqq a \leqq c,$$

bei denen a und c nicht beide gerade sind und (a, b, c) nicht gezählt wird, falls $b < 0$ und zugleich $a = 2|b|$ oder $a = c$ ist.

Auf weitem Umwege habe ich aber jetzt z. B. über die Anzahl derjenigen jener Gitterpunkte (unter Weglassung der soeben charakterisierten), für welche $n = ac - b^2 \equiv 1$ oder 2 oder 3 oder 5 oder 6 (mod. 8) ist, im Fehlerglied $O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$ gefunden. Der Rest von $ac - b^2$ modulo 8 hängt aber nur von dem Rest der

---

1) 1, S. 316. Die, im übrigen nicht einwandfreie, Untersuchung von Herrn Pfeiffer über Klassenzahlsummen (vergl. seine in der Einleitung erwähnte Arbeit) kommt bis $\frac{5}{6} + \varepsilon$, nicht $\frac{3}{4} + \varepsilon$.

Zahlen a, b, c modulo 8 ab. Ich habe also — wie die folgende Abzählung zeigen wird — für 240 dieser $\frac{3}{4} \cdot 8^3 = 384$ denkbaren Gitter, bei denen unabhängig a, b, c die Restklassensysteme modulo 8 durchlaufen, und a und c nicht beide gerade sind, $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ im Fehlerglied gefunden:

$n \equiv 1 \pmod{4}$ entsteht aus $\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{2}, & ac \equiv 1 \pmod{4}. \quad \text{Anzahl: } 4.\ 8 = 32 \\ b \equiv 1 \pmod{2}, & ac \equiv 2 \pmod{4}. \quad \text{Anzahl: } 4.16 = 64 \end{cases}$

$n \equiv 2 \pmod{4}$ entsteht aus $\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{2}, & ac \equiv 2 \pmod{4}. \quad \text{Anzahl: } 4.16 = 64 \\ b \equiv 1 \pmod{2}, & ac \equiv 3 \pmod{4}. \quad \text{Anzahl: } 4.\ 8 = 32 \end{cases}$

$n \equiv 3 \pmod{8}$ entsteht aus $\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{4}, & ac \equiv 3 \pmod{8}. \quad \text{Anzahl: } 2.\ 4 = 8. \\ b \equiv 2 \pmod{4}, & ac \equiv 7 \pmod{8}. \quad \text{Anzahl: } 2.\ 4 = 8. \\ b \equiv 1 \pmod{2}, & ac \equiv 4 \pmod{8}. \quad \text{Anzahl: } 4.\ 8 = 32 \end{cases}$

Inhaltsverzeichnis.

Begründung der elementaren Strahlungstheorie.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Vorgelegt am 22. August 1912.

Die Theorie der linearen Integralgleichungen hat, wie bekannt, in der Analysis, der Geometrie und in der Mechanik die mannigfaltigste Anwendung gefunden und zu einer Reihe neuer und tiefliegender Ergebnisse auf diesen mathematischen Wissensgebieten geführt [1]. In dieser Mitteilung beabsichtige ich, die Bedeutung dieses wichtigen mathematischen Hülfsmittels für die theoretische Physik zu erörtern.

In einer Abhandlung „Begründung der kinetischen Gastheorie“ [2] habe ich mittelst der Theorie der linearen Integralgleichungen gezeigt, wie auf Grund der Maxwell-Boltzmannschen Fundamentalformel — der sogenannten Stoßformel — ein systematischer Aufbau der kinetischen Gastheorie möglich wird, derart daß es nur einer konsequenten Durchführung der durch die Methode vorgeschriebenen mathematischen Operationen bedarf, um den Beweis des zweiten Wärmesatzes, den Boltzmannschen Ausdruck für die Entropie des Gases, die Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung und der Wärmeleitung, sowie die Theorie der Diffusion mehrerer Gase zu erhalten. Zugleich gewinnen wir bei der weiteren Entwickelung der Theorie die genauen Bedingungen, unter denen der Satz von der Gleichverteilung der Energie auf die intramolekularen Parameter gültig ist, sowie einen neuen

1) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1912.

2) l. c. Kap. XXII, sowie Math. Ann. 1912.

Satz über die Bewegung der Gase mit zusammengesetzten Molekülen, welcher aussagt, daß die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik allemal in einem weit allgemeineren Sinne wie gewöhnlich besteht, nämlich auch dann noch, wenn wir die Kontinuitätsgleichung so ansetzen, als ob im Gase in jedem Augenblick nur diejenigen Moleküle vorhanden wären, deren intramolekulare Parameter sämtlich die nämlichen bestimmten Werte haben bez. in bestimmten Wertintervallen liegen.

Indessen gibt es ein anderes physikalisches Wissensgebiet, dessen Prinzipien von mathematischer Seite noch garnicht untersucht worden sind und zu dessen Begründung, wie ich neuerdings gefunden habe, eben jenes mathematische Hülfsmittel der Integralgleichungen notwendig ist — ich meine die elementare Strahlungstheorie und verstehe hierunter denjenigen phaenomenologischen Teil der Strahlungstheorie, der unmittelbar auf den Begriffen der Emission und Absorption beruht und in den Kirchhoffschen Sätzen über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption gipfelt.

Die folgenden Ausführungen haben zunächst das Ziel, aus den elementaren wohldefinierten Begriffen der Emission und der Absorption die Kirchhoffschen Sätze theoretisch zu beweisen; dieses Ziel kann ohne Heranziehung der Integralgleichungen nicht erreicht werden: in der Tat stellen sich die bisher vorliegenden Beweisversuche für die Kirchhoffschen Sätze als ungenügend heraus.

Der xyz-Raum sei kontinuierlich mit Materie erfüllt, die überall ruhe und die gleiche konstante Temperatur besitze, so daß auch die Wärme sich nirgends bewege. Der Austausch von Energie finde lediglich durch Strahlung statt, die wir uns überall von gleicher konstanter Schwingungszahl denken wollen. Die physikalische Beschaffenheit der Materie ist dann an jeder Stelle xyz in strahlungstheoretischer Hinsicht durch folgende drei Koeffizienten charakterisiert:

1. Geschwindigkeit des Lichtes als Funktion des Ortes xyz:

$$q = q(xyz).$$

Durch diese Funktion allein sind bereits die möglichen Lichtwege oder Strahlen, längs deren der Energietransport stattfindet, mathematisch vollständig bestimmt: nämlich als die Minimalkurven des Variationsproblems

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \frac{ds}{q} = \text{Min.},$$

wo

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

das Bogenelement des Strahles und $x_1 y_1 z_1$, xyz irgend zwei Punkte im Raume bedeuten. Denken wir uns nun durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ sämtliche Strahlen konstruiert und auf jedem derselben vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ aus derart eine Strecke abgemessen, daß das Integral

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \frac{ds}{q}$$

allemal den gleichen Wert erhält, so ist einem Satze von Gauß zufolge der Ort der Endpunkte eine Fläche, die sämtliche von $x_1 y_1 z_1$ ausgehenden Strahlen orthogonal schneidet. Nunmehr konstruieren wir längst eines jener Strahlen, etwa des von $x_1 y_1 z_1$ nach xyz gehenden Strahles, einen Kegel mit der Spitze in $x_1 y_1 z_1$ und der kleinen räumlichen Winkelöffnung $d\chi$; derselbe möge aus jener Orthogonalfläche ein Flächenstück von dem Inhalte $d\sigma$ ausschneiden: der Wert, dem sich der Quotient $d\sigma : d\chi$ in der Grenze nähert, wenn jener Kegel sich auf den Verbindungsstrahl von $x_1 y_1 z_1$ und xyz selbst zusammenzieht, möge kurz mit $\frac{d\sigma}{d\chi}$ bezeichnet werden; $\frac{d\sigma}{d\chi}$ ist offenbar eine Funktion von x_1, y_1, z_1; x, y, z. Es werde noch



Figur 1.

$$\frac{1}{q^2(xyz)} \frac{d\sigma}{d\chi} = S(x_1 y_1 z_1, xyz) \tag{1}$$

gesetzt. Diese Funktion S der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und xyz besitzt eine unter besonderen Voraussetzungen aus der Optik her bekannte, aber auch allgemein bereits erörterte Eigenschaft[1]), die ich kurz folgendermaßen ausspreche:

Symmetriesatz. Die Funktion S ist symmetrisch in Bezug auf die beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und xyz.

Ist q überall konstant, etwa $= 1$, so sind die Strahlen sämtlich gerade Linien und die Funktion S wird nichts anderes als das Quadrat der Entfernung der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und xyz.

1) Vgl. Straubel, Phys. Zeitschr. IV (1903) S. 114.

2. Der Emissionskoeffizient als Funktion des Ortes

$$\eta = \eta(xyz).$$

Durch denselben drückt sich die Energie aus, welche an irgend einer Stelle xyz erzeugt und von dort aus gleichmäßig nach allen Richtungen hin und fortdauernd ausgestrahlt wird, und zwar ist die während der Zeit dt im Volumenelement

$$dv = dx\,dy\,dz$$

erzeugte und von dort in dem räumlichen Winkel $d\chi$ ausgestrahlte Energie gleich

(2) $$\frac{1}{4\pi}\eta\,dt\,dv\,d\chi.$$

3. Absorptionskoeffizient α als Funktion des Ortes xyz

$$\alpha = \alpha(xyz).$$

Durch denselben drückt sich die Schwächung aus, welche die Energie beim Transport längs des Strahles erfährt, und zwar erleidet die Energiemenge E während des Transportes längs des Kurvenelementes ds die Abnahme

(3) $$dE = \alpha E\,ds;$$

so daß aus der Energiemenge E_1, wenn sie von dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ längs des Strahles nach dem Punkte xyz wandert, bei Ankunft in xyz stets die kleinere Energiemenge

$$E = E_1 e^{-\left|\int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \alpha\,ds\right|}$$

oder

(4) $$E = E_1 e^{-A}$$

geworden ist, wo zur Abkürzung

$$A = \left|\int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \alpha\,ds\right|$$

bedeutet.

Die Koeffizienten q, η, α seien durchweg positiv.

Die wichtigste Frage, die nun entsteht, ist die nach der Möglichkeit des thermischen Gleichgewichtes bezw. nach den Bedingungen, die etwa zwischen den drei Koeffizienten q, η, α nötig sind, damit thermisches Gleichgewicht statthat.

Um diese Frage zu entscheiden, berechnen wir zunächst die gesamte Energiedichte, die bei unseren Annahmen infolge der

Emission und Absorption der Materie an irgend einer Stelle xyz besteht. Die während der Zeit dt bei $x_1\, y_1\, z_1$ aus dem Volumenelement

$$dv_1 = dx_1\, dy_1\, dz_1$$

im räumlichen Winkel $d\chi$ emittierte Energiemenge ist nach (2)

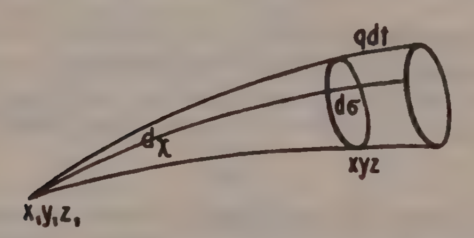
$$\frac{1}{4\pi}\,\eta(x_1\, y_1\, z_1)\, dt\, dv_1\, d\chi;$$

mit Rücksicht auf die Absorption kommt hiervon wegen (4) nur die Energiemenge

$$\frac{1}{4\pi}\,\eta(x_1\, y_1\, z_1)\, dt\, dv_1\, d\chi\, e^{-A}$$

in der Umgebung des Punktes xyz an. Diese Energiemenge, da sie während dt den Weg $ds = q\,dt$ zurücklegt, erfüllt hier am Punkte xyz ein rechtwinkliges Parallelepiped vom Inhalte

$$d\sigma\,.\,q\,dt;$$



Figur 2.

daher ergibt sich für die Dichte der vom Volumenelement dv_1 emittierten Energie im Punkte xyz

$$\frac{\frac{1}{4\pi}\,\eta(x_1\, y_1\, z_1)\, dt\, dv_1\, d\chi\, e^{-A}}{d\sigma\,.\,q\,dt}$$

und dies ist ein Ausdruck von der Form

$$\varDelta\, dv_1,$$

wo $\varDelta$ die Bedeutung hat:

$$\varDelta = \frac{1}{4\pi q}\,\frac{d\chi}{d\sigma}\,\eta(x_1\, y_1\, z_1)\, e^{-A}$$

oder bei Einführung der Funktion S nach (1)

$$\varDelta = \frac{\eta(x_1\, y_1\, z_1)}{4\pi q^3}\,\frac{e^{-A}}{S}$$

gesetzt ist. Die gesuchte Gesamtdichte u der Strahlungsenergie im Punkte xyz ergibt sich hiernach durch Integration über x_1, y_1, z_1, wie folgt:

(5) $$u = \int \varDelta\, dv_1$$

d. h.

(6) $$u = \frac{1}{4\pi q^2} \int\int\int \frac{e^{-A}}{S}\, \eta(x_1 y_1 z_1)\, dx_1\, dy_1\, z_1;$$

das dreifache Integral rechter Hand ist hier über den ganzen mit Materie erfüllten Raum zu erstrecken, der überdies teilweise noch mehrfach überdeckt zu nehmen ist — entsprechend dem Umstande, daß die von dem Punkte xyz ausgehenden Strahlen sich im allgemeinen jenseits ihrer zu xyz konjugierten Punkte d. h. der ihnen gemeinsamen Enveloppe schneiden und mithin die Energie vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ auf mehreren verschiedenen Wegen nach xyz hin gelangt: in dem einfachen Raume sind eben S und A im allgemeinen nicht als eindeutige Funktionen von xyz und $x_1 y_1 z_1$ anzusehen.

Die fundamentale Bedeutung der Formel (6) wird erhellen, wenn wir nunmehr die Bedingung des thermischen Gleichgewichtes einführen. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß die während der Zeit dt aus dem Volumenelement dv emittierte Energie

(7) $$\eta\, dt\, dv$$

einen Wärmeverlust für das Volumenelement dv ausmacht, der, wenn thermisches Gleichgewicht bestehen soll, gerade durch denjenigen Wärmegewinn ausgeglichen werden muß, der durch die während dt in dv absorbierte Energie insgesamt hervorgerufen wird. Um letztere Energie zu finden, benutzen wir das vorhin erhaltene Resultat, wonach derjenige Teil der Energiedichte im Punkte xyz, der von der Emission des Volumenelementes dv_1 herrührt, den Wert $\varDelta\, dv_1$ besitzt; diese von dv_1 herrührende Energie durchströmt das Volumenelement dv in der durch den Verbindungsstrahl zwischen xyz und $x_1 y_1 z_1$ bezeichneten Richtung. Wäre nun das Volumenelement dv von der Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen eine Kante parallel jener Richtung liege, so daß die Energie durch die eine rechteckige Seitenfläche des Parallelepipeds eintritt und durch die gegenüberliegende Seitenfläche austritt, so könnten wir diesen stationären Energiefluß innerhalb des Parallelepipeds auch als Kreislauf für ein und dieselbe Energiemenge auffassen, indem wir uns denken, daß jedes Energieteilchen bei seiner Ankunft an der Austrittsstelle momentan wieder an

seine Eintrittsstelle versetzt wird. Da $\Delta\, dv_1$ die Dichte der strömenden Energie ist, so zirkuliert auf diese Weise innerhalb des Parallelepipeds die Energiemenge $\Delta\, dv_1\, dv$ und da sie während der Zeit dt den Weg

$$ds = q\, dt$$

zurücklegt, so wird nach der Definition (3) des Absorptionskoeffizienten während dt innerhalb dv die Energiemenge

$$\alpha \,.\, \Delta\, dv_1\, dv \,.\, q\, dt$$

absorbiert. Hat das Volumenelement dv nicht die vorhin angenommene Gestalt, so können wir dennoch dv in lauter solche Parallelepipeds zerlegen, deren eine Kante parallel der Strahlrichtung läuft; die Anwendung des eben gefundenen Ausdruckes auf jedes dieser Parallelepipede und ihre Summation läßt dann erkennen, daß der erhaltene Ausdruck für die absorbierte Energie allgemein gültig ist. Aus diesem Ergebnis finden wir die gesuchte während dt in dv absorbierte Gesamtenergie durch Integration und mit Rücksicht auf (5), wie folgt:

$$\alpha q\, dv\, dt \int \Delta\, dv_1 = \alpha q\, u\, dv\, dt.$$

Die Vergleichung mit (7) liefert

$$\eta = q \alpha u$$

oder

$$u = \frac{\eta}{q \alpha},$$

und mithin erhalten wir aus (6) die gesuchte Bedingung für das thermische Gleichgewicht in der Gestalt:

$$\eta - \frac{\alpha}{4 \pi q^2} \iiint \frac{e^{-A}}{S}\, \eta(x_1 y_1 z_1)\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = 0. \tag{8}$$

Diese in x, y, z identisch zu erfüllende Gleichung fordert eine Beziehung zwischen den drei physikalischen Koeffizienten q, η, α und stellt, falls wir q und α als Funktion des Ortes gegeben ansehen, *für η eine homogene lineare Integralgleichung zweiter Art* dar, deren Kern

$$K(xyz, x_1 y_1 z_1) = \frac{e^{-A}}{S} = \frac{e^{-\left|\int_{xyz}^{x_1 y_1 z_1} \alpha\, ds\right|}}{S(x_1 y_1 z_1, xyz)} \tag{9}$$

eine stets *positive* Funktion der beiden Variabelntripel x, y, z und

$x_1 y_1 z_1$ ist, die überdies in Bezug auf letztere wegen des anfangs ausgesprochenen Symmetriesatzes *symmetrisch* ausfällt. Da ferner die Funktion S beim Zusammenrücken der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und xyz wie das Quadrat ihrer Entfernung zu Null wird, so wird der Kern K alsdann nur von der zweiten Ordnung unendlich und dieser Umstand bewirkt — da es sich um eine Integralgleichung im dreidimensionalen Raume handelt —, daß die allgemeine Theorie der Integralgleichungen anwendbar ist. Weiterhin wird K nur dann unendlich, wenn $x_1 y_1 z_1$ und xyz zwei konjugierte Punkte eines Strahles sind, da in diesem Fall S verschwindet. Auch diese Singularität des Kernes — derselbe wird hier von der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich — bildet kein Hindernis für die Anwendung der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, wie späterhin durch eine genauere mathematische Untersuchung erhärtet werden soll.

Wenn insbesondere unser System derart ist, daß nirgends auf einem Strahle zwei konjugierte Punkte vorkommen, so möge dasselbe als *brennfrei* bezeichnet werden.

Nunmehr kommt alles darauf an, festzustellen, ob die soeben gefundene homogene orthogonale Integralgleichung (8) für η eine von Null verschiedene Lösung besitzt.

Wir nehmen an, daß unser System ganz im Endlichen liege und von Wänden eingeschlossen ist, die entweder schwarz sind oder spiegeln. Dabei ist eine Wand als schwarz definiert, wenn der Absorptionskoeffizient α bei der Annäherung an einen Punkt $(x\,y\,z)^*$ über alle Grenzen wächst und zwar derart, daß das Integral

$$\int^{(x\,y\,z)^*} \alpha\, ds$$

auf jedem nach $(x\,y\,z)^*$ laufenden Strahle unendlich wird. Die Eigenschaft des Spiegelns kann analytisch dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß q an der Wand unendlich wird. Doch soll im Folgenden einfach q bis an die Wand heran endlich und für den Strahl die Gültigkeit des Reflexionsgesetzes angenommen werden.

Setzen wir in der Integralgleichung (8)

$$\eta = \frac{\alpha\varphi}{q^2}$$

ein, so erhält dieselbe die Gestalt:

$$\varphi(xyz) - \frac{1}{4\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\alpha(x_1 y_1 z_1)}{q^2(x_1 y_1 z_1)}\, K\, \varphi(x_1 y_1 z_1)\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = 0$$

oder, wenn wir — wie es fortan der Kürze halber stets geschehen

soll — die Argumente $x_1 y_1 z_1$ durch den unteren an den betreffenden Ausdruck zu setzenden Index 1 bezeichnen:

$$\varphi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K \varphi_1 \, dv_1 = 0. \tag{10}$$

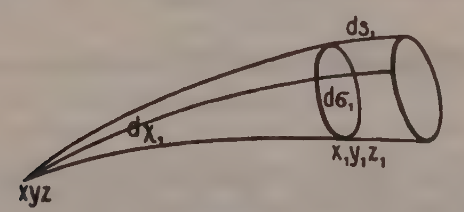
Diese Integralgleichung besitzt nun die Lösung $\varphi = 1$. In der Tat wegen

$$dv_1 = ds_1 \, d\sigma_1 = ds_1 \frac{d\sigma_1}{d\chi_1} d\chi_1 = q_1^2 S \, ds_1 \, d\chi_1 \tag{11}$$

wird:

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K \, dv_1 = \int\int_0 \alpha_1 e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 \, ds_1} ds_1 \, d\chi_1,$$

wo das Integral für $d\chi_1$ über die Oberfläche der Einheitskugel und das Integral für ds_1 von $s_1 = 0$ längs des ganzen Strahles zu



Figur 3.

erstrecken ist. Wenn nun ein Strahl auf der schwarzen Wand endigt, so wird unserer Festsetzung zufolge

$$\int_0 \alpha_1 \, ds_1 = \infty;$$

in jedem anderen Falle — wegen der Reflexion an der spiegelnden Wand — wird der Strahl unendlich lang; da aber α wegen unserer Annahme als stetige überall positive Ortsfunktion gewiß nicht unter einen gewissen positiven Minimalwert herabsinken kann, so ist auch in diesem Falle das Integral

$$\int_0 \alpha_1 \, ds_1 = \infty.$$

Wegen

$$\alpha_1 e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 \, ds_1} = - \frac{d}{ds_1} e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 \, ds_1}$$

folgt mithin

$$\int_0 \alpha_1 e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} ds_1 = 1;$$

demnach erhält das obige Integral den Wert 4π und mithin ist in der Tat

$$(12) \qquad 1 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K dv_1 = 0.$$

Da somit φ = konst. eine Lösung von (10) ist, so befriedigt die Funktion

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} \text{ konst.}$$

die Integralgleichung (8); hierdurch haben wir erkannt, daß *in unserem Systeme ein thermischer Gleichgewichtszustand möglich ist*, nämlich für

$$(13) \qquad \frac{q^2 \eta}{\alpha} = \text{konst.}$$

oder bei Einführung der Energiedichte u, wenn

$$(14) \qquad q^2 u = \text{konst.}$$

ist.

Nachdem wir somit die Möglichkeit eines thermischen Gleichgewichtszustandes erkannt haben, fragt es sich, ob das Bestehen dieser Gleichung (13) auch umgekehrt für das thermische Gleichgewicht notwendig ist d. h. ob die Integralgleichung (8) keine andere Lösung außer

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} \text{ konst.}$$

oder daß die Integralgleichung (10) nur die eine Lösung φ = konst. zuläßt. Dieser Nachweis gelingt nun in der Tat; zu dem Zwecke machen wir zunächst die Annahme, daß unser System brennfrei und die sämtlichen umschließenden Wände schwarz seien. Vermöge (12) läßt sich die Integralgleichung (10) in die Form bringen:[1]

$$(15) \qquad \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K(\varphi_1 - \varphi) dv_1 = 0;$$

---

1) Die folgende Schlußweise ist derjenigen nachgebildet, die zur Untersuchung der analogen Frage für die Integralgleichung der Gastheorie dient; sie ist, wie letztere, mir zuerst von Herrn Dr. E. Hecke angegeben worden.

hieraus erhalten wir durch Multiplikation mit $\frac{\alpha}{q^2}\varphi$ und Integration über x, y, z die Gleichung

$$\iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K\varphi(\varphi_1-\varphi)\, dv\, dv_1 = 0$$

und, indem wir x, y, z bezw. mit $x_1\, y_1\, z_1$ gegenseitig vertauschen:

$$-\iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K\varphi_1(\varphi_1-\varphi)\, dv\, dv_1 = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich

$$\iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K(\varphi_1-\varphi)^2\, dv\, dv_1 = 0$$

und folglich ist notwendigerweise

$$\varphi_1 - \varphi = 0$$

d. h.

(16) $$\varphi = \text{konst.};$$

damit ist der Kirchhoffsche Satz, wie er in den Formeln (13) und (14) seinen Ausdruck findet, bewiesen.

Wenn die Materie nicht von schwarzen, sondern von lauter spiegelnden Wänden eingeschlossen ist, so läßt sich selbst wenn das System nicht brennfrei ist, der Nachweis für die Notwendigkeit von (16) sehr einfach auf folgende Art führen. Es nehme die Funktion φ im Punkte xyz ihren kleinsten Wert μ an; da die Konstante eine Lösung von (10) ist, so wird auch die nirgends negative Funktion

$$\psi = \varphi - \mu$$

eine Lösung dieser Integralgleichung (10); dieselbe sagt für den Punkt xyz aus, daß

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K\psi_1\, dv_1 = 0$$

sein muß; daher ist durchweg:

$$\psi = 0, \text{ d. h. } \varphi = \mu.$$

Diese Schlußweise behält ihre Kraft, auch wenn der Punkt xyz auf die spiegelnde Wand fällt, da für einen solchen Punkt die Integralgleichung (10) gültig bleibt, wenn man rechts zum Integral den Faktor 2 hinzusetzt.

Im allgemeinen Fall, wenn das System nicht brennfrei ist und

teils von schwarzen, teils von spiegelnden Wänden umschlossen wird, liegt, wie schon vorhin angedeutet worden ist, eine mathematische Schwierigkeit in der Bedeutung der vorkommenden Integrale, da dann der von der Materie ausgefüllte Raum R durch die von xyz ausgehenden sich mehrfach treffenden Strahlen mehrfach überdeckt wird und die Integration für x_1, y_1, z_1 über den so entstehenden mehrfach überdeckten Raum $\overline{R}$ zu erstrecken ist.

Es bezeichne f irgend eine stetige Funktion von xyz und $x_1 y_1 z_1$, die schon im einfachen Raume R eindeutig ist; dann wollen wir zeigen, daß das Integral

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K f \, d\overline{v}_1 \tag{17}$$

einen Sinn hat und daß dasselbe als Grenzwert eines über den einfach bedeckten Raum R zu erstreckenden Integrales dargestellt werden kann; dabei ist durch die — fortan stets zu benutzende — Bezeichnung $d\overline{v}_1$ angedeutet worden, daß die Integration für x_1, y_1, z_1 über den mehrfach bedeckten Raum $\overline{R}$ zu erstrecken ist.

Vermöge (11) erhalten wir für (17) die Darstellung

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K f \, d\overline{v}_1 = \iint\limits_0 \alpha_1 e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 \, ds_1} f \, ds_1 \, d\chi_1, \tag{18}$$

die wir zugleich als die Definition des Integrales (17) aufzufassen haben; sie zeigt, daß dieses Integral einen endlichen bestimmten Wert besitzt. Andererseits: wenn l eine positive endliche Zahl bedeutet, dann gilt wiederum vermöge (11) die Formel

$$\int^{(l)} \frac{\alpha_1}{q_1^2} K f \, d\overline{v}_1 = \iint_0^l \alpha_1 e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 \, ds_1} f \, ds_1 \, d\chi_1, \tag{19}$$

wobei durch das Zeichen (l) links über dem Integral angedeutet wird, daß die Integration für $x_1 y_1 z_1$ nunmehr nur über denjenigen Teil des mehrfach überdeckten Raumes $\overline{R}$ erstreckt werden soll, dessen Punkte $x_1 y_1 z_1$ mit dem festen Punkte xyz durch Strahlen von einer Länge $\leqq l$ verbunden sind. Unter der Voraussetzung, daß q eine analytische Ortsfunktion ist, und die spiegelnden Wände ebenfalls durch analytische Funktionen dargestellt werden, läßt sich zeigen, daß es auf einem Strahle durch xyz der endlichen Länge l nur eine endliche Anzahl zu jenem Punkte konjugierter Punkte gibt — entsprechend der bekannten Tatsache, daß die Eigenwerte eines Systems von linearen Differentialgleichungen ohne singulären

Stellen sich im Endlichen nicht häufen. Demnach gibt es auch nur eine endliche Anzahl analytischer Flächenstücke, auf denen S verschwindet und die für den Integrationsbereich des Integrals linker Hand in (19) in Betracht kommen. Infolge dessen läßt sich dieses Integral auch in der Gestalt

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} (\overset{(l)}{\sum} K) f dv_1$$

darstellen, wo das Integral lediglich über den einfachen Raum R zu erstrecken ist und der Ausdruck

$$\overset{(l)}{\sum} K$$

die endliche Summe derjenigen Werte des Kerns K bedeutet, die den sämtlichen von xyz nach $x_1 y_1 z_1$ hinführenden Strahlen von einer Länge $\leqq l$ entsprechen.

Diese Summe erweist sich als eine Funktion von $x, y, z; x_1, y_1, z_1$, die bei festgehaltenen Werten von xyz auch im einfachen Raume R der Variabeln x_1, y_1, z_1 eindeutig ist und nur auf einer endlichen Anzahl analytischer Flächen unendlich wird; sie ist überdies in bezug auf x, y, z und x_1, y_1, z_1 symmetrisch. Aus (18) und (19) folgt

$$\int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K f d\bar{v}_1 = \lim_{(l=\infty)} \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} (\overset{(l)}{\sum} K) f dv_1 .$$

Multiplizieren wir diese Formel mit $\frac{\alpha}{q^2}$ und integrieren dann nach xyz, und zwar lediglich über den einfachen Raum R, so entsteht die Gleichung

$$\iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K f \, dv \, d\bar{v}_1 = \lim_{(l=\infty)} \iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} (\overset{(l)}{\sum} K) f \, dv \, dv_1 ,$$

hierbei ist die Integration rechter Hand für die Variabeln $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ über den einfachen sechsdimensionalen Raum (R, R_1) zu erstrecken und die unter dem Integral rechter Hand stehende Summe ist für jeden endlichen Wert von l nach den obigen Ausführungen eine eindeutige Funktion in diesem Raume, die nur auf einer endlichen Anzahl fünfdimensionaler analytischer Räume unendlich wird.

Die gleiche Schlußweise führt uns andererseits zu der Formel

$$\iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K f \, d\bar{v} \, dv_1 = \lim_{(l=\infty)} \iint \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} (\overset{l}{\sum} K) f \, dv \, dv_1 ,$$

wo $d\bar{v}$ linker Hand anzeigt, daß die Integration für xyz über den mehrfach überdeckten Raum $\bar{R}$ zu estrecken ist. Der Vergleich der beiden zuletzt erhaltenen Formeln führt uns schließlich zu der Gleichung:

$$\int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K f \, dv \, d\bar{v}_1 = \int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K f \, d\bar{v} \, dv_1.$$

Nehmen wir insbesondere

$$f = \varphi(\varphi_1 - \varphi)$$

so haben wir

$$(20) \quad \int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K \varphi(\varphi_1 - \varphi) \, dv \, d\bar{v}_1 = \int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K \varphi(\varphi_1 - \varphi) \, d\bar{v} \, dv_1.$$

Nunmehr sind wir imstande, den gewünschten Nachweis rasch zu Ende zu führen. Ist φ eine der Gleichung

$$\varphi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K \varphi_1 \, d\bar{v}_1 = 0$$

genügende Funktion, so ziehen wir hieraus und aus

$$1 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\alpha_1}{q_1^2} K \, d\bar{v}_1 = 0$$

wie vorhin in dem einfachsten Falle die Folgerung

$$(21) \quad \int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K \varphi(\varphi_1 - \varphi) \, dv \, d\bar{v}_1 = 0$$

und wegen (20) ist mithin auch

$$\int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K \varphi(\varphi_1 - \varphi) \, d\bar{v} \, dv_1 = 0.$$

Vertauschen wir hierin gegenseitig xyz bez. mit $x_1 y_1 z_1$, so entsteht die Gleichung

$$(22) \quad \int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K \varphi_1(\varphi_1 - \varphi) \, dv \, d\bar{v}_1 = 0.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (21) und (22) ergibt sich

$$\int\int \frac{\alpha\alpha_1}{q^2 q_1^2} K (\varphi_1 - \varphi)^2 \, dv \, d\bar{v}_1 = 0$$

und folglich ist

$$\varphi_1 = \varphi$$

d. h.

$$\varphi = \text{konst.}$$

Damit haben wir den Beweis für den folgenden Satz vollständig erbracht:

Wenn irgend ein Raum durch Wände, die teils schwarz teils spiegelnd sein sollen, abgeschlossen ist und die darin befindliche Materie sich in ruhendem Zustande und thermischem Gleichgewicht befindet, so ist an jeder Stelle

$$q^3 u = \frac{q^3 \eta}{\alpha},$$

und diese Größe hat notwendigerweise einen vom Orte d. h. von der physikalischen Beschaffenheit der Materie und von der Umgebung der Stelle unabhängigen Wert; derselbe ist also eine universelle Funktion der Temperatur und der Schwingungszahl.

Dieser Satz erscheint hier als eine tiefliegende mathematische Wahrheit, deren Inhalt durch das physikalische Experiment gefunden und auf Grund physikalischer Kombinationen vorausgesagt worden ist, dessen Beweis aber erst mittelst der Theorie der Integralgleichungen möglich wird. Er ist der wichtigste der Kirchhoffschen Sätze; die übrigen Kirchhoffschen Sätze sind unmittelbare Folgerungen.

Wir wollen zunächst die Energie berechnen, die während der Zeit dt durch das Flächenelement df innerhalb des räumlichen Elementarkegels $d\chi_1$ hindurchströmt, wenn dessen Mittellinie L mit der Normale von df den Winkel ϑ einschließt. Zu dem Zwecke konstruieren wir denjenigen Elementarzylinder, der df und ein zu df paralleles Flächenelement zu Grundflächen hat und durch gerade Linien von der Länge $q\,dt$ und von der Richtung der Mittellinie L erzeugt wird; das Volumen dieses Elementarzylinders ist

$$(23) \qquad dv = df \,.\, \cos\vartheta \, q\, dt.$$

Die gesuchte Energie erhalten wir dann gleich derjenigen Energie, die sich in diesem Elementarzylinder befindet und denselben innerhalb des räumlichen Winkels $d\chi_1$ durchströmt. Letztere Energie ist aber zufolge unserer früheren Darlegungen gleich dem Ausdrucke

$$(24) \qquad \int_0^\infty (\varDelta\, d\sigma_1)\, ds_1 \,.\, dv,$$

worin

$$\varDelta = \frac{1}{4\pi q}\frac{d\chi}{d\sigma}\eta_1 e^{-A}$$

zu nehmen ist. Da nach dem Symmetriesatze

$$\frac{1}{q^2}\frac{d\sigma}{d\chi} = \frac{1}{q_1^2}\frac{d\sigma_1}{d\chi_1}$$

ist, so haben wir auch

$$\varDelta = \frac{1}{4\pi q^2}\frac{d\chi_1}{d\sigma_1} q_1^2 \eta_1 e^{-A}$$

und da nach dem Kirchhoffschen Satze

$$\frac{q_1^2 \eta_1}{\alpha_1} = \frac{q^2 \eta}{\alpha}$$

ist, so wird auch

$$\varDelta = \frac{\eta}{4\pi q\alpha}\frac{d\chi_1}{d\sigma_1}\alpha_1 e^{-A}.$$

Unter Benutzung dieses Wertes für $\varDelta$ wird der Ausdruck (24) gleich

$$\frac{\eta}{4\pi q\alpha} d\chi_1 \int_0^\infty \alpha_1 e^{-A} ds_1 \cdot dv = \frac{\eta}{4\pi q\alpha} d\chi_1 \, dv$$

oder wegen (23) gleich

$$\frac{\eta}{4\pi\alpha}\cos\vartheta \, dt \, df \, d\chi_1$$

d. h. die Helligkeit H der Strahlung ist

$$H = \frac{\eta}{4\pi\alpha} = \frac{qu}{4\pi};$$

damit ist auch *der bekannte Zusammenhang zwischen der Helligkeit und der Energiedichte der Strahlung* bewiesen worden.

Ebenso folgt nunmehr leicht der von M. Planck formulierte Satz, wonach derjenige Teil der von einem Volumenelement emittierten Energie, welcher in einem andern Volumenelement absorbiert wird, stets gleich demjenigen Teil der von letzterem emittierten Energie ist, der im ersteren Volumenelement absorbiert wird.

Wir haben bisher stets die Koeffizienten q, η, α als stetig veränderlich mit dem Orte angenommen, während gerade in den Experimenten am häufigsten die sprungweise Aenderung dieser Koeffizienten beim Durchgang durch die Grenzflächen von Körpern mit physikalisch verschiedener Beschaffenheit vorkommt: doch läßt sich diese sprungweise Unstetigkeit der Koeffizienten nachträglich leicht durch eine Limesbetrachtung erledigen, so daß die aufgestellten Sätze sämtlich ihre Gültigkeit bewahren.

Unsere Theorie bezog sich auf den Ruhezustand der Materie

und das thermische Gleichgewicht. Lassen wir Bewegung der Materie oder der Wärme zu, so tritt im Allgemeinen auch eine Bewegung der Strahlung ein und die gewonnenen Kirchhoffschen Sätze bedürfen dann einer Modifikation. Im Vorstehenden sind die Prinzipien einer solchen „*Kinetik der Strahlung*" bereits mit enthalten: die Bewegung von Materie bez. die Wärmeleitung kommt nämlich im wesentlichen in der Art zur Geltung, als ob im Raume noch besonders Wärmequellen und Wärmesenken angebracht seien und an Stelle der homogenen linearen Integralgleichung (8) für η tritt alsdann die inhomogene lineare Integralgleichung

$$(25) \qquad \eta - \frac{\alpha}{4\pi q^2} \int K \eta_1 \, dv_1 = w,$$

wobei w die Dichte der örtlichen Wärmezu- und abfuhr bezeichnet — in dem Sinne, daß $w\,dt\,dv$ die während dt dem Volumenelement dv zugeführte Wärme ausdrückt. Da die homogene Integralgleichung die einzige Lösung

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} \text{ konst.}$$

zuläßt, und wegen der oben festgestellten Eigenschaften des Kernes die allgemeine Theorie der Integralgleichungen anwendbar ist, so besitzt die inhomogene Integralgleichung (25) dann und nur dann eine Lösung, wenn die sogenannte Orthogonalitätsbedingung

$$\int w \, dv = 0$$

erfüllt ist d. h. wenn die Gesamtzufuhr der Wärme Null beträgt. Hierin liegt die grundlegende Bedeutung des Kirchhoffschen Satzes für die Theorie der Bewegung der Strahlung und analog, wie in der Gastheorie die Theorie der Bewegung des Gases sich auf die inhomogene Integralgleichung, wie sie aus der Maxwell-Boltzmannschen Stoßformel entspringt, in konsequenter Weise aufbauen läßt, *bildet die inhomogene Integralgleichung* (25) *das Fundament für die Kinetik der Strahlung.*

Die Methode der Bestimmung von p-T-Linien zur Feststellung von Zustandsdiagrammen.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Juli 1912.

Für Temperaturgebiete, in denen es schwierig ist, dauernd eine konstante Temperatur herzustellen, also für die Temperaturgebiete über 100° und unter 0°, wird man mit Vorteil an Stelle der Bestimmung[1]) der Gleichgewichtsdrucke bei konstanter Temperatur eine andere Methode zur Ausarbeitung von Zustandsdiagrammen, die der p-T-Linien, benutzen. Diese Methode gründet sich auf die gleichzeitige Beobachtung von Druck und Temperatur während der Erwärmung des zu untersuchenden Stoffes.

Betreffs der äußeren Bedingungen, denen der Stoff ausgesetzt wird, werden wir zwei Hauptfälle zu unterscheiden haben. Das eine Mal ist der Stoff von einer Hülle konstanten Volumens umgeben, das andere Mal von einer Hülle, der diese ideale Eigenschaft abgeht. In diesem Falle wird sich das Volumen des Stoffes bei Änderung von p und T ebenfalls ändern.

Auf Grund der p-T-Linien können, wie wir sehen werden, die Gleichgewichtskurven (Schmelzkurven und Umwandlungskurven) leicht konstruiert werden. Auch die Volumenänderungen Δv bei konstanter Temperatur und konstantem Druck bei der Zustandsänderung können mit Hilfe dieser Kurven und der Kompressibilität des Stoffes abgeleitet werden, und aus Δv und der Richtung der

1) Krystallisieren und Schmelzen S. 192.

Gleichgewichtskurve $\left(\frac{dT}{dp}\right)$, können auch die Schmelzwärmen bei verschiedenen Drucken berechnet werden.

Aber nicht nur bei der Untersuchung der Einstoffsysteme, sondern auch bei der von Zwei- und Mehrstoffsystemen werden die p-T-Kurven, ebenso wie die Abkühlungskurven von grundlegender Bedeutung werden.

1. Die isometrischen Geraden und die Schmelzkurve.

Es wurde früher[1]) gezeigt, daß die Volumenflächen eines Krystalls und seiner Schmelze durch die beiden Gleichungen:

1) $$(v_{3,p} - v_{3,p=\infty})(K + \varDelta K + p) = c_3 T$$

und

2) $$(v_{2,p} - v_{2,p=\infty})(K + p) = c_2 T$$

dargestellt werden können.

Das Giltigkeitsgebiet der beiden Gleichungen umfaßt das Stück der p-T-Ebene, welches von der Schmelzkurve begrenzt wird, ausgenommen das Gebiet ganz tiefer Temperaturen.

Wenn $v_{3,p=\infty} > v_{2,p=\infty}$ ist, so müssen, wie früher gezeigt wurde, die Volumenflächen des Krystalls und seiner Schmelze sich schneiden. Die Projektion dieser Schnittkurve auf die p-T-Ebene ist die neutrale Kurve. Ferner müssen, wenn die Volumengleichungen 1) und 2) gelten, die isometrischen Linien Gerade sein und ihre Richtungen $\left(\frac{dp_2}{dT}\right)_v$ und $\left(\frac{dp_3}{dT}\right)_v$ sind durch die Konstanten der Volumengleichungen bestimmt.

Aus 1) und 2) folgen für die isometrischen Linien die Gleichungen:

3) $$p_3 = \left(\frac{c_3}{v_{3,p} - v_{3,p=\infty}}\right)_{v_3 = \text{konst.}} . T - (K + \varDelta K)$$

und

4) $$p_2 = \left(\frac{c_2}{v_{2,p} - v_{2,p=\infty}}\right)_{v_2 = \text{konst.}} . T - K.$$

Für die isometrischen Linien können auch die Gleichungen:

5) $$p_3 = B_3 . T - B_3 . T_{3,p=0}$$

und

6) $$p_2 = B_2 . T - B_2 . T_{2,p=0},$$

1) Annalen der Physik Bd. 37 S. 975 1912.

in denen $B_3 = \left(\frac{dp_3}{dT}\right)_{v_3 = \text{konst.}}$ und $B_2 = \left(\frac{dp_2}{dT}\right)_{v_2 = \text{konst.}}$ bedeuten, geschrieben werden.

Vergleicht man die Gleichungen 3) und 5) und die Gleichungen 4) und 6), so erhält man:

$$7)\quad \left(\frac{c_3}{v_{3,p} - v_{3,p=\infty}}\right)_{v_3 = \text{konst.}} = B_3 \text{ und } \left(\frac{c_2}{v_{2,p} - v_{2,p=\infty}}\right)_{v_2 = \text{konst.}} = B_2$$

und

$$8)\qquad B_3 \,.\, T_{3,p=0} = K + \Delta K \text{ und } B_2 \,.\, T_{2,p=0} = K.$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen können die isometrischen Geraden leicht konstruiert werden. Trägt man auf der über ihren Nullpunkt hinaus verlängerten p-Achse die Stücke $K + \Delta K$ und K von $p = 0$ ab, und kennzeichnet auf der T-Achse die Temperaturen $T_{3,p=0}$ und $T_{2,p=0}$, bei denen die Volumen des Krystalls und seiner Schmelze den geforderten konstanten Wert $v_{3,p=0}$ resp. $v_{2,p=0}$ haben, so sind die durch zwei zugehörige Punkte der verlängerten p-Achse und der T-Achse gelegte Gerade die gesuchten isometrischen Geraden.

Man kann ferner zeigen, daß, wenn $v_3 = v_2$ gesetzt wird, die isometrische Linie des Krystalls flacher verläuft und die T-Achse bei einer höheren Temperatur schneidet als die isometrische Linie der Flüssigkeit.

Verbindet man die Gleichungen 7) mit den Gleichungen 1) und 2), so erhält man:

$$11)\qquad B_3 = \frac{K + \Delta K + p}{T}, \quad B_2 = \frac{K + p}{T}.$$

Für einem Punkt der neutralen Kurve müssen in diesen beiden Gleichungen die p- und T-Werte dieselben sein, da sich über den Punkten der neutralen Kurve die beiden Volumenflächen, und daher auch die beiden räumlichen, isometrischen Geraden schneiden.

Dividiert man die beiden Gleichungen 11) in einander, so ergibt sich:

$$12)\qquad \frac{B_3}{B_2} = \frac{\left(\frac{dp_3}{dT}\right)_{v_3}}{\left(\frac{dp_2}{dT}\right)_{v_3}} = \frac{K + \Delta K + p}{K + p} > 1.$$

Wenn $v_3 = v_2$, so ist bei gleicher Temperatursteigerung die Drucksteigerung im Krystall größer als in der Schmelze, voraus-

gesetzt, daß bei der Krystallisation eine Erhöhung des inneren Drucks erfolgt, daß also $\varDelta K$ einer positiven Wert hat.

Verbindet man die Gleichungen 11) mit den Gleichungen 8), so erhält man

$$13) \qquad \frac{T}{T_{3,p=0}} = \frac{K+\varDelta K+p}{K+\varDelta K} \text{ und } \frac{T}{T_{2,p=0}} = \frac{K+p}{K}.$$

Liegt der Zustandspunkt (p, T) wieder auf der neutralen Kurve, so sind in den Gleichungen 13) die T- und p-Werte identisch.

Die Division der beiden Gleichungen ergibt:

$$14) \quad \frac{T_{3,p=0}}{T_{2,p=0}} = \frac{(K+p)(K+\varDelta K)}{K(K+\varDelta K+p)} = \frac{K^2+K\varDelta K.p+\varDelta K.p}{K^2+K\varDelta K+K.p} > 1.$$

Es werden also, wenn unter der Bedingung $v_2 = v_3$ die Beziehung $K+\varDelta K > K$ zutrifft, die beiden folgenden Beziehungen:

$$15) \qquad \left(\frac{dp_3}{dT}\right)_v > \left(\frac{dp_2}{dT}\right)_v$$

und

$$16) \qquad T_{3,p=0} > T_{2,p=0}$$

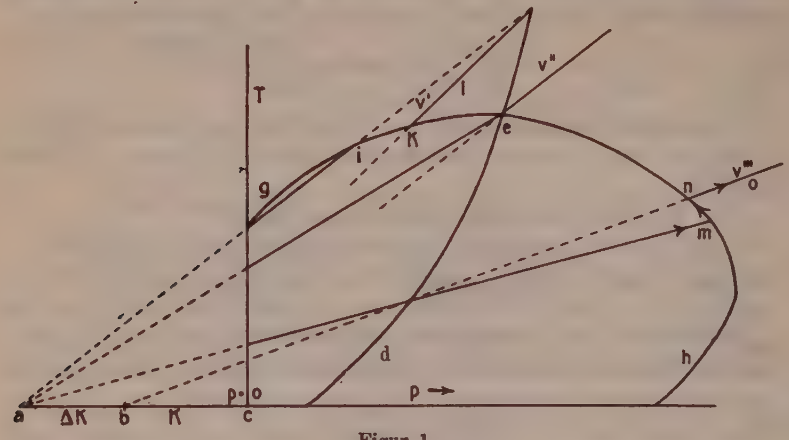
gelten müssen.

Zu denselben Beziehungen gelangt man auf geometrischem Wege durch folgende Überlegungen.

Die neutrale Kurve auf der p-T-Ebene ist die Projektion der Raum-Kurve, in der sich die Volumenflächen eines Krystalls und seiner Schmelze schneiden. Da auf der Raum-Kurve, in der sich die beiden Volumenflächen schneiden, sich nicht nur die Isothermen, sondern auch die Isobaren und Isometrischen der Volumen des Krystalls und seiner Schmelze schneiden, so müssen auch auf der Projektion der Raum-Kurve auf die p-T-Ebene, auf der neutralen Kurve, die Isothermen-, Isobaren-Paare und die Paare der isometrischen Geraden sich schneiden.

Die Konstruktion der isometrischen Linien ist, wenn die Konstanten, $K+\varDelta K$ und K, die neutrale Kurve, *ed*, und die Schmelzkurve *geh*, gegeben sind, sehr einfach und in Fig. 1 für die konstanten Volumen, v', v'' und v''', durchgeführt. Auf der nach negativen p hin verlängerten Druckachse sind von $p = 0$ die inneren Drucke: $K = bc$ und $K+\varDelta K = ac$, aufgetragen. Die Isometrische des Krystalls, die durch den maximalen Schmelzpunkt e geht, erhält man durch geradlinige Verbindung der Punkte a und e und die der Schmelze, die ebenfalls durch den maximalen Schmelz-

punkt geht, durch Verbindung der Punkte b und e. Da im maximalen Schmelzpunkt die Schmelzung von keiner Volumenänderung begleitet wird, so tritt in diesem Punkte auch keine stärkere



Figur 1.

Druckänderung ein. Man ersieht ferner, daß in Übereinstimmung mit den Gleichungen 16) und 17) die Isometrische des Krystalls flacher als die der Schmelze verläuft und die T-Achse bei einer höheren Temperatur schneidet als die der Schmelze, weil der Punkt a von e weiter entfernt ist als der Punkt b von e.

Denkt man sich die neutrale Kurve in das Zustandsfeld der Schmelze verlängert, so kann man dieselbe Konstruktion für Volumen, die größer als das Volumen im maximalen Schmelzpunkt sind, ausführen. Diese Isometrischen bestehn aus drei Stücken, dem Stück ai für den Krystall, dem Stück kl für die Schmelze, und dem sie verbindenden Stück der Schmelzkurve, ik, dessen Projektion auf die Druckachse die bei der Schmelzung bei konstantem Volumen entwickelte Sprengkraft angibt.

Führt man die Konstruktion der Isometrischen für einen Punkt der neutralen Kurve, die in das Zustandsfeld des Krystalls fällt, aus, so erhält man die isometrische Linie, $amno$. Bei der Schmelzung nimmt nun nicht wie im Gebiete links von der neutralen Kurve der Druck zu sondern ab.

Man ersieht, daß auf die Bestimmung der isometrischen Linien sich eine Methode zur Bestimmung der Koordinaten der Schmelzkurve und insbesondere zur Bestimmung von p und T des maximalen Schmelzpunktes gründen läßt, worauf im § 4 zurückgekommen werden wird. Auch zur Extrapolation der Koordinaten der neutralen Kurven würde sich die Bestimmung der Isometri-

schen für gleiche Volumen eines Krystalles und seiner Schmelze empfehlen.

Fig. 1 stellt, wie wir sahen, die Beziehungen der isometrischen Geraden zu der Schmelzkurve dar für den Fall, daß während und nach der Schmelzung das konstante Volumen erhalten bleibt. Außer diesem Diagramm kann noch ein zweites, Fig. 2, abgeleitet werden, in dem jedes Paar der isometrischen Geraden sich auf das Volumen des Krystalls und seiner Schmelze in einem Zustandspunkt der

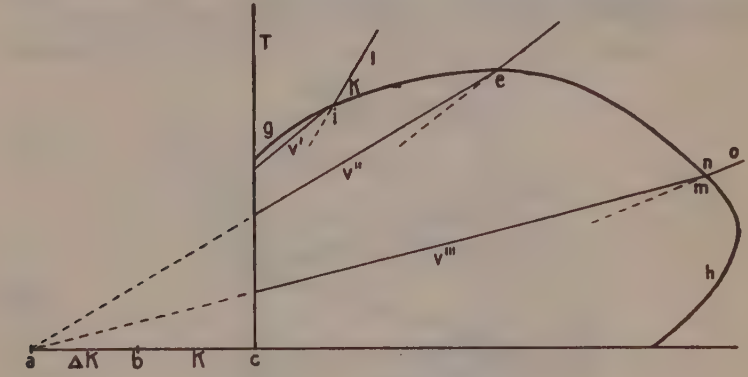


Fig. 2.

Schmelzkurve bezieht. Die konstanten Volumen des Krystalls und seiner Schmelze sind dann um die Volumänderung beim Schmelzen, Δv, verschieden. Zur Konstruktion der isometrischen Geraden des Krystalls hat man den betreffenden Punkt der Schmelzkurve geradlinig mit dem Punkte a zu verbinden, und die Isometrische der Schmelze erhält man durch geradlinige Verbindung desselben Punktes der Schmelzkurve mit dem Punkte b.

2. Die Ermittelung der Volumenänderung beim Schmelzen aus den isometrischen Linien.

Aus der Volumenfläche kann man eine Beziehung zwischen den Bestimmungsstücken der Isometrischen und der Kompressibilität einerseits und der Volumenänderung beim Schmelzen andererseits ableiten.

Fig. 3 stellt ein Stück der Volumenfläche dar, welches durch zwei der v-T-Ebene parallele Ebenen aus der Gesamt-Volumenfläche herausgeschnitten ist. Die Linien, $k' b'' b' i$ und $h c'' c' g'$, sind also Isobaren, die Linien, $b' g'$ und $k' c''$, Isothermen und die Linie $a' b' c'' d'$ eine Isometrische, für die sich das Volumen auch beim

Schmelzen nicht ändert. Die Volumenfläche der Flüssigkeit, $k'hc''b''$, und die des Krystalls, $b'c'g'i$, werden von der Fläche, $b'b''c''c'$, in den Raum-Kurven, $b''c''$ und $b'c'$, geschnitten. Die Fläche $b'b''c''c'$ entsteht durch Bewegung einer Geraden auf der Schmelzkurve bc, die während ihrer Bewegung immer parallel der v-Achse verläuft. Die Isometrische im v, p, T-Raume, die Linie, $a'b'c''d'$, hat auf den drei Flächen, $k'b''c''h$, $b''b'c'c''$ und $b'c'g'a'$ in allen Punkten gleiche Werte des Volumens; ihre Projektion auf die p-T-Ebene ist die $(p, T)_v$-Linie, $abcd$.

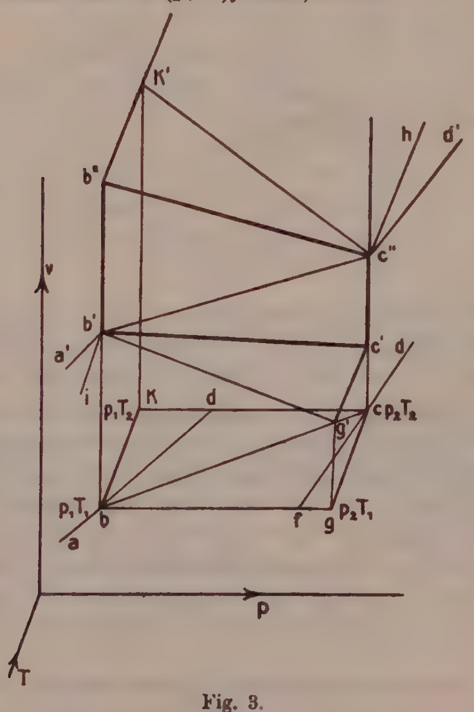


Fig. 3.

Aus Fig. 3 ist zu ersehen, daß die Volumenänderung, $c'c''$, beim Schmelzen im Zustandspunkte, $c = T_2, p_2$, gleich ist der isothermen Volumenverkleinerung des Krystalls bei der Drucksteigerung von p_1 auf p_2 $(g'g - b'b)$ plus seiner Volumenvergrößerung bei Erwärmung unter dem Druck, p_2, von T_1 auf T_2 $(c'c - g'g)$. Es gilt also:

$$c'c'' = (c'c - g'g) + (g'g - b'b)$$

oder

1) $$\Delta v_{p_2 T_2} = \frac{d_{p_2} v_2}{dT}(T_2 - T_1) + \frac{d_{T_1} v_2}{dp}(p_2 - p_1).$$

Da ferner $gb = bf + \frac{gf}{gc} gc$ oder

2) $$p_2 - p_1 = \varDelta p_{T_1} + \frac{d_v p_2}{dT}(T_2 - T_1)$$

ist, so erhält man durch Verbindung von 1) und 2)

3) $$\varDelta v_{p_2 T_2} = \left[\frac{d_{p_2} v_2}{dT} + \frac{d_v p_2}{dT} \cdot \frac{d_{T_1} v_2}{dp}\right](T_2 - T_1) + \frac{d_{T_1} v_2}{dp} \cdot \varDelta p_{T_1}.$$

Nimmt man in erster Annäherung an, daß die Schmelzkurve zwischen den Punkten $T_1 p_1$ und $T_2 p_2$ geradlinig verläuft

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) = \text{konst.},$$

so gilt, wie aus Fig. 3 ersichtlich,

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) = \frac{T_2 - T_1}{\varDelta p_{T_1} + \frac{d_v p_2}{dT}(T_2 - T_1)}$$

oder

4) $$T_2 - T_1 = \frac{\varDelta p_{T_1}\left(\frac{dT}{dp}\right)}{1 - \frac{d_v p_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)}.$$

Eliminiert man aus 3) und 4) $T_2 - T_1$, so erhält man nach einer Umformung die Gleichung:

5) $$\varDelta v_{p_2 T_2} = \frac{\frac{d_{p_2} v_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right) + \frac{d_{T_1} v_2}{dp}}{1 - \frac{d_v p_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)}.$$

Multipliziert und dividiert nun die rechte Seite der Gleichung 5) mit $\frac{d_T v_2}{dp}$ und berücksichtigt, daß

$$-\frac{\frac{d_p v_2}{dT}}{\frac{d_T v_2}{dp}} = \frac{d_v p_2}{dT},$$

so erhält man:

6) $$\varDelta v_{p_2 T_2} = \frac{1 - \frac{d_v p_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)}{1 - \frac{d_v p_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)} \cdot \varDelta p_{T_1} \cdot \frac{d_{T_1} v_2}{dp}.$$

Für den Zustandspunkt $p_1\,T_1$ ergibt sich die Volumenänderung beim Schmelzen $\Delta v_{p_1 T_1}$ in ganz analoger Weise zu:

$$\Delta v_{p_1 T_1} = \frac{1 - \frac{d_v p_2}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)}{1 - \frac{d_v p_3}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)} \cdot \Delta p_{T_2} \cdot \frac{d_{T_2} v_2}{dp}. \tag{7}$$

Man kann also die Volumenänderungen beim Schmelzen für die beiden Zustandspunkte $p_2\,T_2$ und $p_1\,T_1$ aus der isometrischen Linie ableiten, allerdings braucht man hierzu noch einen Wert, der aus der Isometrischen nicht zu ermitteln ist, nämlich die Kompressibilität des Stoffes für das Druckintervall $p_2 - p_1$ im flüssigen Zustande bei der Temperatur T_2 oder im Krystall-Zustande für die Temperatur T_1.

Aus 6) und 7) ist ferner zu ersehen, daß beim Maximum der Schmelzkurve, in dem die Volumenänderungen beim Schmelzen, $\Delta v_{p_2 T_2}$ und $\Delta v_{p_1 T_1}$ durch den Nullwert gehn, die Druckänderungen Δp_{T_1} und Δp_{T_2} ebenfalls durch den Nullwert gehn. Denn, wenn $\Delta v_{p,T} = 0$ wird, so muß nach der Clausius-Clapeyronschen Gleichung auch $\left(\frac{dT}{dp}\right) = 0$ sein, und da ferner $\frac{d_T v_2}{dp}$ und $\frac{d_T v_3}{dp}$ beim Maximum der Schmelzkurve endliche Werte haben, und da dasselbe auch für die Werte $\frac{d_v p_2}{dT}$ und $\frac{d_v p_3}{dT}$ gilt, so müssen Δp_{T_1} und Δp_{T_2} durch den Nullwert gehn. Es wird also auf der $(p\text{-}T)_v$-Linie, welche durch den maximalen Schmelzpunkt geht, die durch das Schmelzen verursachte Druckänderung verschwinden, während die Richtungen der beiden Isometrischen sich von einander auch im maximalen Schmelzpunkt unterscheiden werden.

An einem Modell der Volumenfläche ist direkt zu ersehn, daß mit wachsendem Druck die Stücke bc der $(p, T)_v$-Linien, Fig. 3, abnehmen und bei dem Druck des maximalen Schmelzpunktes ihr Vorzeichen wechseln.

3. Die Ableitung der Volumenänderungen beim Schmelzen aus den p-T-Linien bei variabeln Volumen.

Eine Temperatursteigerung in einem Stoff bei konstantem Volumen ist praktisch nicht ausführbar. Das Volumen des zu untersuchenden Stoffes wird, wenn er vollständig flüssig oder vollständig krystallisiert ist, wachsen, wenn seine $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ und

$\frac{d_\tau v}{dp}$-Werte kleiner sind als die der ihn umgebenden Körper, während für die $\frac{d_p v}{dT}$-Werte die umgekehrte Beziehung gilt; bei entgegengesetztem Größenverhältnis jener Werte wird das Volumen des zu untersuchenden Stoffes abnehmen. Wenn die in Fig. 4 gezeichnete p-T-Linie sich nicht auf eine Temperatursteigerung bei konstantem Volumen bezieht, so werden die Linien ab und cd in der Regel nicht mit den Isometrischen des zu untersuchenden Stoffes zusammenfallen.

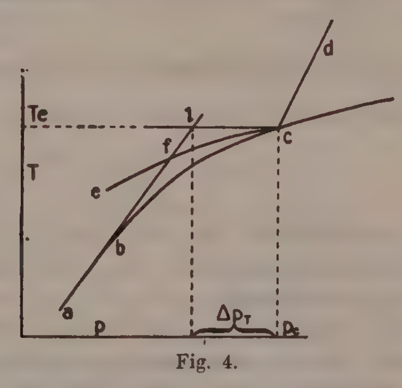


Fig. 4.

Ferner wird der Eintritt der Schmelzung, auch wenn der Stoff nur geringe Mengen von Beimengungen enthält, auf der p-T-Linie nicht als scharfer Knick erscheinen, denn durch die geringste Beimengung wird die Temperatur des Beginns der Schmelzung sehr merklich erniedrigt werden, nämlich, wenn die Bildung von Mischkrystallen nicht stattfindet, bis zu den binären, respektive ternären eutektischen Punkten der Hauptbeimengungen. Je mehr aber geschmolzen ist, um so mehr wird sich die p-T-Linie in ihrem Teile bc der Schmelzkurve ec sich nähern Fig. 4, da mit zunehmender Menge der Schmelze die Konzentration der Beimengungen abnimmt und damit auch ihr Einfluß auf die Schmelztemperatur. Wenn hinreichend langsam erwärmt wird, so wird der Punkt c des Endes der Schmelzung auf die Schmelzkurve fallen. Ist beiden Bedingungen, hinreichender chemischer Homogenität und hinreichend langsamer Erwärmung genügt, so wird die p-T-Linie durch $afcd$ dargestellt werden, das Mittelstück fc dieser Linie fällt dann praktisch mit der Schmelzkurve zusammen.

Aus der p, T-Linie kann man die Drucksteigerung bei konstanter Temperatur, Δp_τ, welche durch die Schmelzung verursacht

wird, ableiten, indem man das Stück ab geradlinig verlängert und durch den Punkt c eine Parallele zur p-Achse legt. Der Abstand des Schnittpunktes e vom Punkte c ist gleich Δp_τ, der Drucksteigerung während der Schmelzung bei konstanter Temperatur.

Die der Drucksteigerung Δp_τ entsprechende Volumenänderung Δv_τ bei der Temperatur des Endes der Schmelzung Te kann experimentell ermittelt werden. Hierzu hat man nach Festlegung der p-T-Linie das Gefäß mit dem Stoff in den Zustandspunkt, p_c, T_e, zu bringen und mit einem Zylinder, in dem durch einen dicht schließenden Kolben der Druck um den Betrag Δp_τ erhöht werden kann, zu verbinden.

Beträgt die Kolbenverschiebung pro 1 kg Druckerhöhung $\frac{\Delta s}{\Delta p}$ und ist q der Querschnitt des Kolbens, so ist:

1) $$\Delta v_\tau = \Delta p_\tau \cdot \frac{\Delta s}{\Delta p} \cdot q.$$

Dieses Δv_τ unterscheidet sich wesentlich von der thermodynamisch wichtigen Volumenänderung, $\Delta v_{p,\tau}$, bei konstantem Druck und bei konstanter Temperatur.

Die Beziehung zwischen $\Delta v_{p,\tau}$ und Δv_τ ergibt sich durch folgende Überlegung. Die Drucksteigerung Δp_τ würde hervorgebracht werden, wenn sich das Volumen des Stoffes bei der konstanten Temperatur T_e um Δv_τ ändern würde; während dieser Volumenänderung steigt aber der Druck um Δp_τ, und zwar entsprechend der Volumenverkleinerung der Schmelze bei der Drucksteigerung Δp_τ. Bezeichnet $\frac{d_\tau v_2}{dp}$ die isotherme Volumenverkleinerung der Schmelze für die Drucksteigerung dp, so gilt:

2) $$\Delta v_{p,\tau} = \Delta v_\tau - \Delta p_\tau \frac{d_\tau v_2}{dp}.$$

Nach Division durch das vorhandene Gewicht des Stoffes erhält man $\Delta v_{p,\tau}$ für die Gewichtseinheit.

4. Die Bestimmung der Koordinaten des maximalen Schmelzpunktes bei variabeln Volumen.

Auf die Bestimmung von p-T-Linien bei variablen Volumen des zu untersuchenden Stoffes läßt sich eine Methode zur Verfolgung der Schmelzkurve auch in der Nähe ihres Maxmimums

gründen. Da in diesem Druckgebiet die Methode der Bestimmung des Gleichgewichtsdruckes bei konstanter Temperatur auf Grund der Beobachtung von durch Volumenänderungen hervorgerufenen Druckänderungen versagt, so wird in diesem Gebiet die Methode der p-T-Linien von besonderem Nutzen werden.

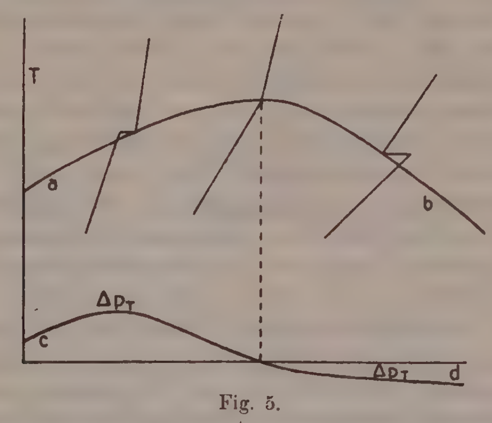


Fig. 5.

In Fig. 5 sind ein Teil der Schmelzkurve ab und drei p-T-Linien für einen chemisch homogenen Stoff, der so langsam erwärmt wurde, daß praktisch in allen seinen Teilen immer die Temperatur der Umgebung bestand, dargestellt.

Im maximalen Schmelzpunkt beim Druck p_{T_m} geht Δp_T, wie aus der Gleichung 2 des § 3 folgt, durch den Nullwert, da $\Delta v_{p,T}$ in diesem Punkt durch den Nullwert geht. Bei Drucken, die kleiner sind als p_{T_m} ist Δp_T positiv, weil $\Delta v_{p,T}$ positiv ist, und bei Drucken, die größer sind als p_{T_m} ist Δp_T negativ, weil $\Delta v_{p,T}$ negativ ist. Stellt man also Δp_T oder Δv_T in Abhängigkeit vom Druck dar, so kann man den Druck p_{T_m}, bei dem $\Delta p_T = \Delta v_{p,T} = 0$ wird, leicht ermitteln. Die Volumenänderung beim Schmelzen $\Delta v_{p,T}$ nimmt bekanntlich mit steigendem Druck auf der Schmelzkurve ab, hierbei können die Werte Δv_T und Δp_T bei kleinen Drucken mit dem Druck zuerst wachsen, ein Maximum erreichen, um dann bei p_{T_m} durch den Nullwert zu gehn. Die Kurve cd gibt für die Δp_T-Werte eine in der Tat vorkommende Änderung mit dem Druck an. Die Art der Abhängigkeit von Δp_T und Δv_T vom Druck wird durch die Druckabhängigkeit von $\frac{\Delta s}{\Delta p}$, $\Delta v_{p,T}$, $\frac{d_T v_2}{dp}$ und $\frac{d_T v_1}{dp}$ bestimmt, sie ist also nicht leicht zu übersehen, wichtig ist hier nur, daß die Δp_T-Werte beim Druck p_{T_m} durch den Nullwert gehen.

Zur Bestimmung des Teiles der Schmelzkurve in der Nähe des maximalen Schmelzpunktes könnte man auch mittels eines in den zu untersuchenden Stoff eingeführten Thermoelementes Erhitzungs- eventuell auch Abkühlungskurven bei fast konstantem Druck aufnehmen. Beobachtet man gleichzeitig den Druck, die Temperatur und die Zeit, so erhält man drei Arten von Linien, die p-T-Linien, die p-Zeit- und die T-Zeit-Linien. Da in der Nähe des maximalen Schmelzpunktes sich die Schmelzwärme nicht merklich mit dem Druck ändern kann, so werden die Haltepunkte auf den Temperatur-Zeit-Linien bei der Erhitzung mit Stücken der Schmelzkurve zusammenfallen. Man wird also auf Grund solcher Beobachtungen in Stand gesetzt, die Koordinaten der Schmelzkurve in der Nähe ihres Maximums zu bestimmen.

Dieses Verfahren kann auch auf Mehrstoffsysteme angewandt werden, man kann es aber auch durch das Verfahren der Bestimmung der p-T-Linien ersetzen, bei dem man die Schwierigkeit der Einführung des Thermoelementes in das zu untersuchende Gemisch vermeidet, und sich auf die Beobachtung des Druckes im Stoff und der Badtemperatur beschränkt. Die so erhaltenen p-T-Linien sind den Temperatur-Zeit-Linien, den Abkühlungskurven, ganz analog, und man hätte die p-T-Linien bei Konstruktion des Zustandsmodells ganz ähnlich wie die Abkühlungskurven bei der Ausführung der thermischen Analyse zu behandeln. Der Zeitdauer der Haltepunkte der Abkühlungskurven, würden die Δp_{τ}-Werte der p-T-Linien entsprechen.

Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juni 1912 durch Herrn D. Hilbert.

In den Klein-Poincaré'schen Kontinuitätsbeweisen der Klein'schen Fundamentaltheoreme spielt eine wichtige Rolle die Eigenschaft, daß bei Zugrundelegung des Riemann'schen Klassenbegriffs die nach irgend einem Modell kanonisch zerschnittenen bzw. die unzerschnittenen Riemannschen Flächen vom Geschlechte p eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, welche in der Umgebung von jedem ihrer Punkte ohne Ausnahme durch $6p-6$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbar ist. Obwohl nun die Anwendung dieser Eigenschaft, wie ich in einem auf der Naturforscherversammlung in Karlsruhe gehaltenen Vortrage, sowie in einem am 13. Januar 1912 in der Gött. Ges. der Wiss. vorgelegten Briefe an R. Fricke gezeigt habe, bei dem Kontinuitätsbeweise umgangen werden kann, so möchte ich andererseits hervorheben, daß wenigstens für die nach irgend einem Modell kanonisch zerschnittenen Riemannschen Flächen die Nichtexistenz von Singularitäten in einfacher Weise direkt [1]) hergeleitet werden kann und zwar wieder auf Grund des Hurwitz'schen Theorems, daß eine birationale Transformation einer Riemannschen Fläche in sich unmöglich ihre Differentiale erster Gattung invariant lassen kann [2]).

---

1) d. h. unabhängig von den Fundamentaltheoremen, welche den betreffenden Satz natürlich auch als Folge nach sich ziehen.

2) Mathem. Ann. 41, S. 428.

Um dies darzutun, betrachten wir die Menge μ der kanonisch zerschnittenen, über die Ebene ausgebreiteten, höchstens m-blättrigen Riemannschen Flächen vom Geschlechte $p\,(m > 2p-2)$, wobei wir solche Flächen, welche sich nur um additive und multiplikative Konstanten unterscheiden, als identisch betrachten. Diese Menge μ besteht aus einer die nur einfache, im Endlichen gelegene Verzweigungspunkte aufweisenden m-blättrigen Flächen[1]) enthaltenden Menge M, welche zu jedem ihrer Elemente eine durch $4m+4p-8$ reelle Parameter darstellbare Umgebung besitzt, und einer Menge γ, welche von einem Teile der Grenzelemente von M gebildet wird. Für hinreichend großes m existiert dann zu jedem Elemente von μ ein zur selben Riemann'schen Klasse gehöriges Element von M, sodaß wir nur zu zeigen haben, daß in der Umgebung eines willkürlichen Elementes von M die Klassen der kanonisch zerschnittenen Flächen vom Geschlechte p eineindeutig und stetig durch $6p-6$ reelle Parameter darstellbar sind.

Sei f_ω eine willkürliche zu M gehörige Riemannsche Fläche und $f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine gegen f_ω konvergierende Folge von zu M gehörigen Riemannschen Flächen. Es existiert dann nach Ritter[2]) eine Folge von algebraischen Kurven $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 0$, $\varphi_3(x, y) = 0, \ldots$, welche der Reihe nach zu $f_1, f_2, f_3, \ldots$ gehören und gegen eine einzige, zu f_ω gehörige algebraische Limeskurve $\varphi_\omega(x, y) = 0$ konvergieren. Von diesen Kurven dürfen wir annehmen, daß sie alle denselben Grad $2n$ besitzen und nur mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten aufweisen, daß die unendlich fernen Punkte der X- und der Y-Axe für sie alle als n-fache Punkte auftreten, daß die im Endlichen gelegenen mehrfachen Punkte von $\varphi_\omega(x, y) = 0$ mit Ausnahme eines einzigen n-fachen Punktes P gewöhnliche Doppelpunkte D_α sind und daß von den im Endlichen gelegenen mehrfachen Punkten der $\varphi_\nu(x, y) = 0$ gegen jeden Punkt D_α je ein gewöhnlicher Doppelpunkt und gegen P der Rest konvergiert.

Zu $\varphi_\omega(x, y) = 0$ bzw. zu jeder Kurve $\varphi_\nu(x, y) = 0$ betrachten wir nun die Menge ϱ_ω bzw. ϱ_ν der höchstens m Pole aufweisenden rationalen Funktionen von x und y; diese Funktionen setzen sich (abgesehen von der additiven Konstante) linear und homogen zusammen aus $m-p$ Elementarfunktionen, in welche die m Pole (x', y'), (x'', y''), $\ldots$, $(x^{(m)}, y^{(m)})$ algebraisch als Parameter ein-

1) Die Blätter und die Verzweigungspunkte dieser Flächen denken wir der kanonischen Anordnung im Sinne von Lüroth-Clebsch entsprechend numeriert.

2) Mathem. Ann. 46, S. 227.

gehen, während die zu den ϱ_ν gehörigen Elementarfunktionen gegen die zu ϱ_ω gehörigen Elementarfunktionen konvergieren. Die Systeme von Verzweigungspunkten $\mathfrak{f}_\omega$ bzw. $\mathfrak{f}_\nu$ der von ϱ_ω bzw. von den ϱ_ν in μ bestimmten Flächen bilden somit $(4m-2p-2)$-dimensionale, von $2m-p-1$ komplexen Parametern abhängende algebraische Gebilde. Die $\mathfrak{f}_\nu$ konvergieren gegen $\mathfrak{f}_\omega$, und zwar gleichmäßig, denn die Konvergenz besteht für jede Wahl der gegen f_ω konvergierenden Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$

Sei ε eine bestimmte, beliebig klein zu wählende Größe und g ein solches Wertegebiet der $2m-p-1$ komplexen Parameter, daß das entsprechende Teilgebiet h_ω von $\mathfrak{f}_\omega$ in M enthalten ist, sich regulär verhält und nur unterhalb ε liegende Schwankungen der Differentialquotienten erster Ordnung in bezug auf die Parameter aufweist. Alsdann existiert in M eine solche Umgebung B von f_ω, daß für jede zu B gehörige Fläche f_α das dem Parametergebiete g entsprechende Teilgebiet h_α von $\mathfrak{f}_\alpha$ in M enthalten ist, sich regulär verhält und nur unterhalb 2ε liegende Schwankungen der Differentialquotienten erster Ordnung in bezug auf die Parameter aufweist, während h_α mit f_α stetig variiert und für f_ω in h_ω übergeht. Wenn wir unter den h_α je zwei miteinander zusammenhängende als identisch betrachten, so kann die Menge der h_α auf ein $(4m+4p-8)-(4m-2p-2) = (6p-6)$-dimensionales Gebiet eineindeutig und stetig abgebildet werden.

Wir behaupten weiter, daß je zwei dieser h_α verschiedenen Gebilden $\mathfrak{f}_\alpha$ angehören müssen. Im entgegengesetzten Falle würde nämlich eine solche gegen $\mathfrak{f}_\omega$ konvergierende Folge $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots$ existieren, deren jedes $\mathfrak{f}_\nu$ wenigstens zwei der h_α, welche wir mit h_ν und h'_ν bezeichnen wollen, enthielte. Sei p_ω eine zu h_ω gehörige Fläche, p_ν bzw. p'_ν eine zu h_ν bzw. h'_ν gehörige Fläche, welche für unbegrenzt wachsendes ν gegen p_ω konvergiert, so kann die p_ν und p'_ν verbindende birationale Transformation für unbegrenzt wachsendes ν nicht unbegrenzt klein werden, sodaß sie gegen eine birationale Transformation von p_ω in sich konvergieren muß. Dies hieße aber, daß die kanonisch zerschnittene Fläche p_ω eine das Schnittsystem in ein äquivalentes Schnittsystem überführende birationale Transformation in sich zuließe, was gegen das oben zitierte Hurwitz'sche Theorem verstoßen würde.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Menge der $\mathfrak{f}_\alpha$ sich eineindeutig und stetig auf ein $(6p-6)$-dimensionales Gebiet abbilden läßt, sodaß die Klassenmenge der kanonisch zerschnittenen Riemannschen Flächen vom Geschlechte p in der Umgebung von f_ω, mithin wegen der willkürlichen Wahl von f_ω in der

Umgebung von jedem ihrer Punkte sich wie eine singularitätenfreie $(6p-6)$-dimensionale Mannigfaltigkeit verhält.

Der vorstehende Beweis gilt für die nach irgend einem dem allgemeinen Klein'schen Fundamentaltheorem entsprechenden Modell kanonisch zerschnittenen, nicht aber für die unzerschnittenen Riemannschen Flächen. In der Tat läßt er die Frage unentschieden, ob in der Klassenmenge der unzerschnittenen Flächen die Klassen der regulären Flächen nicht eine im Sinne der Analysis Situs singuläre Rolle spielen.

Amsterdam, 12. Juni 1912.

Zur Theorie des Polymorphismus.

Von

G. Tammann.

(Mit 11 Figuren im Text.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1912.

Die Thermodynamik läßt für die gegenseitigen Beziehungen der ζ-Flächen polymorpher Formen ein und desselben Stoffes, wie gezeigt wurde[1]), zwei verschiedene Fälle zu:

1. Die ζ-Flächen zweier Formen schneiden sich nicht bei Drucken und Temperaturen, für die die Formen realisierbar sind.
2. Die ζ-Flächen zweier Formen schneiden sich in einer räumlichen Kurve, deren Projektion auf die p-T-Ebene ihre Umwandlungskurve ist.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, daß in Wirklichkeit diese beiden Fälle vorkommen, denn wir kennen einerseits eine Reihe von Formen, von denen je zwei eine Umwandlungskurve besitzen, andererseits sind aber auch Formen ein und desselben Stoffes bekannt, die in den bisher untersuchten Teilen der p-T-Ebene mit einander nicht ins Gleichgewicht kommen, welche also die Reihenfolge ihrer Stabilitäten behalten, auch wenn man den Druck und die Temperatur erheblich ändert.

Diese Erfahrung wird durch einen zweiten Erfahrungssatz wesentlich ergänzt. Es hat sich herausgestellt, daß aus normalen Flüssigkeiten nur solche Formen krystallisieren, für die man keine Umwandlungskurven finden kann, während für die Formen aus assoziierten Flüssigkeiten, wenn auch nicht immer, so doch häufig, Umwandlungskurven gefunden sind.

---

1) Göttinger Nachrichten 1911, S. 325.

Ausgehend von den beiden thermodynamisch möglichen Fällen, daß die Differenzen der ζ-Werte zweier Formen ihr Vorzeichen bei Änderungen des Drucks und der Temperatur behalten oder wechseln können, klassifizieren wir die polymorphen Formen in Gruppen, indem wir die Formen eines Stoffes, deren ζ-Differenzen ihr Vorzeichen nicht ändern, zu einer thermodynamischen Krystallgruppe vereinigen.

Man kann dann jene Erfahrungssätze kurz dahin formulieren, daß aus normalen Flüssigkeiten immer nur die Glieder einer thermodynamischen Krystallgruppe sich bilden, während aus assoziierten Flüssigkeiten die Glieder von zwei und mehr thermodynamischen Gruppen krystallisieren können.

Atomistisch wurde dieses Resultat dahin gedeutet, daß die Formen einer normalen Flüssigkeit immer aus derselben Molekülart aufgebaut sind, die in verschiedenen Formen verschiedene Raumgitter besetzt, während die Glieder verschiedener Formengruppen assoziierter Flüssigkeiten verschiedene Molekülarten enthalten.

O. Lehmann unterschied zwischen enantiotropen Formen, die reversibel sich in einander umwandeln können und monotropen Formen, bei denen die Umwandlungsfähigkeit eine einseitige ist. Schaum[1]) und Ostwald[2]) haben gleichzeitig darauf hingewiesen, daß sich die Dampfdruckkurven enantiotroper Formen unterhalb ihrer Schmelzpunkte, dagegen die monotroper Formen wahrscheinlich oberhalb ihrer Schmelzpunkte schneiden, und daß zwei Formen, welche bei kleinen Drucken monotrop sind, bei höheren enantiotrop werden können.

Diese ältere Theorie des Polymorphismus konstatiert also keinen wesentlichen Unterschied zwischen den verschiedenen Formen und kommt deshalb mit einer erweiterten Erfahrung in Konflikt.

Vor Kurzem ist die ältere Theorie durch A. Smits[3]), der die Änderungen der Molekularkonzentration bei der Bildung und Umwandlung von Krystallen diskutierte, ausgebaut worden.

Im Folgenden wird die Änderung der Molekularkonzentration bei der Bildung und Umwandlung von Krystallen auf Grund früher geäußerter Ideen[4]) untersucht werden; die ältere und neuere Theorie führen hier zum Teil zu verschiedenen Resultaten.

---

1) Liebigs Ann. 300, S. 215, 1897.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. 22, S. 313, 1897.
3) Zeitschr. f. phys. Chem. 76, S. 421, 1911.
4) Zeitschr. f. Elektrochemie 16, S. 716, 1910.

Dann werden die Kennzeichen der Zugehörigkeit einer Reihe von Formen zu einer thermodynamischen Gruppe eingehender und besonders von praktischen Gesichtspunkten aus besprochen und zusammengestellt worden.

A. Die Änderungen der Molekularkonzentration bei der Bildung und Umwandlung von Krystallen.

1. Konzentrationsänderungen beim Auftreten eines Umwandlungspunktes (Enantiotropie).

Wir denken uns eine assoziierte Flüssigkeit, die aus zwei Molekülarten A und B besteht, die Zusammensetzung x der Flüssigkeitsgemische aus A und B wird auf der x-Achse aufgetragen, Fig. 1. Hätte man Flüssigkeiten, die nur aus der Molekülart A

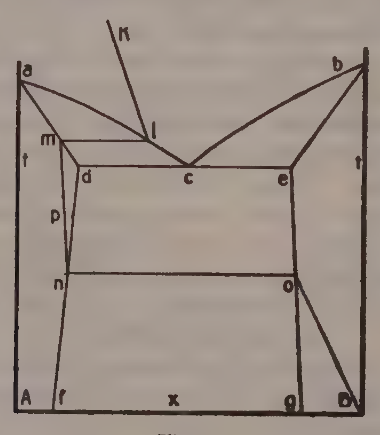


Fig. 1.

oder nur aus der Molekülart B bestehen, so würden ihre Gleichgewichtstemperaturen mit Krystallen gleicher Zusammensetzung bei a respektive b auf den t^0-Achsen liegen. Die Kurven des Beginns der Krystallisation ac und bc der Mischungen von A und B würden sich im eutektischen Punkt c schneiden, bei dessen Temperatur die Mischungslücke sich von e bis d erstrecken mag. Die realisierbare, natürliche Flüssigkeit wird, wenn beim Übergange von A in B Wärme frei wird, mit steigender Temperatur A-reicher werden, wenn aber bei der Umwandlung von A in B Wärme gebunden wird, so wird mit steigender Temperatur die Mischung

B-reicher werden. Die Linie Kl gibt die Änderung der Zusammensetzung der natürlichen Flüssigkeit mit der Temperatur an. Der Schnittpunkt der Linie Kl mit der Kurve des Beginns der Krystallisation gibt die Gleichgewichtstemperatur der Schmelze l und des Mischkrystalls m. Wenn sich bei Wärmeentziehung während der Abscheidung von m, die Molekularzusammensetzungen l und m sehr schnell wieder herstellen, so wird die Folge hiervon sein, daß die Flüssigkeit bei konstanter Temperatur vollständig krystallisiert, sich also ungeachtet der Zusammensetzung eines Zweistoffsystems wie ein Einstoffsystem verhält. Kühlt man den erhaltenen Mischkrystall weiter ab, so können zwei Fälle eintreten, die Linie mp, welche die Zusammensetzung des Mischkrystalls bei verschiedenen Temperaturen angibt, kann die Sättigungslinie, df, der Mischkrystalle schneiden oder nicht schneiden. Wenn die Linie der Zusammensetzung der Mischkrystalle mp die Sättigungslinie df auch in den x-T-Schnitten für andere Drucke nicht schneidet, so wird der betreffende Mischkrystall bei allen Drucken und Temperaturen stabil sein. Wenn aber die Linie mp die Linie df schneidet, so werden die Mischkrystalle unterhalb der Temperatur des Schnittpunktes n übersättigt werden, und deshalb können sie bei der Temperatur des Punktes n in zwei verschiedene Mischkrystalle, den Mischkrystall n und den Mischkrystall o, zerfallen. Wenn sich die innere Zusammensetzung der beiden Mischkrystalle n und o mit großer Geschwindigkeit in jedem Moment, nachdem sie durch Ausscheidung von o aus n bei Wärmeentziehung gestört worden ist, wiederherstellt, indem die Molekülart A sich in B umwandelt, so würde die Umwandlung des Mischkrystalls n in den Mischkrystall o bei der Temperatur des Beginns der Umwandlung vollständig werden können.

Vollzieht sich aber die Umwandlung der beiden Krystallarten in einem Temperaturintervall, wie bei tieferen Temperaturen auf der Umwandlungskurve des Phenols[1]), so ist nicht nur auf eine geringere Umwandlungsgeschwindigkeit der beiden Molekülarten, sondern vielleicht auch auf die Beteiligung von Mischkrystallen an der Umwandlung zu schließen.

Bei allen anderen Fällen kann man sich auf Grund von Umwandlungsgeschwindigkeiten allein zur Zeit weder für noch gegen die Möglichkeit, daß sich auch aus assoziierter Flüssigkeit Krystalle bilden, die aus einer einzigen Molekülart aufgebaut sind, entscheiden.

---

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 75, S. 75, 1911 und Krystallisieren und Schmelzen S. 109.

Die reversibele Umwandlung eines aus einer assoziierten Flüssigkeit gebildeten Krystalls ist nach A. Smits[1]) die Folge einer Entmischung, und man könnte von diesem Standpunkte aus schließen, daß, wenn die Umwandlung eintritt, zum wenigsten die bei höheren Temperaturen stabile Krystallart ein Mischkrystall ist. Dieser Schluß ist aber nicht zulässig, denn man hat nicht zu vergessen, daß der die Umwandlung führende Vorgang nicht die Entmischung, sondern der Vorgang der Einordnung in ein anderes Raumgitter ist. Daher ist theoretisch auch sehr wohl der Fall denkbar, daß die Begleiterscheinung der Umwandlung, die Entmischung oder das Sichschneiden der Linien *df* und *mp*, seinen Sinn verliert, wenn nämlich die Linie *df* mit der Axe *At* zusammenfällt, wenn der Krystall also nur aus einer Molekülart aufgebaut ist.

2. Konzentrationsänderungen bei der Krystallisation der Glieder einer Krystallgruppe (Monotropie).

Das Schmelzdiagramm selbst, Fig. 2, kann in diesem Falle dem der Fig. 1 ganz ähnlich sein. Denn nicht durch die Verschiedenheit der beiden Schmelzdiagramme, über die man ja auch

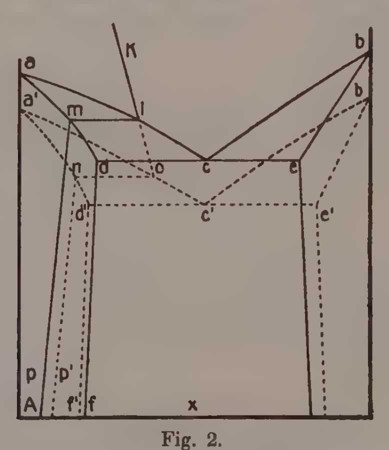


Fig. 2.

nichts aussagen kann, unterscheiden sich die beiden Fälle, sondern dadurch, daß im ersten Falle nur eine Krystallart, im zweiten

1) l. c.

zwei Krystallarten aus der realisierbaren Flüssigkeit krystallisieren. Der Krystallisation zweier Krystallarten A und A' müssen aber zwei Schmelzkurven entsprechen, die der stabileren Krystallart ac und die der instabileren Krystallart $a'c'$. Die Konzentration der gesättigten Mischkrystalle d und d' werden sich von einander unterscheiden und die Linien df und $d'f'$, welche die Zusammensetzung der gesättigten Mischkrystalle der A- und A'-Reihe angeben, werden einen verschiedenen Verlauf haben.

Wenn die Linie Kl, welche die Zusammensetzung der realisierbaren Flüssigkeit angibt, die Schmelzkurve von A im Punkte l schneidet, so krystallisieren die Mischkrystalle m. Die Krystallisation wird bei der Temperatur ihres Beginns zu Ende verlaufen, wenn B sich mit hinreichender Geschwindigkeit in A umwandelt. Die Zusammensetzung des Mischkrystalls m möge sich bei seiner Abkühlung auf der Linie mp, ändern. Außer dem stabilsten Mischkrystall m der A-Reihe können sich aus diesen Flüssigkeitsgemischen noch andere krystallographisch und thermisch unterschiedene weniger stabile Mischkrystalle der A'-Reihe bilden, hierzu ist vor allem eine Unterkühlung der Schmelz l notwendig. Wird bei sinkender Temperatur der Punkt o, erreicht, so scheidet sich der Mischkrystall n der instabilen A'-Reihe aus, und schließlich wird bei Wärmeentziehung die Schmelze o, bei konstanter Temperatur als instabilere Form von der Zusammensetzung, n, krystallisieren.

Die Verschiedenheit der beiden Mischkrystalle m und n ist aber weniger durch ihre verschiedene Molekularzusammensetzung als durch die Verschiedenheit ihrer Raumgitter bedingt, denn es können die Punkte m und n auch bei derselben Konzentration x liegen.

Wenn aus der betreffenden Flüssigkeit nur eine einzige Molekülart bei der Krystallisation sich ausscheidet, so bleibt die Möglichkeit, daß dieselbe Molekülart verschiedene Raumgitter besetzen kann, bestehen, und damit auch die Möglichkeit der Bildung verschiedener Formen.

Die Frage, ob die Formen einer Krystallgruppe sich betreffs ihrer inneren Zusammensetzung merklich von einander unterscheiden, könnte man auf Grund von Bestimmungen ihrer Druckfestigkeit, ihres Fließdruckes oder ihrer Härte entscheiden. Nach Kurnakow[1]) wachsen nämlich diese Eigenschaften in einer Reihe

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. 60, S. 26, 1908.

von Mischkrystallen bei Zusatz von B zu A. Wenn also diese Eigenschaften in einer Reihe von Formen derselben Gruppe mit Abnahme der Stabilität bei derselben Temperatur wachsen sollten, so hätte man allen Grund diese Formen als Mischkrystalle anzusprechen. Nun wissen wir aber, daß die Volumen der Formen einer Gruppe mit abnehmender Stabilität zunehmen, und dürfen daraus wohl schließen, daß der innere Druck der Formen mit abnehmender Stabilität abnehmen wird. Daher ist es auch wahrscheinlich, daß der Fließdruck und die Härte mit abnehmender Stabilität abnehmen werden. Es ist also nicht wahrscheinlich, daß sich die Formen einer Gruppe allgemein wie Mischkrystalle mit wachsendem Gehalt der einen Komponente verhalten werden.

Nach der älteren Theorie des Polymorphismus (A. Smits l. c. Fig. 2a S. 424) krystallisieren zwei Krystalle derselben Gruppe (Monotropie) aus ihren Schmelzen als A- und B-reiche Mischkrystalle. Ihrer Molekularzusammensetzung nach sind sie also von einander ebenso verschieden, wie zwei Krystalle verschiedener Gruppen (Enantiotropie). Die ältere Theorie steht also dem Erfahrungssatze, daß aus normalen Flüssigkeiten sich nur die einander ähnlichen Glieder einer Gruppe bilden, fremd gegenüber, indem sie einen Grund für diese Erfahrung nicht angeben kann. Auch das Auftreten von 3 und mehr monotropen Formen dürfte, wenn wir A. Smits folgen würden, Schwierigkeiten bereiten, denn man würde dann zum Schluß kommen, daß 2 Formen hauptsächlich aus einer und eine aus einer anderen Molekülart bestehen, obwohl sie, ihren Eigenschaften nach zu urteilen, aus ein und derselben Molekülart bestehen. Noch schwieriger würden sich die Verhältnisse bei der Behandlung je zweier Formen zweier Gruppen gestalten. Auch die Tatsache, daß die Schmelzpunkte der Formen einer Gruppe häufig wenig verschieden sind, ist vom Standpunkte A. Smits nicht ohne Zwang zu verstehn.

3. Die Kystallisation verschiedener Krystallgruppen aus assoziierten Flüssigkeiten bei Änderung des Drucks.

In den Figg. 3 und 4 sind für zwei assoziierte Stoffe, bestehend aus den Molekülarten A und B verschiedenen spezifischen Volumens die x-p-T-Diagramme gezeichnet. Für die beiden Diagramme gelten folgende gemeinsame Annahmen:

1. Die beiden nicht realisierbaren Flüssigkeiten, welche nur aus je einer Molekülart bestehen, krystallisieren unter Volumen-

kontraktion, in Folge dessen würden ihre Schmelzkurven mit wachsendem Druck zu höheren Temperaturen ansteigen.

2. Aus den Mischungen der beiden Molekülarten bilden sich Krystalle, die nur aus einer einzigen Molekülart bestehen. Man könnte auch diese Vereinfachung fallen lassen, und die Bildung von Mischkrystallen annehmen. Dadurch würde im wesentlichen nichts geändert werden, nur das Diagramm selbst würde etwas unübersichtlicher werden.

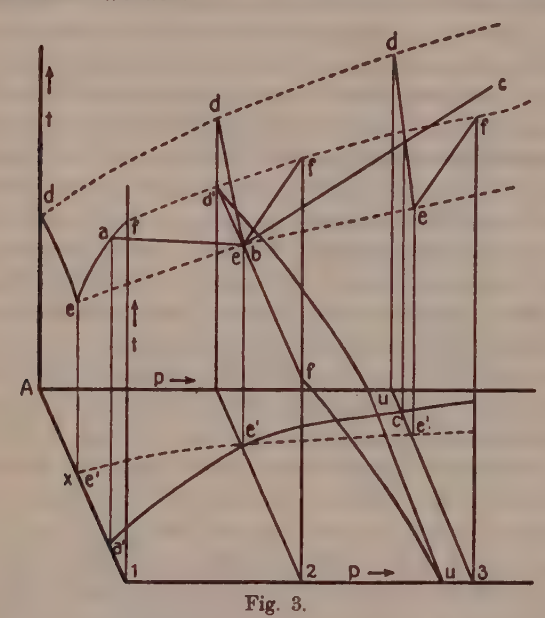


Fig. 3.

3. Die Umwandlungswärme der beiden Molekülarten *A* und *B* in einander möge verschwindend klein sein. Durch diese Annahme wird das innere Gleichgewicht von der Temperatur unabhängig und dadurch die Beziehung der Kurve innerer Zusammensetzung zur realen Schmelzkurve besonders einfach.

Beide Diagramme unterscheiden sich betreffs folgender Annahme. Für Fig. 3 ist die Annahme gemacht, daß sowohl ein Zusatz von *B* zu der mit den Krystallen *A* im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit die Gleichgewichtstemperatur erniedrigt als auch ein Zusatz von *A* zur Flüssigkeit mit den Krystallen von *B*. Für Fig. 4 ist aber die Annahme gemacht, daß ein Zusatz von *B* sowohl die Gleichgewichtstemperaturen der Schmelzen mit den Krystallen aus *A* als auch mit den aus *B* erniedrigt. Die Fläche, auf der sich die Krystalle einer dritten Molekülart

C ausscheiden, und die mit wachsendem Gehalt an *B* zu tieferen Temperaturen fällt, und die Fläche *eeefff* in der Kurve *fff* schneidet, ist vorgelassen, um durch sie nicht die Fläche *eeefff* zum Teil zu verdecken. In diesem Falle würden bei Temperatursteigerung die Krystalle *B* sich in den Schmelzen, die *A*-reicher sind als die durch die Linie *e'e'e'* dargestellten, in *A*-Krystalle mit oder ohne Beteiligung der Schmelzen bei den Temperaturen der Kurve *eee* umwandeln.

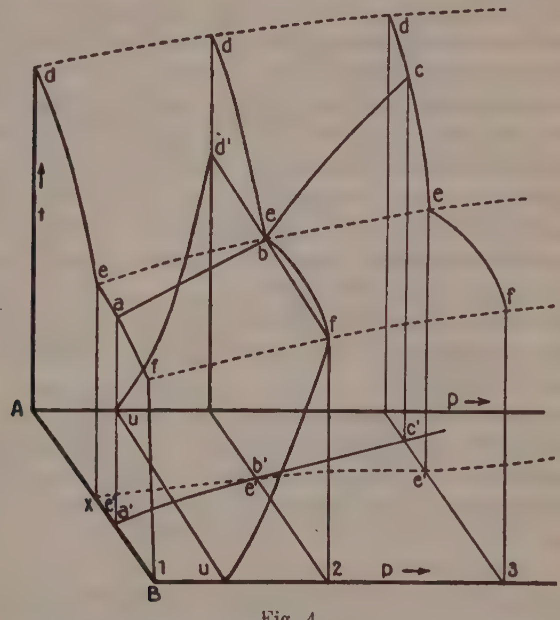


Fig. 4.

Die Gleichgewichtstemperaturen der realisierbaren Mischungen werden für die Krystallart, welche aus den Molekülen *A* besteht, auf die Fläche *dddeee* und für die Krystallart, welche aus den Molekülen *B* besteht, auf der Fläche *fffeee* liegen. Beide Flächen schneiden sich in der Kurve *eee*, deren Projektion auf die *x*-*p*-Ebene die Kurve *e'e'e'* ist.

Die Zusammensetzungen der realisierbaren flüssigen Mischungen werden durch die Kurve *a'b'c'* in der *x*-*p*-Ebene dargestellt. Diese Kurve muß immer in der Weise verlaufen, daß die Konzentration der Molekülart größeren Volumens mit steigendem Druck abnimmt. Um nun die Schmelzkurve der realisierbaren Flüssigkeitsgemische zu finden, hat man auf der Linie *a'b'c'*, wenn unserer Annahme gemäß die Umwandlungswärme von *A* in *B* gleich Null ist, Senk-

rechte zur x-p-Ebene zu errichten. Wenn aber die Umwandlungswärme einen merklichen Wert hat, so hat man in den x-T-Ebenen Linien zu ziehn, welche die innere Zusammensetzung in Abhängigkeit von der Temperatur darstellen. Die Schnittpunkte der Senkrechten oder dieser Linien mit den beiden Flächen *dddeee* und *fffeee* geben den Verlauf der Schmelzkurven *ab* und *bc* im *xpt*-Diagramm. Der Punkt *b* ist der Tripelpunkt, indem die Flüssigkeit mit den beiden Krystallarten *A* und *B* im Gleichgewicht ist, dieser Punkt berührt die Zylinderfläche *d'fuu*, welche im *xpt*-Diagramm die Umwandlungskurve darstellt. Wenn im Punkte *b* mit der Flüssigkeit zwei Krystallarten, die nur aus einer Molekülart *A* respektive *B* aufgebaut sind, sich im Gleichgewicht befinden, so verlaufen die Kurven *d'u* und *fu* in den p-t-Ebenen, wenn aber die beiden Krystalle Mischkrystalle der Molekülarten *A* und *B*, respektive *B* und *A* sind, so verlaufen sie als Grenzen der Zylinderebene im *xpt*-Raum, die Projektionen der Kurven *d'u* und *fu* auf die x-p-Ebene geben dann die Kurven innerer Zusammensetzung der beiden Mischkrystalle.

Projiziert man die räumlichen Kurven *ab*, *bc* und die Zylinderfläche *d'fuu* auf die p-t-Ebene, so erhält man die Gleichgewichtskurven im p-t-Diagramm.

Die notwendige Bedingung für das Auftreten von 2 Ästen der Schmelzkurve und damit auch einer Umwandlungskurve ist das Sichschneiden der Kurve *e'e'c'* und der Kurve innerer Zusammensetzung der Flüssigkeit *a'b'c'* in der x-p-Ebene. Schneiden können sich diese beiden Kurven bei Drucken und Temperaturen des ersten oder zweiten Quadranten der Schmelzkurve, und wenn die Wärmetönung bei der Umwandlung der Molekülarten *A* und *B* erheblich ist, erst in dem dritten oder vierten Quadranten.

Die Schmelzkurven der instabileren Formen derselben Gruppe müssen in ihren ersten beiden Quadranten bei tieferen Temperaturen als die der stabileren Formen verlaufen, und dürfen sich unter einander nicht schneiden[1]). Entsprechend dieser Regel hat man sich in den beiden Diagrammen Fig. 3 und 4 unterhalb den Flächen *dddeee* und *eeefff* zwei zu diesen fast parallele Flächen, die sich in einer der Kurve *eee* analogen Kurve schneiden, zu denken. Projiziert man die Kurve innerer Zusammensetzung der realisierbaren Flüssigkeit *a'b'c'* auf diese beiden Flächen, so erhält man die Schmelzkurven der beiden instabilen Formen, welche in anderen Raumgittern als die stabileren beiden Formen von den

1) Göttinger Nachrichten 1911, S. 329.

Molekülarten A und B aufgebaut werden. Den Schnittpunkt der beiden Schmelzkurven der instabileren Formen berührt wieder eine Zylinderfläche, deren Projektion auf die p-t-Ebene die Umwandlungskurve der beiden instabileren Formen ist.

Das Diagramm Fig. 3 wird an das des Wassers und das Diagramm Fig. 4 an das des Phenols erinnern.

Wenn die Projektion der Curve innerer Zusammensetzung schon bei kleinem Druck auf die Fläche des Beginns der Krystallisation der Molekülart mit kleinerem Volumen fällt, so wird die betreffende assoziierte Flüssigkeit nur in einer Formgruppe krystallisieren. Wenn also eine Flüssigkeit schon bei kleinen Drucken wenig Moleküle größeren Volumens enthält, und diese sich bei kleinen Drucken nicht krystallbildend betätigen, so ist das Auftreten einer neuen Krystallgruppe bei höheren Drucken unmöglich. Wenn aber eine Flüssigkeit arm an Molekülen kleineren Volumens ist, so kann sehr wohl bei höheren Drucken eine neue Krystallgruppe auftreten. Da die Methoden zur Bestimmung der molekularen Zusammensetzung von Flüssigkeiten noch viel zu wünschen übrig lassen, und speziell nicht die Frage zu entscheiden erlauben, ob eine Flüssigkeit kleine Mengen einer Molekülart kleineren Volumens enthält, so kann man immerhin bei Flüssigkeiten, die fast oder ganz normal erscheinen, doch noch bei sehr hohen Drucken auf neue Krystallgruppen stoßen, deren Auffindung uns über das Vorhandensein von Molekülarten kleinen Volumens in scheinbar normalen Flüssigkeiten belehren würde.

4. Übertragung der Kennzeichen der Assoziation auf Krystalle.

Das Kennzeichen der Assoziation von Flüssigkeiten, das sich aus den Zustandsdiagrammen ableiten läßt, ist in der Art der Abgrenzung des Zustandsfeldes der Flüssigkeit nach den anisotropen Phasen hin zu erblicken. Wenn das Zustandsfeld der Flüssigkeit durch mehr als eine Gleichgewichtskurve stabiler Zustände von dem des Anisotropen getrennt wird, so ist die Flüssigkeit assoziiert, wenn nur eine Gleichgewichtskurve stabiler Zustände das Feld des Anisotropen begrenzt, so kann die Flüssigkeit normal, aber auch assoziiert sein. Dementsprechend darf man eine Krystallart, deren Zustandsfeld zu tieferen Temperaturen hin durch zwei Gleichgewichtskurven von denen zweier anderen Krystallarten getrennt ist, als einen Mischkrystall ansprechen, wäh-

rend bei Begrenzung durch eine Gleichgewichtskurve der betreffende Krystall wahrscheinlich nur aus einer Molekülart aufgebaut ist, aber auch ein Mischkrystall sein kann.

Drei Beispiele sollen die Anwendung dieses Satzes beleuchten.

1. Das Zustandsfeld des gelbroten, regulären Jodsilbers [1]) wird durch eine Schmelzkurve *ab* (Fig 5) und durch die beiden Umwandlungskurven *cd* und *de* begrenzt. Da das Zustandsfeld

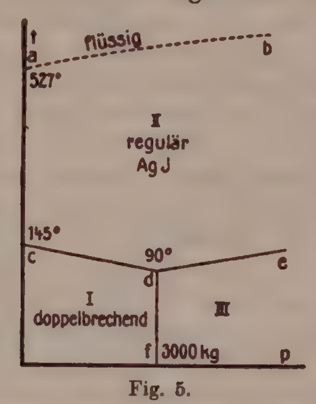


Fig. 5.

des regulären Jodsilbers II nach tieferen Temperaturen hin von den beiden Gleichgewichtskurven *cd* und *de* begrenzt wird, so ist dasselbe als Mischkrystall zweier Molekülarten verschiedenen Volumens aufzufassen. Daß die Krystallarten der Zustandsfelder I und II nur aus einer Molekülart aufgebaut sind, kann auf Grund des Zustandsdiagramms nicht behauptet werden; Abnormitäten bei ihrer gegenseitigen Umwandlung machen es aber wahrscheinlich, daß auch diese Krystallarten Mischkrystalle sind.

2. Im Zustandsdiagramm des Ammoniumnitrates Fig. 6 sind die Umwandlungskurven *ef*, *fg* und *hf* bestimmt worden [2]). Die Schmelzkurve *ab* und die Umwandlungskurve *cd* sind ihrem Verlaufe nach unbestimmt. Daß die reguläre Krystallart I ein Zustandsfeld besitzt, daß nach tieferen Temperaturen von zwei Gleichgewichtskurven begrenzt wird, ist wahrscheinlich, sicher festgestellt ist das für das Zustandsfeld III der rhomboedrischen Form. Diese muß also als Mischkrystall aus zwei Molekülarten verschiedenen Volumens aufgebaut sein. Das Zustandsfeld der Form III ist nach tieferen Temperaturen hin nur durch eine

---

1) Krystallisieren und Schmelzen S. 302; Zeitschr. f. phys. Chem. 75, S. 733, 1911.

2) Krystallisieren und Schmelzen S. 299.

Gleichgewichtskurve begrenzt, diese Form könnte also aus nur einer Molekülart bestehn. Für die Form IV könnte das Zustandsfeld nach tieferen Temperaturen hin ebenfalls durch zwei Umwandlungskurven begrenzt sein, da bei $-15°$ und $p = 0$ noch ein Umwandlungspunkt aufzutreten scheint.

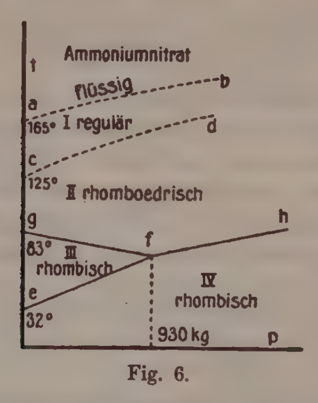


Fig. 6.

3. Der Hexachlorkohlenstoff [1]) hat dagegen ein Zustandsdiagramm, das die Annahme der Existenz von Mischkrystallen für keine der drei bekannten Formen fordert. In Fig. 7 sind die

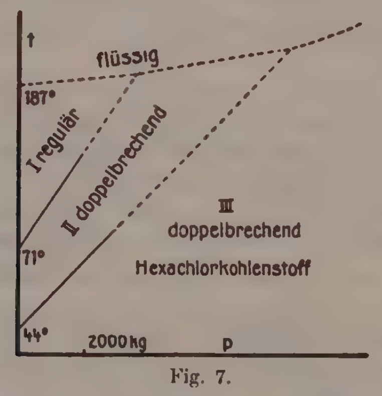


Fig. 7.

beiden Umwandlungskurven, die mit steigendem Druck merklich divergieren, bis 2000 kg verfolgt. Die Schmelzkurve selbst ist nicht verfolgt worden. Wenn die gestrichelten Teile der Kurven ungefähr der Wirklichkeit entsprechen, so würde der Hexachlorkohlenstoff im flüssigen Zustande eine Mischung von 3 Molekülarten bilden, welche bei ihrer Krystallisation drei Raumgitter

1) Krystallieren und Schmelzen S. 298.

besetzen. Die Bildung von Mischkrystallen braucht in diesem Falle bei keiner der drei Krystallarten einzutreten, da das Zustandsfeld jeder der 3 Krystallarten zu tieferen Temperaturen hin nur von einer Gleichgewichtskurve begrenzt wird.

5. Der die Bildung von Krystallen und ihre Umwandlung führende Prozeß.

Die Herstellung und Erhaltung des inneren Gleichgewichtes, die zur Krystallisation einer bestimmten Krystallart notwendig sind, sowie die Herstellung der hierzu erforderlichen Werte von p und T reichen aber nicht hin, um den Prozeß der Krystallisation einzuleiten, sie sind nur Vorbedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die Krystallisation überhaupt eintreten kann. Ob die Krystallisation nach Erfüllung der Vorbedingungen wirklich eintritt, oder ob sie ausbleibt, darüber entscheidet das Einsetzen eines anderen Vorganges, dessen Existenz man auf Grund folgender Tatsachen einsieht.

Bekanntlich tritt die Krystallisation, wenn die Flüssigkeit in das Zustandsfeld anisotroper Zustände gebracht wird, in der Regel nicht ein, die Flüssigkeiten lassen sich mehr oder weniger unterkühlen, ja es existiert ein chemisch wohl definierter Stoff, das Borsäureanhydrid, welches bisher nur in isotropen Zuständen bekannt ist.

Man darf also sagen, daß obwohl alle Bedingungen für die Krystallisation erfüllt sind, dieselbe doch nicht einzutreten braucht. Bringt man aber in die unterkühlte Flüssigkeit eine kleine Menge eines Krystalls, der sich aus der Flüssigkeit bilden kann, so tritt die Krystallisation ein. Diese Impfwirkung erinnert an die Erscheinung der Resonanz. Bringt man in ein System von vielen Körpern, welche zu gewissen Schwingungen befähigt sind, aber andere ausführen, einen Körper, der die Schwingungen, welche die anderen auszuführen befähigt sind, ausführt, so teilen diese sich allen mit. Damit die Moleküle sich in ein Raumgitter einzuordnen befähigt werden, muß ihnen ein Zustand mitgeteilt werden, den sie in isotropen Phasen nicht besitzen, und der von selbst sich bei vielen Stoffen nur relativ selten herstellt.

Hat sich in der unterkühlten Schmelze in einem Molekül derselben zufällig der Zustand, der das Molekül zur Einordnung in ein Raumgitter befähigt, hergestellt, so pflanzt sich die Herstellung dieses Zustandes mit der Geschwindigkeit der maximalen linearen Krystallisationsgeschwindigkeit nach allen Seiten hin von Molekül

zu Molekül fort, indem die Einordnung der Moleküle ins Raumgitter erfolgt.

Die Herstellung des Zustandes, der das Molekül zur Einordnung in ein Raumgitter befähigt, ruft im Molekül wesentliche Änderungen seiner Eigenschaften hervor; ein Teil der scalaren Eigenschaften wird vektoriell, aber auch die scalar bleibenden Eigenschaften, das Molekularvolumen und der Energieinhalt ändern sich, und zwar nimmt das Molekularvolumen sehr wenig zu, der Energieinhalt aber ab, offenbar weil ein Teil der Schwingungen des Moleküls aufgehoben wird.

B. Die thermischen Kennzeichen der Formen einer thermodynamischen Krystallgruppe.

Mit Hilfe der Flächen des thermodynamischen Potentials, der ζ-Flächen, kann man für die Schmelz- und Umwandlungspunkte der Formen einer thermodynamischen Gruppe zu Regeln über den Zusammenhang der Reihenfolge der Stabilitäten, der Umwandlungsfähigkeit und der Reihenfolge der Schmelz- und Umwandlungspunkte gelangen, welche in praxi die Entscheidung über die Zugehörigkeit einer Form zu einer thermodynamischen Gruppe zulassen. Zu demselben Zweck können auch die Volumbeziehungen und die Schmelz- und Umwandlungswärmen herangezogen werden, und wie wir sehen werden, auch die Richtungen der Schmelz- und Umwandlungskurven. Auf diese Regeln ist zum Teil schon in der Thermodynamik der Einstoffsysteme II [1]) hingewiesen, auf diese Arbeit beziehen sich auch die Hinweise im Text. Da aber diese Regeln die Grundlage der Molekulargewichtsbestimmung anisotroper Phasen bilden, so ist wohl ihre übersichtliche Zusammenstellung gerechtfertigt.

1. Die Reihenfolge der Stabilitäten und der Schmelz- und Umwandlungspunkte.

Ausgehend von der Definition des Begriffes der thermodynamischen Krystallgruppe, daß die ζ-Flächen ihrer Glieder sich untereinander nicht schneiden, kommt man auf folgenden Wegen zu Beziehungen zwischen den Stabilitäten und den Schmelzkurven der Formen einer Gruppe.

Die ζ-Flächen der Formen einer Gruppe schneiden die ζ-Fläche

---

1) Göttinger Nachrichten 1911, S. 325.

isotroper Zustände in einer Reihe von räumlichen Kurven, die in der Richtung zu wachsenden ζ-Werten sich in der Reihenfolge abnehmender Stabilitäten folgen; die Projektionen dieser räumlichen Schnittkurven auf die p-T-Ebene, die Schmelzkurven, umschließen einander in der Reihenfolge ihrer Stabilitäten, indem die Schmelzkurve der instabilsten Form von der Schmelzkurve der stabileren umschlossen wird (l. c. 328).

Hieraus folgen für die Schmelzpunkte bei gleichem Druck und für die Schmelzdrucke bei gleicher Temperatur folgende Regeln.

Der Vollständigkeit wegen denken wir uns die Zustandsfelder der Formen 3, 3′ und 3″, deren Stabilität mit zunehmender Strichelung abnimmt, vollständig von der Schmelzkurve umgrenzt. Durch die Punkte der Schmelzkurve der instabilsten Form 3″, an denen die Tangenten parallel der p-Achse respektive parallel der T-Achse sind, denken wir uns die beiden neutralen Kurven $a''b''$ und $c''d''$ gelegt. Man ersieht nun, daß im Druckintervall zwischen den neutralen Punkten c'' und d'' der Schmelzkurve der instabilsten Form 3″ für die Gleichgewichtstemperaturen T, T' und T'' der Formen 3, 3′ und 3″ folgende Beziehungen gelten:

oberhalb der neutralen Kurve $c''d''$ gilt $T > T' > T''$ 1a)
und unterhalb „ „ „ „ „ $T < T' < T''$ 1b)

Bei derselben Temperatur gilt für die Schmelzdrucke p, p' und p'' der Formen 3, 3′ und 3″ im Temperaturintervall zwischen den neutralen Punkten a'' und b''

links von der neutralen Kurve $a''b''$ $p < p' < p''$ 2a)
und rechts „ „ „ „ „ $p > p' > p''$ 2b)

Beziehungen zwischen der Reihenfolge der Stabilitäten und der Reihenfolge der Umwandlungstemperaturen oder der Umwandlungsdrucke sind nur bei Unterscheidung der Fälle nach folgenden Kriterien aufzustellen. Man hat erstens festzustellen, ob das Zustandsfeld der betreffenden Form von dem der anderen Form umschlossen wird oder ob es dieses umschließt, und zweitens ob die Formen einer Gruppe mit ein und derselben Form der anderen Gruppe im Gleichgewicht sind, oder ob sie mit verschiedenen Formen dieser Gruppe im Gleichgewicht sind (l. c. 331).

Die Stabilitäten der Formen zweier Gruppen sollen mit zunehmender Strichelung der Bezeichnung der Formen 3, 3′ und 3″; 4, 4′ und 4″ abnehmen, und die Glieder der Gruppe 4 immer mit derselben Form der Gruppe 3, nämlich der Form 3, im Gleichgewicht sein. Es gelten dann die Regeln:

1) wenn das Zustandsfeld der Form 3 die der Formen 4 umschließt, Fig. 8, so gilt für denselben Druck:

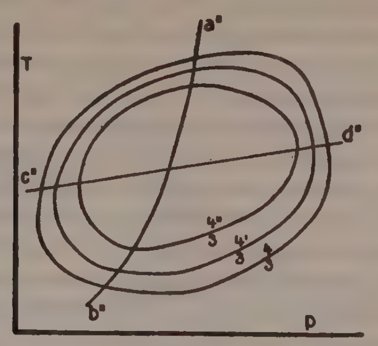


Fig. 8.

oberhalb der neutralen Kurve $c''d''$ $T_{3,4} > T'_{3,4'} > T''_{3,4''}$ 3a)
und unterhalb „ „ „ „ $T_{3,4} < T'_{3,4'} < T''_{3,4''}$ 3b)
und bei derselben Temperatur:
links von der neutralen Kurve $a''b''$ $p_{3,4} < p'_{3,4'} < p''_{3,4''}$ 4a)
und rechts „ „ „ „ „ $p_{3,4} > p'_{3,4'} > p''_{3,4''}$ 4b)

2) wenn die Zustandsfelder der Formen 4 das der Form 3 umschließen, so gilt für denselben Druck (Fig. 9):

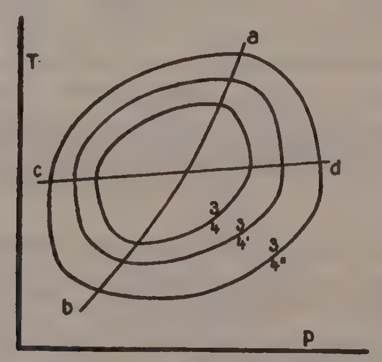


Fig. 9.

oberhalb der neutralen Kurve cd $T_{3,4} < T'_{3,4'} < T''_{3,4''}$ 5a)
und unterhalb „ „ „ „ $T_{3,4} > T'_{3,4'} > T''_{3,4''}$ 5b)
und bei derselben Temperatur gilt:
links von der neutralen Kurve ab $p_{3,4} > p'_{3,4'} > p''_{3,4''}$ 6a)
und rechts „ „ „ „ „ $p_{3,4} < p'_{3,4'} < p''_{3,4''}$ 6b)

Zur Entscheidung der Frage, ob eine Reihe von abnehmenden Gleichgewichtstemperaturen im ersten Quadranten der Gleichgewichtskurve die Reihenfolge wachsender oder abnehmender Stabilitäten angibt, muß man wissen, ob das Zustandsfeld der Form 3 oder das der Form 4 bei höheren Temperaturen liegt.

Wenn die Umwandlungs-Temperaturen oder -Drucke sich nicht auf Gleichgewichte beziehen, an denen sich ein und dieselbe Form beteiligt, so können Regeln über die Reihenfolge der Umwandlungs-Temperaturen oder -Drucke nicht angegeben werden, denn die Umwandlungskurven verschiedener Formen zweier Gruppen können sich untereinander schneiden. Wenn ein solches Sichschneiden ohne Bildung eines Tripelpunktes eintritt, so muß aus dieser Tatsache geschlossen werden, daß sich an den beiden Gleichgewichten 4 von einander verschiedene Phasen beteiligen (l. c. 334).

2. Die Reihenfolge der Stabilitäten und die Reihenfolge der Volumen und Schmelzwärmen.

Die Wahrscheinlichkeit des Sichschneidens der ζ-Flächen zweier Formen ist sehr viel kleiner, wenn dieselben bei kleinen Drucken nach wachsenden Drucken und beim Schmelzpunkt nach abnehmenden Temperaturen hin divergieren, als wenn sie konvergieren (l. c. 353).

Daraus ergeben sich folgende Regeln. Wenn für eine Reihe von Formen 3, 3′ und 3″, deren Schmelzpunkte im ersten Quadranten der Schmelzkurve sich bei demselben Druck in die Reihenfolge $T_3 > T_3 > T''_{3''}$ ordnen, die umgekehrte Reihenfolge der spezifischen Volumen $v_3 < v'_{3'} < v''_{3''}$ gilt, so gehören diese Formen wahrscheinlich zu derselben Gruppe. Diejenige Form, welche diese Reihenfolge stört, gehört aller Wahrscheinlichkeit nach zu einer anderen Gruppe.

Die analoge Regel gilt mit derselben Wahrscheinlichkeit auch für die Entropien der Glieder einer Gruppe. Es wird also gelten, $\eta_3 < \eta'_{3'} < \eta''_{3''}$, wenn die Reihenfolge $T_3 > T'_{3'} > T''_{3''}$ besteht. Da für gleiche Temperaturen und Drucke man nach Reduktion der η-Werte auch schreiben kann:

$$(\eta_2 - \eta_3)\,T > (\eta_2 - \eta'_{3'})\,T > (\eta_2 - \eta''_{3''})\,T,$$

wo η_2 die Entropie der Flüssigkeit bedeutet, und $(\eta_2 - \eta_3)\,T$ gleich der Schmelzwärme R_p ist, so folgt, daß, wenn für die Schmelzpunkte die Reihenfolge $T_3 > T'_{3'} > T''_{3''}$ gilt, für die auf die Temperatur der instabilsten Form reduzierten Schmelzwärmen die Reihenfolge:

$$R_{p,2} > R'_{p,3'} > R''_{p,3'}$$

bestehen soll.

Mit Hilfe des thermodynamischen Potentials (der ζ-Funktion) kann man über die Beziehungen der spezifischen Volumen und der Schmelzwärmen der Formen einer Gruppe zu ihren Schmelzpunkten bei gleichen Drucken nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit für ein nicht zu weites Zustandsfeld Schlüsse ziehen. Zur Erweiterung dieser Regeln muß man sich zur Einführung einer Hypothese entschließen. Machen wir nun die Annahme, daß in jedem Zustandspunkte des Zustandsfeldes der instabilsten anisotropen Form die Reihenfolge der ζ-Werte durch die umgekehrte Reihenfolge der inneren Drucke K bei $p = 0$ bestimmt wird, daß also die Instabilität der Phasen mit Abnahme der Molekularattraktion in ihnen wächst, so kann man für die isotrope Phase 2 und zwei Formen derselben Gruppe 3 und 3′ schreiben:

$$\zeta_2 > \zeta'_{3'} > \zeta_3$$
$$\text{und} \quad K_2 < K'_{3'} < K_3.$$

Da der durch die Molekularattraktion bedingte Teil des inneren Druckes K die Reihenfolge der Volumen und Kompressibilitäten bestimmt, so folgt aus der letzten Beziehung für $p = 0$

$$v_2 > v'_{3'} > v_3$$

und für jeden beliebigen Druck

$$\frac{d_T v_2}{dp} > \frac{d_T v'_{3'}}{dp} > \frac{d_T v_3}{dp}.$$

Diese beiden Beziehungen führen zu der Lage der Volumenisothermen in Fig. 10. Wenn die Flächenbeziehungen:

$$acbd > ogh - odf$$
$$\text{und} \quad glKi > ogh - odf$$

gelten, so ist die Form 3′ bei der betreffenden Temperatur instabiler als die Form 3 (l. c. 350).

Man ersieht also, daß für die Formen einer thermodynamischen Gruppe bei Drucken, die kleiner sind als der des Punktes o auf der neutralen Kurve der beiden Formen, $v'_{3'} > v_3$ ist, während bei höheren Drucken $v_3 > v'_{3'}$ ist. Es kehrt sich also die Volumenbeziehung der Formen einer Gruppe beim Überschreiten ihrer in Bezug auf die stabilste Form neutralen Kurve um. Die Reihenfolge der Volumenänderungen beim Schmelzen bleibt aber bestehen: die Volumänderung bei der stabileren Form ist größer als bei der

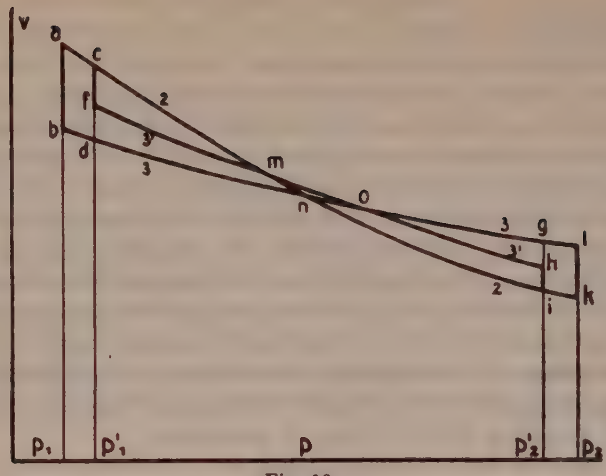


Fig. 10.

instabileren Form. Die Erfahrung reicht nicht hin, um bei demselben Stoff diese Beziehung prüfen zu können, aber für verschiedene Stoffe bestätigt sie diese Beziehung. Es muß nämlich, während bei Formen derselben Gruppe, deren Schmelzpunkte mit wachsendem Druck steigen, die Beziehung $v''_{3''} > v'_{3'} > v_3$ zutrifft, bei Stoffen, deren Schmelzpunkte mit wachsendem Druck fallen, die Beziehung $v''_{3''} < v'_{3'} < v_3$ gelten. Die Erfahrung hat gelehrt, daß bei den Stoffen der ersten Gruppe[1]) in der Tat die erste Beziehung zutrifft, während bei einem Stoff der zweiten Gruppe, dem Wasser[2]), die zweite Beziehung besteht. Das Volumen des instabilen Eises IV, das zur Gruppe des gewöhnlichen Eises I gehört, weil die Schmelzkurve des Eises IV bei Temperaturen von wenigen 0.01° unterhalb der des Eises I verläuft, ist kleiner als das des gewöhnlichen Eises I.

Für die Entropien der Formen einer Gruppe ergeben sich ähnliche Regeln. Die Erfahrung lehrt, daß bei der Umwandlung der instabileren Form in die stabilere derselben Gruppe, bei deren Krystallisation Wärme frei wird, immer Wärme frei wird, daß also bei positiven Werten der Schmelzwärmen für die Entropien der Schmelze und der Glieder einer Gruppe die Beziehung $\eta_2 > \eta''_{3''} > \eta'_{3'} > \eta_3$ gilt. In Fig. 11 sind die Entropieisobaren für die Schmelze 2 und die beiden Formen 3 und 3′ derselben Gruppe

1) F. Körber, Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. 81.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. 72, S. 621—630, Seite 629 5. Zeile von unten ist statt „größer“ kleiner zu lesen.

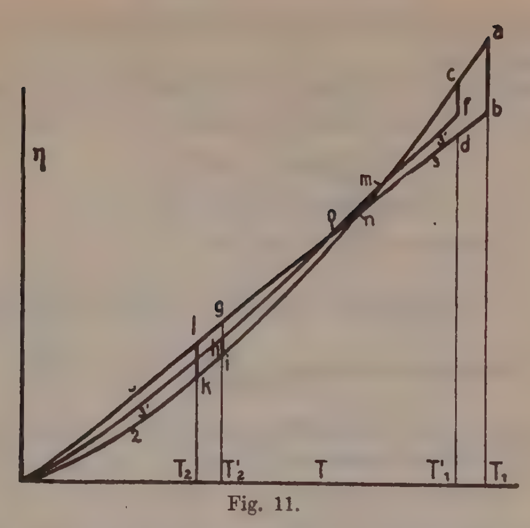


Fig. 11.

dargestellt. Wenn für die spezifischen Wärmen die Beziehung $c_{p,2} > c'_{p,3'} > c_{p,3}$ gilt, so können sich die Entropieisobaren η_2, $\eta'_{3'}$ und η_3 schneiden. Es konnte ferner gezeigt werden, daß wenn die Flächenbeziehungen (l. c. 349 u. 351):

$$abcd > odf - ogh$$
$$\text{und } glKi > ogh - odf$$

gelten, die Form 3′ im ganzen Temperaturintervall T_1, T_2 der Stabilität der Form 3 instabiler ist als die Form 3. Man ersieht, daß bei Temperaturen, die höher liegen als die des Punktes o, $\eta'_{3'} > \eta_3$, und daß bei Temperaturen unterhalb der des Punktes o $\eta'_{3'} < \eta_3$. Bei der Temperatur des Punktes o würde also bei der Umwandlung von 3′ in 3 keine Wärme frei werden noch gebunden werden, bei höheren Temperaturen würde bei dieser Umwandlung Wärme frei und bei tieferen Temperaturen Wärme gebunden werden. Für die Schmelzwärmen der beiden Formen bei der Temperatur T'_1 ergibt sich $R_{p3} > R'_{p3'}$ und bei der Temperatur T'_2 $R_{p3} < R'_{p3'}$, die Schmelzwärmen der Formen einer Gruppe ändern also bei den oberen und unteren Schmelzpunkten ihre Reihenfolge nicht. — Die Kennzeichen der Zugehörigkeit einer Reihe von Formen zu einer Gruppe sind von Bedeutung, weil man nur Stücke ihrer Schmelzkurven verfolgen kann, und deshalb auch streng genommen nicht entscheiden kann, ob sich die Schmelzkurven einer Reihe von Formen schneiden werden oder einander umschließen, wenn aber die Kennzeichen der Zugehörigkeit zu einer Gruppe für eine Reihe

von Formen zutreffen, so hat man sie zu einer thermodynamischen Gruppe zu rechnen.

Für den ersten Quadranten der Schmelzkurve der instabilsten Form sind diese Kennzeichen folgende:

Stabilitäten $\zeta_s < \zeta'_{s'} < \zeta''_{s''}$

Schmelzpunkte $T_s > T'_{s'} > T''_{s''}$

spezifische Volumen $v_s < v'_{s'} < v''_{s''}$

Kompressibilitäten $\frac{d_T v_s}{dp} < \frac{d_T v'_{s'}}{dp} < \frac{d_T v''_{s''}}{dp}$

Wärmeausdehnungen $\frac{d_p v_s}{dT} < \frac{d_p v'_{s'}}{dT} < \frac{d_p v''_{s''}}{dT}$

Entropien $\eta_s < \eta'_{s'} < \eta''_{s''}$

Schmelzwärmen $R_{p,s} > R'_{p,s'} > R''_{p,s''}$

spezifische Wärmen $c_{p,s} < c'_{p,s'} < c''_{p,s''}$.

3. Die Richtungen der Schmelzkurven der Formen einer Gruppe.

Die Schmelz- und Umwandlungskurven der Formen einer Gruppe, die mit ein und derselben anderen Phase im Gleichgewicht sind, schneiden sich nicht. Diese Gleichgewichtskurven brauchen aber nicht konstante Abstände in der T- oder p-Richtung zu haben, unveränderliche Abstände in beiden Richtungen wären nur bei parallelen Geraden möglich. Die Abstände in der Richtung der T-Achse können in gewissen T-Intervallen dieselben sein, während sich die Abstände in der p-Richtung ändern, und ebenso können die Abstände in der p-Richtung unveränderlich sein, während die in der T-Richtung sich ändern. Auch in beiden Richtungen können sich die Abstände der beiden Gleichgewichtskurven ändern. Im Folgenden wird gezeigt werden, daß die Änderungen jener Abstände mit den Beziehungen gewisser thermischer Eigenschaften der betreffenden Formen zusammenhängen.

Für die Projektion der Schnittkurve zweier ζ-Flächen auf der p-T-Ebene ergeben sich auf folgendem Wege die bekannten Gleichungen für die Richtungen der Gleichgewichtskurven.

Für zwei ζ-Flächen gelten allgemein die Gleichungen:

$$d\zeta_{s_2} = \frac{d_T \zeta_{s_2}}{dp} dp + \frac{d_p \zeta_{s_2}}{dT} dT$$

$$d\zeta_{s_3} = \frac{d_T \zeta_{s_3}}{dp} dp + \frac{d_p \zeta_{s_3}}{dT} dT.$$

Da längs der Schnittlinie der beiden ζ-Flächen die Beziehung $d\zeta_2 = d\zeta_3$ gilt, so ergibt sich für die Richtung $\frac{dT}{dp}$ der Projektion der Schnittlinie auf die p-T-Ebene die Gleichung:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\frac{d_T\zeta_2}{dp} - \frac{d_T\zeta_3}{dp}}{\frac{d_p\zeta_2}{dT} - \frac{d_p\zeta_3}{dT}}$$

und da $\frac{d_T\zeta}{dp} = v$ und $\frac{d_p\zeta}{dT} = -\eta$ ist, so folgt:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v_2 - v_3}{\eta_2 - \eta_3}.$$

Für die Schmelzkurve einer instabileren Form 3' derselben Gruppe erhält man:

$$\frac{dT'}{dp} = \frac{v_2' - v_{3'}'}{\eta_2' - \eta_{3'}'}.$$

Subtrahiert man die letzte Gleichung von der vorletzten und berücksichtigt, daß bei demselben Druck die Gleichungen:

$$v_2' = v_2 - \frac{d_p v_2}{dT}(T - T')$$

$$\text{und} \quad \eta_2' = \eta_2 + \frac{d_p \eta_2}{dT}(T - T')$$

gelten, so erhält man

$$\left[\frac{dT}{dp} - \frac{dT'}{dp}\right]_p = \frac{v_2 - v_3}{\eta_2 - \eta_3} - \frac{v_2 - \frac{d_p v_2}{dT}(T - T') - v_{3'}'}{\eta_2 - \frac{d_p \eta_2}{dT}(T - T') - \eta_{3'}'}.$$

Gleiche Abstände in der Richtung der T-Achse haben die Schmelzkurven der stabileren und instabileren Form in Temperaturintervallen, für welche die Gleichungen:

$$v_{3'}' - v_3 = \frac{d_p v_2}{dT}(T - T') \qquad 1)$$

$$\text{und} \quad \eta_3 - \eta_{3'}' = \frac{d_p \eta_2}{dT}(T - T')$$

$$\text{oder} \quad \eta_2 - \eta_3 = \eta_2 - \frac{d_p \eta_2}{dT}(T - T') - \eta_{3'}'$$

$$\text{oder} \quad \frac{R_{p,3}}{T} = \frac{R_{p,3'}'}{T'} \qquad 2)$$

gelten.

Die Bedingungen gleicher Abstände der Schmelzkurven zweier Formen einer Gruppe in der Richtung der T-Achse sind also nach 1) und 2): erstens muß die Differenz der spezifischen Volumen beider Formen bei ihren Schmelztemperaturen T und T' gleichen Druckes gleich sein der Wärmeausdehnung der Flüssigkeit mal der Differenz der Schmelzpunkte, und zweitens müssen sich die Schmelzwärmen der beiden Formen wie die absoluten Temperaturen ihrer Schmelztemperaturen verhalten.

Wenn die linke Seite der Gleichung 1) größer als die rechte ist und in der Gleichung 2) die rechte größer als die linke ist, so werden mit wachsendem Druck die Abstände der beiden Gleichgewichtskurven in der T-Richtung wachsen. Wenn dagegen die beiden umgekehrten Beziehungen gelten, so werden mit wachsendem Druck diese Abstände abnehmen. Sind aber die beiden linken Seiten der Gleichungen 1) und 2) beide kleiner oder größer als die rechten, so kann nur bei Kenntnis der Größen selbst in den beiden Gleichungen die Frage nach der Änderung der Abstände in der T-Richtung entschieden werden.

Die Bedingungen gleicher Abstände der beiden Schmelzkurven in der Richtung der p-Achse ergeben sich, wenn man in die Gleichungen für die Richtungen beider Gleichgewichtskurven die beiden folgenden Gleichungen einführt und dann die beiden Gleichungen subtrahiert.

$$v_3' = v_3 + \frac{d_T v_2}{dp}(p_{3'}' - p_3)$$

$$\eta_3' = \eta_3 + \frac{d_T \eta_2}{dp}(p_{3'}' - p_3).$$

Man erhält:

$$\left[\frac{dT}{dp} - \frac{dT'}{dp}\right]_T = \frac{v_2 - v_3}{\eta_2 - \eta_3} - \frac{v_3 + \frac{d_T v_3}{dp}(p_{3'}' - p_3) - v_{3'}'}{\eta_2 + \frac{d_T \eta_2}{dp}(p_{3'}' - p_3) - \eta_{3'}'}.$$

Die Bedingungen gleicher Abstände beider Schmelzkurven in der p-Richtung sind also:

$$v_{3'}' - v_3 = \frac{d_T v_3}{dp}(p_{3'}' - p_3) \qquad 3)$$

$$\text{und} \quad \eta_{3'}' - \eta_3 = \frac{d_T \eta_2}{dp}(p_{3'}' - p_3)$$

$$\text{oder} \quad \eta_2 - \eta_3 = \eta_2 + \frac{d_T \eta_2}{dp}(p_3' - p_3) - \eta_{3'}'$$

$$\text{oder} \quad \frac{R_{p3}}{T} = \frac{R_{p3'}'}{T}. \qquad 4)$$

Wenn die Abstände der beiden Gleichgewichtskurven in der p- oder T-Richtung sich nur wenig ändern, so kann man hieraus streng genommen nur schließen, daß die Differenzen der Quotienten $\frac{dT}{dp} - \frac{dT'}{dp}$ sich in verschiedenen Punkten der Gleichgewichtskurven wenig ändern: Wenn sich die Abstände in einer der beiden Richtungen aber viel stärker als in der anderen ändern, so darf man hierin einen Hinweis erblicken, daß das eine Gleichungspaar näher erfüllt ist als das andere. Daß die Abstände der beiden Gleichgewichtskurven in beiden Richtungen unveränderlich werden, ist sehr unwahrscheinlich, da für diesen Fall die Gleichungen 1) 2) 3) und 4) gleichzeitig erfüllt sein könnten, was kaum zu erwarten ist. Je weniger gekrümmt die Gleichgewichtskurven sind, um so wahrscheinlicher ist es, daß ihre Abstände in der T- und p-Richtung mit steigendem Druck wachsen, weil sie als Gleichgewichtskurven derselben Gruppe nicht konvergieren dürfen, und es unwahrscheinlich ist, daß alle 4 Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden.

Ueber elektrische und magnetische Doppelbrechung.

II.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1912.

6) Im ersten Abschnitt meiner Arbeit habe ich auf der Grundlage, welche die statistische Mechanik bietet, nach dem Vorgang von Herrn Langevin die allgemeinste Theorie der elektrischen und der magnetischen Doppelbrechung unter Rücksicht auf Absorptionswirkungen entwickelt. In diesem zweiten soll untersucht werden, inwieweit man die Wechselwirkung zwischen den Molekülen, die das schließliche statistische Gleichgewicht bedingt, rechnerisch verfolgen kann.

Eine solche Betrachtung scheint mir ein doppeltes Interesse zu haben. Einmal ist der Ansatz, den die statistische Mechanik für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines Moleküls macht, immerhin einigermaßen hypothetisch. Eine Stützung desselben durch die Berechnung, wenngleich nur in einfachsten Fällen durchführbar, dürfte daher erwünscht sein. Die nachstehenden Betrachtungen zeigen indessen, daß man von den nächstliegenden Voraussetzungen aus zu Resultaten gelangt, die von dem genannten Ansatz in wichtigen Punkten abweichen.

Sodann aber liegen Beobachtungen wenigstens über elektrische Doppelbrechung auch bei veränderlichen Feldern vor, und über solche vermag natürlich ein Ansatz, der Gleichgewicht voraussetzt, nichts auszusagen.

Von den sich bietenden einfachsten Annahmen über die Wechselwirkung der Moleküle wähle ich zunächst diejenige, die sich, als den in andern Gebieten benutzten nachgebildet, wohl am unmittelbarsten darbietet.

Wir wollen annehmen, die Moleküle dürften, obwohl elektrisch oder magnetisch anisotrop, für die Bewegungsvorgänge als Kugeln angesehen werden. Sollen dabei die Zusammenstöße infolge ihrer Wärmebewegung der orientierenden Wirkung des Feldes entgegenwirken, so ist das denkbar Einfachste, sich vorzustellen, daß nach einem System von Stößen die Gesamtheit der Moleküle der Orientierung nach immer wieder völlig ungeordnet sei, sodaß also der Orientierungsakt gewissermaßen nach jedem Stoß von vorn anfängt. Dazu wären die Moleküle etwa mit Rauhigkeiten oder Zähnen versehen zu denken, sodaß sie während des Stoßes, d. h. während einer gewissen Periode kleinsten Abstandes, sich gegenseitig drehen könnten. Aufgabe ist dann die Bestimmung der mittleren Orientierung während der freien Flugdauer τ — ein Problem, das an sich ein Interesse bietet.

Da wir die Moleküle als Kugeln auffassen, so gelten für ihre Rotationen die Eulerschen Gleichungen in der einfachen Form, daß um jede im Molekül feste Axe das Produkt aus Trägheitsmoment in Winkelbeschleunigung gleich dem wirkenden Drehungsmoment ist, also z. B. gesetzt werden kann

$$J \frac{d^2 \chi}{dt^2} = D E'^2, \tag{33}$$

wobei E' wie früher das wirkende elektrische Feld ist, und D das Moment für das Feld Eins bezeichnet, das von der Orientierung des Moleküles abhängt und also auch mit dieser im Laufe der Bewegung zeitlich variiert.

Die Berücksichtigung dieser Veränderlichkeit würde die Betrachtung außerordentlich komplizieren. Man erkennt aber leicht, daß dieselbe bei den zu erklärenden (mit E'^2 proportionalen) Erscheinungen durch eine beschränkende Annahme ausgeschaltet werden kann. Denn diese Erscheinungen verlangen, daß die mittleren Drehungen der Moleküle während der freien Flugdauer gleichfalls mit E'^2 proportional sind, und eine solche Proportionalität entsteht jedenfalls, wenn die Drehungen so klein sind, daß während derselben die Veränderlichkeit von D ignoriert werden darf.

Wir wollen also zunächst die Annahme verfolgen, daß die Flugzeiten τ in den bisher beobachteten Fällen so klein seien, daß während derselben im Felde nur Drehungen von

äußerst kleinem Betrage zustande kommen. Hier wird dann, wenn wir zur Zeit $t = 0$, das heißt beim Beginn eines Fluges, $\chi = 0$, $d\chi/dt = \chi_0'$ setzen, nach (33)

$$J\chi = \tfrac{1}{2} DE'^2 t^2 + J\chi_0' t.$$

Da aber, wie die Orientierungen, so auch die Rotationsgeschwindigkeiten nach einem System von Zusammenstößen regellos sein mögen, so können wir von vornherein deren Wirkungen außer Betracht lassen und schreiben

$$J\chi = \tfrac{1}{2} DE'^2 t^2. \tag{34}$$

Für den mittleren Wert $\bar{\chi}$ während der freien Flugdauer τ ergibt sich hieraus

$$J\bar{\chi} = \tfrac{1}{6} DE'^2 \tau^2. \tag{35}$$

Treibt man die Annäherung eine Stufe weiter, so erscheint rechts ein Glied mit $E'^4\tau^4$; bei größeren Flugdauern würde sonach $\bar{\chi}$ und somit die Doppelbrechung nicht mehr mit dem Quadrat des Feldes proportional sein. Wir wollen uns auf die durch (35) charakterisierte Annäherung beschränken.

Für die Drehungsmomente L, M, N um die Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0, welche die Kugel in der durch Fig. 1 des I. Teiles bestimmten Orientierung durch das Feld erleidet, geben die bekannten Formeln der Theorie die Ausdrücke

$$\begin{aligned} L &= E'^2 \beta_1 \gamma_1 (\mu_2 - \mu_3), \\ M &= E'^2 \gamma_1 \alpha_1 (\mu_3 - \mu_1), \\ N &= E'^2 \alpha_1 \beta_1 (\mu_1 - \mu_2). \end{aligned} \tag{36}$$

Zugleich bestimmen sich die Aenderungen der Richtungskosinus α_h, β_h, γ_h bei Drehungen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ um die Hauptaxen durch die Formeln

$$\delta\alpha_h = \beta_h\delta\nu - \gamma_h\delta\mu, \quad \delta\beta_h = \gamma_h\delta\lambda - \alpha_h\delta\nu, \quad \delta\gamma_h = \alpha_h\delta\mu - \beta_h\delta\lambda, \quad h = 1,2,3. \tag{37}$$

Für uns sind nach Obigem wesentlich die mittleren Aenderungen $\overline{\delta\vartheta}$, $\overline{\delta\varphi}$, $\overline{\delta\psi}$, welche die für die Orientierung der Kugel charakteristischen Winkel ϑ, φ, ψ bei dergleichen Drehungen erfahren. Man erhält aus dem System (14) sogleich

$$\begin{aligned} \overline{\delta\alpha_1} &= -\sin\vartheta\,\overline{\delta\vartheta} = \beta_1\overline{\delta\nu} - \gamma_1\overline{\delta\mu}, \\ \overline{\delta\gamma_1}\cos\varphi - \overline{\delta\beta_1}\sin\varphi &= \sin\vartheta\,\overline{\delta\varphi} = \alpha_1(\overline{\delta\mu}\cos\varphi + \overline{\delta\nu}\sin\varphi) \\ &\qquad - (\beta_1\cos\varphi + \gamma_1\sin\varphi)\overline{\delta\lambda}, \\ \overline{\delta\alpha_3}\cos\psi - \overline{\delta\alpha_2}\sin\psi &= \sin\vartheta\,\overline{\delta\psi} = (\beta_3\cos\psi - \beta_2\sin\psi)\overline{\delta\nu} \\ &\qquad - (\gamma_3\cos\psi - \gamma_2\sin\psi)\overline{\delta\mu}. \end{aligned} \tag{38}$$

Hierein ist dann nach (34) zu setzen

$$J\overline{\delta\lambda} = \tfrac{1}{8}\tau^2 L, \ldots \tag{39}$$

Man findet so, wenn man kurz den Faktor

$$\frac{\tau^2 E'^2}{6J} = F$$

setzt,

$$\begin{aligned}
\overline{\delta\vartheta} &= F[(\mu_2 - \mu_1)\cos^2\varphi + (\mu_3 - \mu_1)\sin^2\varphi]\cos\vartheta\sin\vartheta,\\
\overline{\delta\varphi} &= F(\mu_3 - \mu_2)\cos\varphi\sin\varphi,\\
\overline{\delta\psi} &= F(\mu_3 - \mu_2)\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta.
\end{aligned} \tag{40}$$

Diese mittleren Verschiebungen bedingen nun die Abweichung der Verteilung der Moleküle von der regellosen, welche durch das Feld eintritt.

7) Die ursprüngliche Orientierung kann dadurch charakterisiert werden, daß, wenn man alle N Moleküle der Volumeneinheit mit ihren Mittelpunkten in den Koordinatenanfang bringt und bei allen eine Seite der X_0-Axe als positiv markiert, dann jede Kegelöffnung $d\omega$ gleich viel $+X_0$-Axen umschließt, derart, daß

$$dN_0 = \frac{N d\omega}{4\pi} = \varrho_0 d\omega, \tag{41}$$

wobei ϱ_0 als Dichte der bez. Verteilung erscheint.

Zieht man dann für alle diese Moleküle die Lage der (analog markierten) $+Y_0$-Axe in betracht, so müssen gleiche Winkelelemente $d\varphi$ in der $Y_0 Z_0$-Ebene gleich viel $+Y_0$-Axen enthalten, derart, daß auf $d\varphi$ liegen

$$dN_0' = \frac{dN_0 d\varphi}{2\pi} = \sigma_0 d\varphi, \tag{42}$$

wobei σ_0 wiederum die Dichte der Verteilung darstellt.

Um nun die Aenderung der Orientierung durch das Feld zu bestimmen, benutzen wir Kegelelemente, wie sie zwischen zwei Kegeln von der Oeffnung ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und zwei Ebenen mit den Winkeln ψ und $\psi + d\psi$ liegen; nach Symmetrie muß dabei die aelotrope Orientierung rings um die X-Axe gleichförmig sein, was sich auch dadurch ausdrückt, daß nach (40) $\overline{\delta\vartheta}$, $\overline{\delta\varphi}$, $\overline{\delta\psi}$ von ψ unabhängig sind.

Die Drehung $\overline{\delta\vartheta}$ verändert die Dichte ϱ in dem Kegelelement nach dem Schema

$$\delta\varrho \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi = -\varrho_0 d\psi \Big| \sin\vartheta\, \overline{\delta\vartheta} \Big|_{\vartheta}^{\vartheta + d\vartheta} = -\varrho_0 \frac{d \sin\vartheta\, \overline{\delta\vartheta}}{d\vartheta} d\vartheta\, d\psi,$$

d. h.

(43) $$\frac{\delta\varrho}{\varrho_0} = -\frac{d(\sin\vartheta\,\overline{\delta\vartheta})}{\sin\vartheta\, d\vartheta}.$$

Die Drehung $\overline{\delta\varphi}$ verändert analog die Dichte σ in der Aequatorebene $Y_0 Z_0$ nach dem Schema

$$\delta\sigma\, d\varphi = -\sigma_0 \left|\overline{\delta\varphi}\right|_{\varphi}^{\varphi+d\varphi} = -\sigma_0 \frac{d\overline{\delta\varphi}}{d\varphi} d\varphi,$$

d. h.

(44) $$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{d\overline{\delta\varphi}}{d\varphi}.$$

Die Heranziehung von (40) gibt hiernach

(45) $$\begin{aligned} \frac{\delta\varrho}{\varrho_0} &= F[(\mu_2-\mu_1)\cos^2\varphi + (\mu_3-\mu_1)\sin^2\varphi](1-3\cos^2\vartheta), \\ \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} &= F(\mu_2-\mu_3)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Moleküle mit $+X_0$-Axen in der Kegelöffnung $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$ und mit $+Y_0$-Axen zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ ist hiernach gegeben durch

(46) $$dN' = \frac{N}{8\pi^2}\left(1 + \frac{\delta\varrho}{\varrho_0} + \frac{\delta\sigma}{\sigma_0}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi.$$

Mit dieser Zahl sind nun die für das optische Verhalten charakteristischen Parameter

$$\mathfrak{m}_h = \frac{4\pi}{3}\Sigma e^2 q_{hh}$$

zu berechnen. Z. B. findet sich $\mathfrak{m}_1$ durch die Ausführung des Integrals

(47) $$\mathfrak{m}_1 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{Ne^2}{8\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{\delta\varrho}{\varrho} + \frac{\delta\sigma}{\sigma_0}\right)\left(q_1\alpha_1^2 + q_2\beta_1^2 + q_3\gamma_1^2\right) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi$$

zu

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} + \mathfrak{p},$$

analog

(48) $$\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{p},$$

wobei

(49) $$\mathfrak{p} = \frac{4\pi Ne^2\tau^2 E'^2}{135\, J}\Big((q_2-q_3)(\mu_2-\mu_3) + (q\ -q_1)(\mu_3-\mu_1) + (q_1-q_2)(\mu_1-\mu_2)\Big).$$

Diese Resultate weichen von den in (20) bis (22) enthaltenen nur insofern ab, als hier τ^2/J an derjenigen Stelle steht, die früher $1/mrT$ einnahm. Diese beiden Terme haben aber noch Faktoren gemeinsam. Denn für die freie Flugdauer (resp. das Reziproke der Stoßzahl) gilt bekanntlich [1])

$$(50) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}\pi s^2 N \bar{c}},$$

wobei s den „Molekularradius", $\bar{c}$ die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet. Ferner ist $J = mk^2$, unter k den Trägheitsradius des Moleküles verstanden, und gilt [2])

$$(51) \qquad \bar{c}^2 = 8rT/\pi.$$

Somit reduziert sich der Unterschied darauf, daß früher der Faktor Eins da auftrat, wo sich jetzt der Faktor

$$(52) \qquad \Phi = \frac{1}{16\pi^2 s^4 k^2 N^2}$$

findet, der — wie nötig — eine reine Zahl darstellt.

Man kann die Tatsache, daß die verfolgte Vorstellung nicht auf dasselbe Resultat führt, wie der Ansatz der statistischen Mechanik, dadurch erklären, daß die vorgenommene Wechselwirkung eine Art von Reibung repräsentiert und dergl. mit dem in letzterer vorausgesetzten Hamiltonschen Prinzip nicht vereinbar ist.

Obiger Unterschied erscheint praktisch zunächst nicht sehr wesentlich, insofern der Faktor Φ bei Flüssigkeiten wahrscheinlich nicht sehr von Eins abweicht, wie man erkennt, indem man durch $N = 1/l^3$ die Entfernung l benachbarter Moleküle einführt, die entsteht, wenn man alle in ein kubisches Raumgitter einordnet und k^2 etwa $= s^2/10$ setzt. Da bei Flüssigkeiten l nicht allzuviel größer sein wird als s, so ist vermutlich $l^6/8\pi^2 s^6$ nicht gar weit von Eins entfernt.

Bedenklich werden die Verhältnisse bei Gasen, wo l sehr viel größer als s ist; hier ergibt die Stoßhypothese eine enorm viel größere Wirkung des Feldes, als die Grundformel (1). Ueberdies liefert sie eine indirekte Proportionalität von Φ mit N^2, das bei Gasen leicht zu variieren ist, und die Beobachtungen von Leiser [3]) schließen eine solche aus.

1) S. z. B. Boltzmann, Gastheorie p. 68.

2) l. c. p. 50 und 53.

3) B. Leiser, Berl. Ber. 13, p. 903, Phys. Zeitschr. 12, p. 950, 1911.

Man wird also die Hypothese der Molekularstöße in der obigen Form aufgeben müssen.

8) Als extrem entgegengesetzte Hypothese bietet sich die Annahme, daß die Zusammenstöße der Moleküle so selten sind, daß sie auf die Orientierung derselben überhaupt keinen merklichen Einfluß üben, so daß die Stöße für die Berechnung der Orientierung gänzlich außer Betracht bleiben können. Es scheint nicht, als ob damit etwas dem Hamiltonschen Prinzip Widerstrebendes angenommen wäre, und man wird glauben dürfen, daß die Annahmen bei äußerst verdünnten Gasen nahezu erfüllt sind. Hier müssen die Rotationen der Moleküle im Felde durch beliebig lange Zeiten der Rechnung unterzogen werden, und die Betrachtung wird sehr kompliziert. Ich will zunächst den Gedanken, der hier leitend sein muß, an einem ganz einfachen Falle entwickeln und mich dann bezüglich des allgemeinsten auf ein Aperçu beschränken.

Es sei ein System von einaxigen Molekülen betrachtet, die infolge der Wärmebewegung rotieren, aber nur um eine Axe Z_0 die, normal zur Hauptaxe und zugleich normal zur Feldrichtung steht. Vor Erregung des Feldes mögen sie alle dieselbe Geschwindigkeit ω haben und regellos orientiert sein, derart, daß ihre Hauptaxen sich über alle Richtungen der Ebene XY (die sie beschreiben) gleichmäßig verteilen.

Nunmehr wirke parallel X das Feld und gebe ein Potential w für jedes Molekül. Dann gilt, wenn J wieder das Trägheitsmoment, ϑ' die Rotationsgeschwindigkeit bezeichnet, die Energiegleichung in der Form

$$\tfrac{1}{2} J \vartheta'^2 = k - w. \tag{53}$$

Wir nehmen an, daß die Feldwirkung gering gegenüber der ursprünglichen Rotationsgeschwindigkeit sei, ϑ' sich also nur wenig von ω unterscheide.

Die Integrationskonstanten k bestimmen wir durch Einführung der mittleren Werte $\overline{\vartheta'^2}$ und $\bar{w}$ während eines Umlaufes, so daß resultiert

$$J(\vartheta'^2 - \overline{\vartheta'^2}) = 2(\bar{w} - w). \tag{54}$$

Setzt man $\overline{\vartheta'^2} = \Theta^2$ und berücksichtigt, daß der Einfluß des Feldes auf die Rotationsgeschwindigkeit als klein angenommen ist, so stimmt Θ mit dem Mittelwert von ϑ' merklich überein, und es gilt in Annäherung

$$\varDelta = \vartheta' - \Theta = \frac{\bar{w} - w}{J\Theta}.$$

ϑ' und Θ sind auch bei anfänglich gleicher Geschwindigkeit ω der Moleküle verschieden je nach der Orientierung, welche das Molekül im Momente der Entstehung des Feldes besaß. Zur Geltung kommt der Mittelwert von Δ für alle möglichen Anfangsorientierungen. Für diesen können wir in unserer Annäherung schreiben

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{w} - w}{J\omega}. \tag{55}$$

Waren ursprünglich die Axenrichtungen in der XY-Ebene regellos verteilt, so muß sich jetzt eine Art von Orientierung einstellen, und zwar eine mittlere Dichtigkeitsdifferenz von Ort zu Ort, die mit Δ proportional ist. Die in einem Winkelraum $\delta\vartheta$ von insgesamt N liegenden Axen bestimmen sich nämlich durch

$$dN = \frac{N}{2\pi}\left(1 - \frac{\bar{\Delta}}{\omega}\right) d\vartheta.$$

Wir erhalten somit

$$dN = \frac{N}{2\pi}\left(1 - \frac{\bar{w} - w}{J\omega^2}\right) d\vartheta. \tag{56}$$

Nun ist in dem vorliegenden Falle

$$w = -\tfrac{1}{2}E'^2(\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\cos^2\vartheta),$$
$$\bar{w} = -\tfrac{1}{2}E'^2(\mu_2 + \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)),$$

es folgt somit

$$dN = \frac{N}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2J\omega^2}(\mu_1 - \mu_2)(\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{2})\right) d\vartheta. \tag{57}$$

Handelt es sich um eine ebene Rotation infolge der Wärmebewegung, so besteht zwischen Rotations- und Translationsgeschwindigkeit die Beziehung

$$J\omega^2 = \tfrac{1}{2} m\overline{c^2} = mr T.$$

Hiernach stimmt aber der in (57) neben Eins stehende Ausdruck mit demjenigen völlig überein, der sich aus den (auf den vorliegenden Fall übertragenen) Formeln (2) ergibt.

Es erscheint dabei das Auftreten des Potentiales in den obigen Formeln kinetisch dadurch bedingt, daß durch dasselbe die Rotationsgeschwindigkeit der Moleküle geändert wird, und darnach die Hauptaxen in denjenigen Gebieten sich mehr zusammendrängen, wo die Geschwindigkeit eine kleinere ist, und umgekehrt.

Man kann dieses Resultat vermutungsweise auf den allgemeinen Fall übertragen. Bei Einführung der gesamten Rotationsgeschwindigkeit Ω gibt die Energieformel statt (55) hier

$$\bar{\varDelta} = \frac{\bar{w} - w}{J\Omega},$$

und dies kann man ähnlich verwenden, wie oben bei Formel (53) gezeigt.

Nun findet aber zwischen den so gefundenen Ausdrücken für dN und den aus (2) abgeleiteten der unerwartete Unterschied statt, daß bei ihnen beiden das in der Klammer neben Eins stehende Glied das entgegengesetzte Vorzeichen hat, während die in 6) verfolgte Annahme bezüglich des Vorzeichens mit (2) Übereinstimmung liefert. Während aber im vorigen Falle die Beobachtung gegen das Resultat der speziellen Stoß-Hypothese entschied, kann sie hier eine solche Entscheidung nicht erbringen, da nach der Erfahrung das Vorzeichen der Produkte $(q_h - q_k)(\mu_h - \mu_k)$ in (22) sowohl positiv als negativ sein kann, sich aber im Falle der elektrisch oder magnetisch doppelbrechenden Körper nicht direkt bestimmen läßt.

Dieser Unterschied scheint mir nicht ohne Interesse. Seine Notwendigkeit erhellt durch eine bloße qualitative Überlegung, denn der Ansatz spricht eine mit wachsender Annäherung an die stabile Gleichgewichtslage wachsende Wahrscheinlichkeit aus, während bei der hier verfolgten Vorstellung diese Position mit größter Geschwindigkeit passiert wird, sonach geringster Wahrscheinlichkeit entspricht.

9) Mehr aus Interesse am Problem selbst, als weil damit eine wirkliche Theorie der Erscheinung geliefert wird, habe ich an der Hand der oben verfolgten Vorstellung untersucht, wie sich nach denselben das Abklingen der elektrischen Doppelbrechung nach Aufhebung des Feldes gestaltet. Es liegen bekanntlich über diesen Vorgang im Schwefelkohlenstoff interessante Beobachtungen von Abraham und Lemoine[1]), weiter von James[2]) und Baetge[3]) vor. Die ersteren Forscher gaben an, daß innerhalb weniger als $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ Sekunden nach Unterbrechung des Feldes die Doppelbrechung bis zur Unmerklichkeit, innerhalb weniger als $0{,}25 \cdot 10^{-8}$ Sek. auf die Hälfte abfalle; die Messungen von James und Baetge ließen sich sogar mit der Annahme, daß die Doppelbrechung dem Felde momentan folge, vereinigen. Es bietet demgemäß offenbar ein Interesse zuzusehen, welche Folgerungen in

1) K. Abraham und J. Lemoine C. R. **129**, p. 206, 1899; Journ. de Phys. (3) **9**, p. 262, 1900.

2) J. James, Ann. d. Phys. **15**, p. 963, 1904.

3) E. Baetge, Straßb. Diss. 1907.

dieser Hinsicht spezielle Hypothesen ergeben. Wir beginnen mit der in § 6 gemachten Annahme bei Voraussetzung einachsiger Moleküle.

Sei $t = 0$ der Moment, wo das Feld beseitigt wird. Bezeichnet dann ζ die Anzahl der Stöße, die ein einzelnes Molekül in der Zeiteinheit erfährt, dann ist die Anzahl Moleküle, die zwischen t und $t + dt$ anstößt,

$$(58) \qquad dN_1 = N \zeta dt \, e^{-\zeta t}.$$

Von ihnen hat zwischen $-t$ und $-(t_1 + dt_1)$ die Bewegung begonnen der Bruchteil

$$(59) \qquad dN_2 = dN_1 \, \zeta dt_1 \, e^{-\zeta t_1}.$$

Von diesen Molekülen fiel mit der Hauptaxe in die Zone zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$

$$(60) \qquad dN_3 = \tfrac{1}{2} dN_2 \sin\vartheta d\vartheta.$$

Diese Moleküle sind nun die Zeit t_1 hindurch dem Drehmoment

$$(61) \qquad \Theta = E'^2 (\mu_1 - \mu_2) \sin\vartheta \cos\vartheta$$

im Sinne wachsender ϑ ausgesetzt gewesen; t_1 ist dabei so klein gedacht, daß die darin stattfindende Aenderung δ von ϑ sehr klein ist. Bezeichnet wieder J das Trägheitsmoment der Kugel, so ist aus

$$(62) \qquad J \frac{d^2\delta}{dt^2} = \Theta$$

für die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Geschwindigkeit und Drehung zu schließen

$$(63) \qquad J\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_1 = \Theta t_1, \qquad J\delta_1 = \tfrac{1}{2}\Theta t_1^2.$$

Dabei ist wieder eine Anfangsgeschwindigkeit der Moleküle als regellos verteilt ignoriert.

Mit der erreichten Drehungsgeschwindigkeit $(d\delta/dt)_1$ fliege das Molekül nun noch die Zeit t hindurch und erreiche damit die Drehung Δ, gegeben durch

$$(64) \qquad J\Delta = \Theta(\tfrac{1}{2}t_1^2 + t_1 t).$$

Diese Drehung ist maßgebend für die Verteilung der Orientierung zur Zeit t.

Bezeichnet nämlich (wie in § 7) ϱ_0 die ursprüngliche Dichte der Verteilung der $+X_0$-Axe auf der Einheitskugel, so entsteht durch die Drehung Δ eine Dichtigkeitsänderung $\delta\varrho$, gegeben durch

$$\delta\varrho \sin\vartheta d\vartheta = -\varrho_0 \,|\, \varDelta \sin\vartheta \,|_{\vartheta}^{\vartheta + d\vartheta},$$

d. h. durch

(65)
$$\frac{\delta\varrho}{\varrho_0} = -\frac{d(\varDelta \sin\vartheta)}{\sin\vartheta\, d\vartheta}.$$

Die Heranziehung der Ausdrücke (64) und (61) liefert

(66)
$$\frac{\delta\varrho}{\varrho_0} = -\frac{E'^2(\mu_1 - \mu_2)}{2J} t_1 (t_1 + 2t)(3\cos^2\vartheta - 1).$$

Die Feldwirkung zur Zeit t kommt also darauf hinaus, daß in (54) dN_2 mit $dN_2' = dN_2\left(1 + \frac{\delta\varrho}{\varrho_0}\right)$ zu vertauschen ist. Dies dN_2' tritt nun an die Stelle von dN in den Rechnungen von § 7, wobei die Summationen nach φ und ψ gemäß der jetzt vorhandenen einfacheren Symmetrie fortfallen, dafür aber nach t_1 und nach t zu integrieren ist, weil Moleküle in allen möglichen Phasen ihres Fluges zu berücksichtigen sind.

Soll der Zustand des Mediums zur Zeit t_0 nach der Unterbrechung des Feldes (die für $t = 0$ angenommen war) untersucht werden, so sind die Integrationsgrenzen

$$0 < \vartheta < \pi, \qquad 0 < t_1 < \infty, \qquad t_0 < t < \infty.$$

Die letzten Grenzen ergeben sich dadurch, daß alle Moleküle, die erst während $t_0 < t < \infty$ anstoßen, zur Zeit t_0 noch optisch wirksam sind.

Uns interessiert hier nur die Zeitabhängigkeit des Vorganges, die wir durch das Integral

(67)
$$K = \tfrac{1}{4}\zeta^4 \int_0^\infty \int_{t_0}^\infty dt_1\, dt\, e^{-\zeta(t_1 + t)} t_1 (t_1 + 2t)$$

gegeben betrachten können. Es resultiert

(68)
$$K = (1 + \tfrac{1}{2}\zeta t_0) e^{-\zeta t_0},$$

wobei dann $t_0 = 0$ und $K = 1$ einander entsprechen.

Nun ist ζ die reziproke Stoßzeit $1/\tau$, somit nach (50)

$$\zeta = \sqrt{2}\,\pi s^2 N \bar{c}.$$

Um diesen Wert abzuschätzen, benutzen wir, daß für den gasförmigen Zustand sowohl $\bar{c}$ als $\pi s^2 N = Q$ aus Beobachtungen abzuleiten ist. Bei $0°C$ und Atmosphärendruck ist für Schwefelkohlenstoff rund $\bar{c} = 2{,}8 \cdot 10^4$ cm/sec, $Q = 6{,}5 \cdot 10^4$ cm². Für den flüssigen Zustand kann man, wo es sich nur um Größenordnungen handelt,

die mittlere Geschwindigkeit der im Gas gleich annehmen, Q aber im Verhältnis der Dichten größer. Man erhält dann ζ etwa $= 0,5 \cdot 10^{12}$.

Dies Resultat ergibt, daß für $t_0 = 0,5 \cdot 10^{-8}$ schon längst K unmerklich geworden ist, ja daß selbst für den 100. Teil hiervon $K = 13 \cdot e^{-25}$ praktisch gleich Null ist.

Die in § 8 verfolgte (entgegengesetzte) Annahme, daß die Zusammenstöße der Moleküle bei dem Vorgang überhaupt keine Rolle spielen, ist in ihren Konsequenzen bezüglich der Frage des Abklingens der elektrischen Doppelbrechung mit wenigen Worten erledigt. Im Moment des Aufhörens des Feldes setzt nach ihr die gleichförmige Rotation der Moleküle augenblicklich wieder ein, und da in jedem Falle nur Mittelwerte der Orientierungen optisch zur Geltung kommen, so kann man hier ein momentanes Aufhören des Effektes ohne eigentliche Relaxationszeit folgern.

Die Resultate sind mit der oben genannten Beobachtung im Einklang; natürlich können letztere aber nicht als eine besondere Stütze der Orientierungshypothese gelten, denn die Hypothese des Zeeman-Effektes wäre mit ihnen ebenso vereinbar.

Ueber eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.

Von

P. Koebe in Leipzig.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 22. Juni 1912.

Im Folgenden teile ich in kurzer Darlegung (1) eine neue wesentlich elementare Methode der konformen Abbildung des allgemeinsten schlichten einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche des Einheitskreises mit. Die Methode eignet sich auch, um (2) die Grenzkreisuniformisierung Riemannscher Flächen bei vorgegebener oder fehlender relativer Verzweigung der betreffenden Uniformisierungstranszendenten auszuführen, wenn diese Fläche entweder die schlichte Ebene selbst oder eine zweiblättrige, also hyperelliptische Fläche ist. Auch das von mir in den Math. Ann. Bd. 69 u. a. behandelte Sicheltheorem (Uniformisierung $p = 0$ mit einem durch Komposition von elliptischen oder parabolischen Sicheln entstehenden Fundamentalbereich l. c. p. 40) läßt sich im analogen Sinne behandeln. Unter Heranziehung der Poincaréschen Reihen ergibt sich nun (3) ein neuer Beweis des Satzes, daß zu jeder geschlossenen Riemannschen Fläche eine Klasse algebraischer Funktionen gehört. Auch eine Anwendung auf das Randwertproblem der Potentialtheorie für einen schlichten mehrfach-zusammenhängenden Bereich (4) scheint mir der Beachtung würdig.

Die elementaren Hilfsmittel, welche für die Beweisführung in Betracht kommen und durch welche die Idee des Ansatzes nahegelegt wird, finden sich bereits in meinen früheren Untersuchungen vor[1]). Eine ebenfalls darauf bezugnehmende neuere

---

1) Ich verweise insbesondere auf Gött. Nachr. 1907 p. 203 und 644, Math. Ann. Bd. 67 1909 pag. 209, 216, Crelles Journal Bd. 139 p. 261.

interessante Arbeit des Herrn C. Carathéodory[1]) gab mir die Veranlassung, meine bezüglichen früheren Gedanken wieder aufzunehmen. Die hier mitgeteilte Methode der konformen Abbildung des allgemeinsten schlichten einfach zusammenhängenden Bereichs scheint mir, wenn man an der Beschränkung auf schlichte Bereiche festhält, in mehr als einer Beziehung ideale Vollkommenheit zu besitzen. Dieselbe kann zweckmäßig als Schmiegungsverfahren bezeichnet werden.

1. Wir werden auf den gegebenen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich B eine unendliche Folge von Quadratwurzeloperationen, (die übrigens ohne weiteres auch durch Wurzeloperationen höherer Ordnung oder logarithmische Operationen ersetzt werden können), zur Anwendung bringen, durch welche in angebbarer Weise die Begrenzung des Bereiches immer mehr und mehr der Peripherie des Einheitskreises von innen her „angeschmiegt“ wird, so daß sie schließlich in diese selbst übergeht.

Die erste (oft überflüssige) Wurzeloperation bezweckt eine erste Glättung der Begrenzung des Bereichs B in der Weise, daß der neue Bereich B_1 sicher ein zweidimensionales Stück der Ebene unbedeckt läßt, welches man als das Aeußere des Einheitskreises annehmen darf. Diese Operation[2]) besteht darin, daß man auf der Begrenzung von B zwei Punkte a_1 und a_2 wählt und mit Hilfe der Funktion $\sqrt{\frac{x-a_1}{x-a_2}}$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs B vornimmt. Der neugefundene Bildbereich von B wird jetzt, wie erwähnt, durch lineare Transformation noch so modifiziert, daß er ganz innerhalb des Einheitskreises liegt und daß derjenige seiner inneren Punkte, welcher bei der gewünschten Abbildung auf die Fläche des Einheitskreises in den Nullpunkt übergehen soll, mit dem Nullpunkt selbst zusammenfällt. Die Ebene des gefundenen Bereiches B_1 werde als z_1-Ebene bezeichnet. Es sei jetzt $\alpha_1 = a_1 + ib_1$ der nächste Punkt der Begrenzung des Bereichs B_1 vom Nullpunkte aus. Alsdann wird das innerhalb des Einheitskreises befindliche Stück der zweiblättrigen Riemannschen Fläche der Funktion $\sqrt{z_1 - \alpha_1}$, in welcher B_1 als Teilbereich enthalten ist[3]), durch Vermittlung einer linearen Funktion von

---

1) C. Carathéodory: „Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten.“ Math. Ann. Bd. 72, pag. 107–144; vgl. insbesondere p. 141 mit Bezug auf No. 1 der vorliegenden Note.

2) Vgl. Crelles Journal l. c.

3) Vgl. Gött. Nachr. l. c. und Ann. 67 Bd. 67 l. c.

$\sqrt{\frac{z_1-(a_1+ib_1)}{z_1-(a_1-ib_1)}}$ umkehrbar eindeutig konform abgebildet auf die schlichte Fläche des Einheitskreises so, daß dabei der in B_1 enthaltene Nullpunkt und die in ihm befindlichen Richtungselemente festbleiben[1]). Da nun die Greensche Funktion des Einheitskreises mit dem Nullpunkt als logarithmischer Unstetigkeitsstelle, d. i. die Funktion $\log\frac{1}{|z_1|}$, größer ist als die Greensche Funktion der erwähnten zweiblättrigen Hilfsfläche, d. i. $\log\frac{1}{|z_2|}$ [2]), so folgt, daß $|z_2|>|z_1|$ ist. Insbesondere findet man leicht, daß der dem Punkte α_1 analog zu definierende Punkt α_2 auf der Begrenzung des neuen, als Bild von B_1 erhaltenen Bereichs B_2 in angebbarer Weise der Peripherie des Einheitskreises näher liegt, als der Punkt α_1. Wird nun die geschilderte Abbildungsoperation unendlich oft wiederholt, so erhält man, (ähnlich wie bei meinem iterierenden Verfahren in Anwendung auf das Problem der konformen Abbildung eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf einen von Vollkreisen begrenzten Bereich), eine immer weiter fortschreitende „Anschmiegung" des Randes an die Kreisform, da nun $\lim\limits_{n=\infty}|\alpha_n| = 1$ wird, weil offenbar $|\alpha_{n+1}|-|\alpha_n|$ nicht beliebig klein werden kann, ohne daß $1-|\alpha_n|$ beliebig klein wird.

Die Funktionen $\log\frac{1}{|z_n|}$ $[n = 1, 2, 3\ldots]$ bilden, betrachtet als Funktionen von z_1, eine monoton abnehmende Folge von positiven Potentialfunktionen, welche daher auch konvergiert. Daß die Grenzfunktion $\lim\limits_{n=\infty} z_n = z$ eine konforme Abbildung auf die volle Fläche des Einheitskreises leistet, versteht sich auf Grund der Gleichungen

$$|z_{n+1}|>|z_n|,\quad |\alpha_{n+1}|>\alpha_n$$

und

$$\lim_{n=\infty}\alpha_n = 1$$

von selbst. Uebrigens hat man auch sofort

$$\left|\frac{z_{n+m}}{z_n}\right|<\frac{1}{|\alpha_n|}$$

oder

$$\log|z_{n+m}|-\log|z_n|<-\log|\alpha_n|$$

---

1) Dieser Schritt läßt sich, wie alle folgenden analogen Schritte, auch graphisch leicht ausführen.

2) Vgl. Ann. 67 l. c.

und kann dazu leicht ausrechnen, wieviel Schritte benötigt werden, um die Größe $1 - |\alpha_n|$ sicher unter eine beliebig klein gegebene Größe ε herabzudrücken. Es ist ferner bemerkenswert, daß man, wenn z_1 ein Punkt innerhalb B_1 ist, imstande ist, allein aus der Distanz dieses Punktes vom Rande des Bereichs B_1 a priori eine von n unabhängige untere Schranke für die Distanz seiner Bildpunkte z_n, z von der Peripherie des Einheitskreises zu berechnen. Diese auf Grund meines „Verzerrungssatzes" evidente Tatsache folgt im vorliegenden Falle einfach so: Es ist, wenn $|z_1| < |\alpha_1|$ gewählt ist, $\log \frac{1}{|z_n|} > \log \frac{|\alpha_1|}{|z_1|}$. Ist aber $|z_1| \geqq |\alpha_1|$, so kann man doch für die Stelle z_1 auf Grund des Harnakschen Satzes über positive Potentiale mittels kettenförmiger Anwendung desselben eine untere Schranke für den Wert $\log \frac{1}{|z_n|}$ gewinnen, weil $\log \frac{1}{|z_n|}$ in B_1 ein positives Potential ist, für welches in einem gewissen Bezirke soeben eine untere Schranke (Minorante) hergeleitet werden konnte.

2. In Bezug auf die oben erwähnten Uniformisierungsprobleme, welche sich mit meiner neuen Methode lösen lassen, will ich nur folgendes bemerken. Man kann nach früheren Untersuchungen von mir[1]) eine Abbildung der einfach zusammenhängenden, der Grenzkreisuniformisierung in den hier zu betrachtenden Fällen entsprechenden Ueberlagerungsfläche auf eine andere Fläche machen, welche über der Fläche des Einheitskreises „regulär" ausgebreitet ist, und unendlich viele gegen die Peripherie des Einheitskreises sich häufende relative Windungspunkte besitzt. Durch das Wurzelverfahren, das jetzt als $\sqrt[m]{}$-verfahren oder log-verfahren zur Geltung kommt, kann man nun die relativen Windungspunkte beseitigen, indem man sie gegen die Peripherie mehr und mehr hindrängt, immer den dem Nullpunkt am nächsten liegenden Windungspunkt durch eine Operation beseitigend.

3. Ist F als Riemannsche Fläche einer zu bestimmenden algebraischen Funktion $y(x)$ vorgelegt, so kann man mit F auf Grund von 2. eine Grenzkreisuniformisierung mit Relativverzweigung der Uniformisierungstranszendenten vornehmen, indem man auf F solche relativen Verzweigungen vorschreibt, daß die betreffende Uniformisierungstranszendente zugleich auch eine Grenzkreisuniformisierung der zu Grunde liegenden schlichten Ebene liefert. Wird nun

1) Gött. Nachr. 1907, pag. 410 ff., Crelles Journal Bd. 139 pag. 284 ff.

F der gefundenen Transzendenten entsprechend zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0 kanonisch aufgeschnitten, so wird F_0 auf ein Grenzkreispolygon abgebildet, welches eine diskontinuierliche Gruppe erzeugt. Der für diese Gruppe allgemein angesetzte Quotient zweier Poincaréschen Reihen gleicher Dimension liefert dann in der Ueberpflanzung auf F eine eigentlich zu F gehörende algebraische Funktion.

4. Es sei B ein beliebig gegebener schlichter $(p+1)$-fach zusammenhängender Bereich. Die zugehörende einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche verhält sich topologisch analog wie die Ueberlagerungsfläche, welche der Grenzkreisuniformisierung der schlichten Ebene unter Vorgabe von $p+1$ relativen Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung entspricht. Demgemäß können wir sie auch wie die letztere Fläche durch bloße Anwendung von Wurzel- oder Logarithmus-Operationen uniformisieren im Sinne der Grenzkreisuniformisierung. Ist diese Uniformisierung ausgeführt, so haben wir gewissermaßen eine konforme Abwickelung des Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises, wobei die Randwerte sich natürlich unendlich oft auf der Peripherie wiederholen. Dies hindert jedoch nicht, da die Menge der Grenzpunkte auf der Peripherie keinen Inhalt hat, jetzt durch eine einfache Anwendung des Poissonsche Integrals die Lösung des Randwertproblems aufzustellen. Ist der mehrfach zusammenhängende Bereich speziell ein Kreisring, so ist die erwähnte Uniformisierung elementar und es treten auf der Peripherie des Einheitskreises nur zwei Grenzpunkte auf.

Ueber die geradlinige Bewegung des Bornschen starren Elektrons.

Von

W. Behrens und **E. Hecke** in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 22. Juni 1912.

Die vorliegende Mitteilung, welche im Anschluß an eine Vorlesung von Prof. Hilbert über Strahlungstheorie (Sommer 1912) entstanden ist, behandelt die geradlinige Bewegung des Bornschen starren Elektrons. Unter Zugrundelegung des alten Newtonschen Starrheitsbegriffes sind die Bewegungsgleichungen des Elektrons von Planck[1]), Herglotz[2]), Abraham[3]) u. a. aufgestellt worden. Vom Standpunkte der Relativitätstheorie hat zuerst Born[4]) die Bewegung des Elektrons behandelt: er hat aber nur einen speziellen Fall, die sog. Hyperbelbewegung, näher betrachtet. Wir werden im Anschluß an die Bornsche Arbeit für die allgemeine geradlinige Bewegung des Elektrons die Bewegungsgleichungen angeben, welche die Geschwindigkeit des Elektronenmittelpunktes und deren Ableitungen mit den Vektoren des äußeren Feldes verknüpfen. Wir werden diese Gleichungen dadurch erhalten, daß wir die Kraft des Elektrons auf sich selbst nach Potenzen seines Radius a entwickeln. Unser Verfahren gestattet,

---

1) M. Planck, Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden. Ann. d. Phys. N. Folge. Bd. 60 (1897).

2) G. Herglotz, Zur Elektronentheorie. Gött. Nachr. 1903.

3) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, 2. Aufl., Leipzig 1908.

4) M. Born, Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. 4. Folge. Bd. 30 (1909).

noch die Glieder erster Ordnung[1]) dieser Entwicklung verhältnismäßig leicht zu bestimmen. Was die Lösungen der Bewegungsgleichungen angeht, so führt die Natur unseres Ansatzes ohne Schwierigkeit zu einer besonders einfachen Klasse von Lösungen: wenn wir uns auf sie beschränken, dann ist gerade wie in der Mechanik die Bewegung durch Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit eindeutig festgelegt. Hingegen läßt sich darüber, ob es außer diesen Lösungen noch andere gibt, nichts sagen.

Die Bewegung des Bornschen Elektrons ist durch eine dreifach unendliche Menge von „Parallelkurven" des vierdimensionalen Raumes gegeben. Wir beschränken uns im folgenden auf die geradlinige Bewegung, also auf den Fall, wo die Weltlinien des Elektrons zweidimensionale Kurven sind, und wählen die Bewegungsrichtung als x-Achse. Für die Darstellung dieser Bewegung ist es zweckmäßig, nicht mit Born eine Größe p zu benutzen, die mit der Komponente der Vierergeschwindigkeit in der Bewegungsrichtung identisch ist, sondern statt dessen die zu einer bestimmten Weltlinie des Elektrons gehörige Eigenzeit τ. Außerdem charakterisieren wir einen beliebigen Weltpunkt des Elektrons durch die Ruhkomponenten Ξ, H, Z seiner „Entfernung" von dieser Weltlinie; diese Größen sind längs einer Weltlinie konstant: wir können also von der Weltlinie Ξ, H, Z sprechen. Ist die Anfangsweltlinie gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\tau), \\ y &= 0, \\ z &= 0, \\ t &= \beta(\tau), \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $\alpha(\tau)$ und $\beta(\tau)$ der Gleichung[2])

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = -1 \tag{1}$$

und der Ungleichung

$$\beta' > 0$$

genügen, so lautet die Darstellung der Weltlinie Ξ, H, Z:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta' \Xi, \\ y &= H, \\ z &= Z, \\ t &= \beta + \alpha' \Xi. \end{aligned}$$

1) Die Reihe beginnt mit einem Gliede der Ordnung -1.

2) Wir setzen die Lichtgeschwindigkeit gleich 1; die Striche bedeuten Ableitungen nach τ.

Denn erstens sind diese Kurven Parallelkurven: jeder lineare Raum $\tau =$ const. ist nämlich wegen der aus (1) folgenden Relation

$$\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' = 0 \tag{2}$$

„normal" aufder Weltlinie Ξ, H, Z, und die Entfernung des Schnittpunktes dieses Raumes mit einer anderen Weltlinie Ξ_1, H_1, Z_1 von dem Punkte τ der ersten Weltlinie ist gleich

$$(\Xi - \Xi_1)^2 + (H - H_1)^2 + (Z - Z_1)^2,$$

also längs der Weltlinie konstant; zweitens erfolgt die Bewegung parallel zur x-Achse, und drittens bedeuten die Parameter Ξ, H, Z wirklich die Ruhkomponenten des Abstandes der Weltlinie Ξ, H, Z von der Anfangsweltlinie. Weiter macht man die Annahme, daß die Ruhgestalt des Elektrons eine Kugel vom Radius a ist. Als Anfangsweltlinie wählen wir dann natürlich die Weltlinie des Mittelpunktes; die zum Elektron gehörigen Weltlinien sind dann gegeben durch:

$$\Xi^2 + H^2 + Z^2 \leqq a^2.$$

Die elektrische Ruhdichte ϱ_0 endlich soll konstant sein, die Ruhladung des Elektrons ist dann also

$$e_0 = \frac{4}{3}\pi\varrho_0 a^3.$$

Die letzte Voraussetzung machen wir nur der Einfachheit halber: eine von Ξ, H, Z abhängige, inbezug auf den Mittelpunkt symmetrische Ladungsverteilung würde keine neuen Schwierigkeiten bieten.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen des Elektrons aufstellen. Es bedeute M den elektromagnetischen Sechservektor des Feldes, welches durch das Elektron erregt wird, und v sei der Vierervektor, der die Geschwindigkeit der Elektrizität mißt. Dann ist die auf die Ladungseinheit wirkende Kraft durch den Vektor

$$f = -v.M$$

gegeben, und die gesamte auf das Elektron wirkende Kraft ist das über seine Ruhgestalt, also über das Gebiet

$$\Xi^2 + H^2 + Z^2 \leqq a^2$$

zu erstreckende Integral

$$\int \varrho_0 f \, d\Omega,$$

wo zur Abkürzung

$$d\Omega = d\Xi \, dH \, dZ$$

gesetzt ist. Verstehen wir endlich unter k den Vierervektor der äußeren Kraft, der nur von dem betrachteten Weltpunkt und von der dort herrschenden Geschwindigkeit der Elektrizität abhängen möge, dann sind die Bewegungsgleichungen des Elektrons gegeben durch:

$$\int \varrho_0 f \, d\Omega + \int \varrho_0 k \, d\Omega = 0.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem ersten Gliede. Die Berechnung von M erfolgt bekanntlich mit Hilfe der retardierten Potentiale. Es sei Φ ein Vierervektor, welcher die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

und die Nebenbedingung

$$\mathrm{Div}\ \Phi = 0$$

befriedigt; dann ist

$$M = \mathrm{Curl}\ \Phi.$$

Für die Größe Φ gilt bekanntlich folgende Integraldarstellung:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{v}}{(\bar{x} - x)\bar{v}_x + (\bar{y} - y)\bar{v}_y + (\bar{z} - z)\bar{v}_z - (\bar{t} - t)\bar{v}_t} \, \overline{d\Omega}.$$

Dabei ist, wenn λ eine beliebige Funktion von Ξ, H, Z, τ ist, $\bar{\lambda}$ abkürzend für $\lambda(\bar{\Xi}, \bar{H}, \bar{Z}, \bar{\tau})$ gesetzt; die Integration erstreckt sich über das Gebiet

$$\bar{\Xi}^2 + \bar{H}^2 + \bar{Z}^2 \leqq a^2,$$

und $\bar{\tau}$ ist diejenige Funktion von $\bar{\Xi}, \bar{H}, \bar{Z}$, Ξ, H, Z, τ, die der Gleichung

(3) $$h = (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2 - (\bar{t} - t)^2 = 0$$

und der Ungleichung

$$\bar{\tau} \leqq \tau$$

genügt.

In unserem Falle ist nun

$$v_x = \alpha',$$
$$v_y = 0,$$
$$v_z = 0,$$
$$v_t = \beta.$$

Setzen wir ferner abkürzend

$$A = (\bar{x} - x)\bar{\alpha}' - (\bar{t} - t)\bar{\beta}',$$

so wird

$$\Phi_x = \frac{1}{4\pi}\int \bar{\varrho}_0 \frac{\bar{\alpha}'}{A} \overline{d\Omega},$$

$$\Phi_y = 0,$$

$$\Phi_z = 0,$$

$$\Phi_t = \frac{1}{4\pi}\int \bar{\varrho}_0 \frac{\bar{\beta}'}{A} \overline{d\Omega}.$$

Für den Kraftvektor ergibt sich also:

$$f_x = -\beta'\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}\right)$$

$$f_t = -\alpha'\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}\right).$$

Die y- und z-Komponente des Feldes interessieren uns nicht, weil man sich leicht überlegt, daß sie bei der Bildung der Gesamtkraft doch herausfallen. Um den Skalar

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}$$

auszurechnen, führen wir auf Grund der Relation (2) eine Größe $b(\tau)$ ein durch die Gleichung[1]:

$$\alpha'' = b\beta', \qquad \beta'' = b\alpha', \tag{4}$$

gewinnen durch Differentiation der Gleichung (3):

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} = \frac{\bar{x} - x}{A(1 + \bar{b}\bar{\Xi})},$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = -\frac{\bar{t} - t}{A(1 + \bar{b}\bar{\Xi})}$$

und finden außerdem

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{\tau}} = \bar{b}B - (1 + \bar{b}\bar{\Xi}),$$

wobei abkürzend gesetzt ist

$$B = (\bar{x} - x)\bar{\beta}' - (\bar{t} - t)\bar{\alpha}'.$$

1) $|b|$ ist der absolute Wert des „Betrages" der Beschleunigung.

Mit Hilfe dieser Formeln ergibt sich dann:

$$S = \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\bar{b}}{1+\bar{b}\,\bar{\Xi}}\,\frac{(\bar{t}-t)^2-(\bar{x}-x)^2}{A^2}+\frac{B}{A^3}\right)\bar{\varrho}_0\,\overline{d\Omega},$$

und für die gesamte Kraft des Elektrons auf sich selbst folgt der Wert:

$$\begin{aligned} F_x &= -\beta'\int \varrho_0 S\,d\Omega = -\beta' F, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= 0, \\ F_t &= -\alpha'\int \varrho_0 S\,d\Omega = -\alpha' F. \end{aligned}$$

Der Nenner $1+\bar{b}\,\bar{\Xi}$ verschwindet nicht; denn in der Bornschen Kinematik ist die Beschleunigung b an die Ungleichung

$$|b|\,.\,a < 1$$

gebunden.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen erhalten sofort die gewünschte Gestalt, wenn wir $\bar{\tau}$ nach a entwickeln, diesen Ausdruck in F einsetzen und schließlich F als Potenzreihe von a schreiben. Dann treten nämlich in der Tat nur die Größen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ u. s. w. auf.

Um das bequem zu übersehen, geben wir dem Ausdruck

$$(5)\quad F = \frac{1}{4\pi}\int\int\left(\frac{\bar{b}}{1+\bar{b}\,\bar{\Xi}}\,\frac{(\bar{t}-t)^2-(\bar{x}-x)^2}{A^3}+\frac{B}{A^3}\right)\bar{\varrho}_0\,\varrho_0\,\overline{d\Omega}\,d\Omega$$

zunächst eine andere Form. Es ist zweckmäßig, statt der Größen Ξ, H, Z die Größen

$$\xi = \frac{\Xi}{a}, \qquad \eta = \frac{H}{a}, \qquad \zeta = \frac{Z}{a}$$

zu verwenden; die Integrale sind dann über die Einheitskugel zu erstrecken. Ferner bemerken wir, daß die Funktion $\bar{\tau}$ außer von $a, \tau, \bar{\xi}, \xi$ nur abhängt von der Verbindung

$$\varepsilon = ((\bar{\xi}-\xi)^2+(\bar{\eta}-\eta)^2+(\bar{\zeta}-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir bilden nun die zweiten Ableitungen von $\bar{\tau}$ und führen sie in den Ausdruck für F ein. Dann sieht man ohne Schwierigkeit, daß man ihn folgendermaßen umgestalten kann:

$$F = \frac{\varrho_0^2 a^3}{4\pi}\int\int\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\left(1+\bar{b}\,\bar{\xi}\,a\right)\left(\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{\varepsilon}\,\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\varepsilon}\right)\right\}d\bar{\omega}\,d\omega$$

oder unter Einführung der Ruhladung e_0:

$$F = \frac{9e_0^2}{64\pi^3 a^3}\iint \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\left(1+\bar{b}\,\bar{\xi}\,a\right)\left(\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{\varepsilon}\,\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\varepsilon}\right)\right\} d\bar{\omega}\, d\omega.$$

Dieser Ausdruck ist für die Rechnung sehr viel geeigneter als der Ausdruck (5): wenn die Funktion $\bar{\tau}$ nach Potenzen von a entwickelt ist, so ist er ohne Mühe zu bilden.

Um die Entwicklung von $\bar{\tau}$ zu finden, haben wir zunächst die Funktion h nach Potenzen von $\bar{\tau}-\tau$ und von a zu entwickeln. Da h gegenüber einer Lorentz-Transformation invariant ist, können wir annehmen, daß in dem Augenblick τ

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 1$$

ist. Unter dieser Annahme ergibt sich aus den Gleichungen (4):

$$\begin{aligned} \alpha'' &= b, & \beta'' &= 0, \\ \alpha''' &= b', & \beta''' &= b^2, \\ \alpha^{(4)} &= b'' + b^3, & \beta^{(4)} &= 3bb', \end{aligned}$$

und ähnlich drücken sich alle höheren Ableitungen von α und β durch die von b aus. Also ist

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + \frac{b}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{b'}{6}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \frac{b''+b^3}{24}(\bar{\tau}-\tau)^4 + \cdots, \\ \bar{\beta} &= \beta + (\bar{\tau}-\tau) + \frac{b^2}{6}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \frac{bb'}{8}(\bar{\tau}-\tau)^4 + \cdots, \\ \bar{\alpha}' &= b(\bar{\tau}-\tau) + \frac{b'}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{b''+b^3}{6}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \cdots, \\ \bar{\beta}' &= 1 + \frac{b^2}{2}(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{bb'}{2}(\bar{\tau}-\tau)^3 + \cdots, \end{aligned}$$

und wir haben schließlich

$$\begin{aligned} h = {} & (\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{b^2}{12}(\bar{\tau}-\tau)^4 + \frac{bb'}{12}(\bar{\tau}-\tau)^5 + \cdots \\ & + a\Big(b(\bar{\xi}+\xi)(\bar{\tau}-\tau)^2 + \frac{b'}{3}(2\bar{\xi}+\xi)(\bar{\tau}-\tau)^3 \\ & \qquad + \left(\frac{b''}{12}(3\bar{\xi}+\xi) + \frac{b^3}{12}(\bar{\xi}+\xi)\right)(\bar{\tau}-\tau)^4 + \cdots\Big) \\ & + a^2\left(-\varepsilon^2 + b^2\bar{\xi}\xi(\tau-\tau)^2 + bb'\bar{\xi}\xi(\bar{\tau}-\tau)^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Machen wir nun den Ansatz

$$\bar{\tau}-\tau = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \cdots,$$

so liefert die Gleichung $h = 0$ zunächst

$$A_1^2 = \varepsilon^2,$$

also

$$A_1 = \pm\varepsilon.$$

Da wir diejenige Lösung zu berechnen wünschen, für die $\bar{\tau} \leqq \tau$ ist, so wählen wir

$A_1 = -\varepsilon$

und finden weiter

$$A_2 = \frac{b}{2}\varepsilon(\bar{\xi}+\xi),$$

$$A_3 = -\frac{b^2}{8}\varepsilon(3\bar{\xi}^2+2\bar{\xi}\xi+3\xi^2) - \frac{b'}{6}\varepsilon^2(2\bar{\xi}+\xi) + \frac{b^2}{24}\varepsilon^3,$$

$$A_4 = \frac{b^3}{16}\varepsilon(5\bar{\xi}^3+3\bar{\xi}^2\xi+3\bar{\xi}\xi^2+5\xi^3) + \frac{bb'}{6}\varepsilon^2(4\bar{\xi}^2+3\bar{\xi}\xi+2\xi^2)$$
$$-\frac{b^3}{16}\varepsilon^3(\bar{\xi}+\xi) + \frac{b''}{24}\varepsilon^3(3\bar{\xi}+\xi) - \frac{bb'}{24}\varepsilon^4,$$

. . . .

Allgemein übersieht man, daß A_i eine ganze rationale Funktion i-ten Grades von $\bar{\xi}, \xi$ und ε ist, die ε als Faktor enthält, und deren Koeffizienten sich ganz und rational durch $b, b', \ldots b^{(i-2)}$ ausdrücken.

Aus diesen Gleichungen folgt nun leicht, wenn wir abkürzend

$$\varphi = \bar{\xi}+\xi, \qquad \psi = \bar{\xi}-\xi$$

setzen:

$$\begin{aligned} 1+\bar{b}\bar{\xi}a = {} & 1 \\ & + a\frac{b}{2}(\varphi+\psi) \\ & - a^2\frac{b'}{2}\varepsilon(\varphi+\psi) \\ & + a^3\left(\frac{bb'}{4}\varepsilon\varphi(\varphi+\psi) + \frac{b''}{4}\varepsilon^2(\varphi+\psi)\right) \\ & + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\bar{\xi}} + \frac{\bar{\xi}-\xi}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\varepsilon} = {} & -a\frac{1}{\varepsilon}\psi \\ & + a^2\left(\frac{b}{2}\frac{1}{\varepsilon}\varphi\psi + \frac{b}{2}\varepsilon\right) \end{aligned}$$

$$-a^3\left(\frac{b^2}{8}\frac{1}{\varepsilon}(2\varphi^2+\psi^2)\psi+\frac{b'}{6}(3\varphi+\psi)\psi\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{8}\varepsilon(4\varphi+\psi)-\frac{b'}{3}\varepsilon^2\right)$$
$$+a^4\left(\frac{b^3}{16}\frac{1}{\varepsilon}(2\varphi^2+3\psi^2)\varphi\psi+\frac{bb'}{12}(9\varphi^2+4\varphi\psi+3\psi^2)\psi\right.$$
$$+\frac{3}{16}b^3\varepsilon(2\varphi^2+\varphi\psi+\psi^2)+\frac{b''}{8}\varepsilon(2\varphi+\psi)\psi$$
$$\left.+\frac{bb'}{12}\varepsilon^2(11\varphi+3\psi)-\frac{b^3}{16}\varepsilon^3+\frac{b''}{8}\varepsilon^2\right)$$
$$+\cdots.$$

Wir haben nun das Produkt dieser beiden Reihen zu bilden, nach ε zu differentiieren und durch ε zu dividieren. Diese Rechnung vereinfacht sich sehr, wenn man bemerkt, daß das Integral

$$\iint \varepsilon^\lambda \varphi^\mu \psi^\nu \overline{d\omega}\, d\omega$$

nur dann von Null verschieden ist, wenn λ und μ beide gerade sind. Die Substitution

$$\overline{\xi}|\xi,\quad \overline{\eta}|\eta,\quad \overline{\zeta}|\zeta$$

ändert nämlich Integrationsgebiet, Volumenelement und die Größen ε und φ nicht, verwandelt dagegen ψ in $-\psi$. Falls also ν ungerade ist, geht das Integral durch diese Substitution in den entgegengesetzt gleichen Wert über; andrerseits kann es sich dadurch nicht ändern, es ist also gleich Null. Mit Hilfe der Substitution

$$\overline{\xi}|-\xi,\quad \overline{\eta}|-\eta,\quad \overline{\zeta}|-\zeta$$

zeigt man ebenso, daß das Integral für ungerades μ verschwindet. Da die Differentiation nach ε und die Division durch ε die Größen μ und ν nicht ändern, so können wir also schon bei der Multiplikation der Reihen alle Größen weglassen, die wenigstens eine der Größen μ, ν in ungerader Potenz enthalten. Bemerken wir schließlich noch, daß

$$\iint \varepsilon^\lambda \psi^2 \overline{d\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{3}\iint \varepsilon^{\lambda+2}\, \overline{d\omega}\, d\omega$$

ist, *so ergibt sich für den Betrag F der gesamten Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, der Wert:*

$$F = \frac{9 e_0^2}{64 \pi^3} \Big\{ -\frac{1}{a} \frac{2}{3} b \iint \frac{\overline{d\omega}\, d\omega}{\varepsilon} + \frac{2}{3} b' \iint \overline{d\omega}\, d\omega$$
$$- a \Big[\frac{b''}{3} \iint \varepsilon\, \overline{d\omega}\, d\omega + \frac{b^3}{16} \Big(2 \iint \frac{\varphi^2 \psi^2}{\varepsilon^3} \overline{d\omega}\, d\omega$$
$$+ \iint \frac{\psi^4}{\varepsilon^3} \overline{d\omega}\, d\omega + 2 \iint \frac{\varphi^2}{\varepsilon} \overline{d\omega}\, d\omega - \frac{7}{3} \iint \varepsilon\, \overline{d\omega}\, d\omega \Big) \Big] + \cdots \Big\}.$$

Die Umrechnung in die gewöhnlichen Einheiten ergibt

$$F = \frac{9 e_0^2}{64 \pi^3 c^2} \Big\{ -\frac{1}{a} \frac{2}{3} b \iint \frac{\overline{d\omega}\, d\omega}{\varepsilon} + \frac{2}{3c} b' \iint \overline{d\omega}\, d\omega$$
$$- a \Big[\frac{b''}{3c^2} \iint \varepsilon\, \overline{d\omega}\, d\omega + \frac{b^3}{16 c^4} \Big(2 \iint \frac{\varphi^2 \psi^2}{\varepsilon^3} \overline{d\omega}\, d\omega$$
$$+ \iint \frac{\psi^4}{\varepsilon^3} \overline{d\omega}\, d\omega + 2 \iint \frac{\varphi^2}{\varepsilon} \overline{d\omega}\, d\omega - \frac{7}{3} \iint \varepsilon\, \overline{d\omega}\, d\omega \Big) \Big] + \cdots \Big\}.$$

Allgemein wird der Koeffizient von a^i eine ganze rationale Funktion von $b, b', \ldots b^{(i+1)}$ werden. Die gesuchte Umformung der Kraft des Elektrons auf sich selbst ist damit erledigt.

Der Koeffizient von $-b$ ist die elektromagnetische Masse des Elektrons: es ist also

$$m = \frac{3}{32} \frac{e_0^2}{\pi^3 c^2 a} \iint \frac{\overline{d\omega}\, d\omega}{\varepsilon},$$

oder da

$$\iint \frac{\overline{d\omega}\, d\omega}{\varepsilon} = \frac{32}{15} \pi^2$$

ist,

$$m = \frac{1}{5\pi} \frac{e_0^2}{c^2 a}$$

in Übereinstimmung mit der Bornschen Formel.

Das Glied

$$\frac{3}{32} \frac{e_0^2}{\pi^3 c^3} b' \iint \overline{d\omega}\, d\omega = \frac{e_0^2}{6 \pi c^3} b',$$

von dem die Ausstrahlung des Elektrons in erster Linie abhängt, stimmt genau mit dem entsprechenden Gliede der Abrahamschen Theorie überein. Es lautet nämlich in der alten Auffassung, wie man leicht durch Differentiation bestätigt[1]),

1) Der bei Abraham (a. a. O. S. 119) hinzutretende Faktor 4π rührt von einer anderen Wahl der Einheiten her.

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\left(\frac{1}{\left(1-\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right)^2}\frac{d^3\alpha}{d\beta^3}+\frac{3\frac{d\alpha}{d\beta}}{\left(1-\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right)^3}\left(\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}\right)^2\right).$$

Die folgenden beiden Glieder sind weniger bekannt: das Glied mit $b''a$ entspricht einem von Herglotz berechneten Gliede in der alten Theorie; das Glied mit b^3a steht bereits in der Bornschen Arbeit[1]), es muß ja natürlich schon bei der durch die Gleichung $b = \text{const.}$ charakterisierten Hyperbelbewegung auftreten.

Wir haben bislang die Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, nach Potenzen des Radius a entwickelt. Wir tun dasselbe nun für den „Betrag" der gesamten äußeren Kraft:

$$K = K_0 + aK_1 + a^2K_2 + \cdots.$$

Dabei sind die K_i Funktionen von $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Die Bewegungsgleichungen des Elektrons haben dann folgende Form:

$$\alpha'' = A_1 a + A_2 a^2 + \cdots,$$
$$\beta'' = B_1 a + B_2 a^2 + \cdots.$$

Dabei sind A_i und B_i Funktionen von $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \ldots \alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$. Es sind also zwei simultane Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung. Die Gleichung

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = -1$$

hat dabei nur den Charakter einer Anfangsbedingung.

Wir beschäftigen uns nicht mit der allgemeinen Lösung dieses Gleichungssystems, sondern beschränken uns auf solche Lösungen, die sich nach Potenzen von a entwickeln lassen: das legt ja die Natur unseres Ansatzes außerordentlich nahe. Freilich wäre es möglich, daß alle Lösungen bei $a = 0$ analytisch wären, daß unser Verfahren also alle Lösungen lieferte: wir lassen das aber unerörtert. Wir setzen daher

$$\alpha = \alpha_0 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + \cdots,$$
$$\beta = \beta_0 + a\beta_1 + a^2\beta_2 + \cdots$$

und gehen damit in die beiden Gleichungen ein. Dann sieht man ohne Mühe, daß alle α_i und β_i bis auf je zwei Integrationskonstanten eindeutig festgelegt sind, und daß diese wieder gerade durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit eindeutig bestimmt werden. *Bei Beschränkung auf die in a analytischen Lösungen ist also die*

1) Die Formel (165) der Bornschen Arbeit enthält einen Rechenfehler.

Bewegung des Elektrons durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit vollständig bestimmt.

Die Physiker[1]) verwerfen bei der Behandlung der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung für die Schwingung des Elektrons eine Fundamentallösung als unphysikalisch und erhalten dadurch dasselbe Ergebnis. Unsere Betrachtung macht dieses Verfahren vom mathematischen Standpunkt aus verständlich.

---

1) Vgl. z. B. M. Planck, Vorl. üb. d. Theorie d. Wärmestrahlung, Leipzig 1906, S. 110.

Ueber elektrische und magnetische Doppelbrechung.

III.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 26. Oktober 1912.

1) In den früheren Mitteilungen[1]) über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand ist die von Herrn Langevin ausgearbeitete Vorstellung der Orientierung der Moleküle im elektrischen oder magnetischen Feld für sich allein verfolgt worden. In der nachstehenden Notiz soll nun untersucht werden, wie die bezüglichen Resultate sich modifizieren, wenn neben der Orientierung der Moleküle auch die direkte Wirkung des Feldes auf die Elektronen in Rechnung gesetzt wird, die ja in Wahrheit immer vorhanden ist. Im Falle der linearen Doppelbrechung, die normal zu den Kraftlinien beobachtet wird, ist, wie Herr Langevin gezeigt hat, der Effekt dieser letzteren Einwirkung im durchsichtigen Spektralgebiet klein neben dem der molekularen Orientierung; es wird also in erster Linie zu untersuchen sein, wie sich das Verhältnis bei der zirkularen Doppelbrechung gestaltet, die parallel zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes eintritt, und was etwa nächst den Absorptionslinien gilt.

Die Betrachtung knüpft durchaus an die Entwicklungen des ersten Teiles (I) an; nur wird, um Uebereinstimmung mit meinen Untersuchungen über den Zeeman-Effekt herzustellen, jetzt anstelle der X-Axe (wie Herr Langevin tut) die Z-Axe in die Feldrichtung gelegt werden. Bezeichnet man dann die wirkende

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1912, p. 577 und 832.

äußere Feldstärke mit H (wobei die Selbstinfluenz des Körpers vernachlässigt werden darf) und die Komponente erster Art eines Tensortripels t_1, t_2, t_3 nach der Z-Axe mit t_{33}, so ist das auf das Molekül wirkende Potential nach Formel I (2)

$$w = -\tfrac{1}{2} H^2 \mu_{33}, \tag{1}$$

wobei μ_1, μ_2, μ_3 die magnetischen Momente des Moleküles nach seinen Symmetrieaxen X_0, Y_0, Z_0 bezeichnen, welche durch das Feld Eins erregt werden.

Die Anzahl der Moleküle, die eine durch ϑ, φ, ψ charakterisierte Orientierung ihrer Hauptaxen gegen die festen Axen besitzen, ist nach Formel I (5)

$$dN = \frac{C}{2\pi}\left(1 - \frac{w}{mrT}\right) \sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi\, d\psi, \tag{2}$$

d. h., wenn

$$\frac{H^2}{2mrT} = R_1^2 \tag{3}$$

gesetzt wird,

$$dN = \frac{C}{2\pi}(1 + R_1^2 \mu_{33}) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi; \tag{4}$$

dabei bestimmt sich C aus der Gesamtzahl N der Moleküle gemäß

$$N = 4\pi C(1 + R_1^2 \mu), \text{ wo } \mu = \tfrac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3). \tag{5}$$

2) Die Bewegungsgleichungen eines Elektrons mit den Elongationen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ im magnetischen Felde folgen aus den Formeln I (7) durch Zufügung der Glieder

$$-\frac{eH}{c}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}, \quad +\frac{eH}{c}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \; 0$$

auf der linken Seite. Bei Schwingungen mit der Frequenz ν und bei Benutzung von komplexen Lösungen ergibt sich dann, wenn man (in Rücksicht auf $e < 0$) abkürzt

$$-\frac{e\nu H}{c} = R, \tag{6}$$

die Form

$$\begin{aligned} p_{11}\mathfrak{x} + (p_{12} + iR)\mathfrak{y} + p_{13}\mathfrak{z} &= eX', \\ (p_{21} - iR)\mathfrak{x} + p_{22}\mathfrak{y} + p_{23}\mathfrak{z} &= eY', \\ p_{31}\mathfrak{x} + p_{32}\mathfrak{y} + p_{33}\mathfrak{z} &= eZ'; \end{aligned} \tag{7}$$

dabei sind die

$$p_{ij} = p_{ji} = k_{ij} + ih_{ij}\nu - m\nu^2 \tag{8}$$

Tensorkomponenten mit den Konstituenten p_1, p_2, p_3 parallel den Symmetrieaxen X_0, Y_0, Z_0 des Moleküls, und

(9) $$X' = X + \frac{4\pi}{3} \sum e\mathfrak{x}, \ldots$$

stellen die faktisch wirksamen elektrischen Komponenten durch die in der Welle schwingenden X, Y, Z dar. In welchen Fällen die Summen $\sum$ dabei fortbleiben können, ist in der I. Mitteilung erwähnt.

Löst man die Gleichungen (7) nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf, bezeichnet, wie im I. Teile, mit q_{hk} die Koeffizienten der inversen Formeln bei $R = 0$ und setzt überdies

(10) $$\frac{p_{ij}}{P} = s_{ji} = s_{ij},$$

unter P die Determinante aus den p_{ij} verstanden, so resultiert

(11) $$\begin{aligned} (1 - R^2 s_{33})\,\mathfrak{x} &= e\,[q_{11} X' + (q_{12} + iRs_{33})\,Y' + (q_{13} - iRs_{32})\,Z'], \\ (1 - R^2 s_{33})\,\mathfrak{y} &= e\,[(q_{21} - iRs_{33})\,X' + q_{22}\,Y' + (q_{23} + iRs_{31})\,Z'], \\ (1 - R^2 s_{33})\,\mathfrak{z} &= e\,[(q_{31} + iRs_{23})\,X' + (q_{32} - iRs_{13})\,Y' + (q_{33} - R^2/P)Z']. \end{aligned}$$

Für die Anwendungen sind die Ausdrücke

$$\frac{4\pi}{3} \sum e\mathfrak{x} = \frac{4\pi}{3} \sum \frac{e^2}{1 - R^2 s_{33}} [q_{11} X' + (q_{12} + iRs_{33})\,Y' + (q_{13} - iRs_{32})\,Z'], \ldots$$

zu bilden, unter Rücksicht auf das aus der statistischen Mechanik gewonnene Verteilungsgesetz (ε) und (s) für die Orientierung der Moleküle.

Kürzt man die Integration über die Kugelfläche ab gemäß

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varphi = \int d\omega,$$

so erhält man bis auf erste Ordnung bezüglich R_1^2

(12) $$\frac{4\pi}{3} \sum e^2 \mathfrak{x} = \frac{Ne^2}{6\pi} \int\int \frac{1 + R_1^2 (\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}}\, d\omega\, d\psi \cdot [q_{11} X' + (q_{12} + iRs_{33})\,Y' + (q_{13} - iRs_{32})\,Z'],$$

u. s. f. Die Summen mit q_{hk}, s_{hk} bei $h \gtrless k$ geben nach Symmetrie $= 0$; die mit q_{11} und q_{22} werden einander gleich.

Somit bleibt nur

$$\frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{x} = X'F + iRY'G,$$

(13)
$$\frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{y} = -iRX'G + Y'F,$$

$$\frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{z} = Z'K,$$

wobei

(14)
$$\begin{cases} F = \dfrac{Ne^2}{6\pi}\displaystyle\iint \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} \tfrac{1}{2}(q_{11} + q_{22})\, d\omega\, d\psi, \\ G = \dfrac{Ne^2}{6\pi}\displaystyle\iint \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} s_{33}\, d\omega\, d\psi, \\ K = \dfrac{Ne^2}{6\pi}\displaystyle\iint \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} (q_{33} - R^2/P)\, d\omega\, d\psi. \end{cases}$$

In dem Ausdruck für F ist der Symmetrie halber $\frac{1}{2}(q_{11} + q_{22})$ statt q_{11} oder q_{22} allein, — die, wie gesagt, das Gleiche ergeben —, eingesetzt. Dies hat den Zweck, daß nun in allen drei Integralen F, G, K nur die Richtungskosinus α_3, β_3, γ_3 auftreten, denn es ist

$$q_{11} + q_{22} = q_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \cdots = q_1(1 - \alpha_3^2) + \cdots,$$
$$q_{33} = q_1\alpha_3^2 + \cdots \text{ u. s. f.}$$

Da nun

$$\alpha_3 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \beta_3 = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta$$

ist, wobei ϑ und φ in bekannter Weise die Orientierung der festen Z-Axe gegen die Molekularaxen X_0, Y_0, Z_0 bestimmen, also sämtliche Kosinus ψ nicht enthalten, so kann man das Integral nach ψ von 0 bis 2π ausführen und erhält

(15)
$$F = \frac{1}{3}Ne^2\int \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} \tfrac{1}{2}(q_{11} + q_{22})\, d\omega,$$
$$G = \frac{1}{3}Ne^2\int \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} s_{33}\, d\omega,$$
$$K = \frac{1}{3}Ne^2\int \frac{1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu)}{1 - R^2 s_{33}} (q_{33} - R^2/P)\, d\omega.$$

Das noch übrige Integral über $d\omega$ drückt aus, daß alle möglichen Orientierungen des Moleküls gegen die feste Z-Axe zusammengefaßt werden sollen.

3) Für eine parallel zu Z fortlaufende ebene homogene Welle ist nach dem I. Teil

(16)
$$4\pi\sum e\mathfrak{x} = (\mathfrak{n}^2 - 1)X, \quad 4\pi\sum e\mathfrak{y} = (\mathfrak{n}^2 - 1)Y,$$
$$4\pi\sum e\mathfrak{z} = -Z$$

oder wegen (9) auch, bei

$$\frac{\mathfrak{n}^2-1}{\mathfrak{n}^2+2}=\mathfrak{m},$$

$$(17)\qquad \frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{x}=\mathfrak{m}X',\quad \frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{y}=\mathfrak{m}Y',\quad \frac{4\pi}{3}\sum e\mathfrak{z}=-\frac{1}{2}Z'.$$

Ueber gelegentlich erlaubtes Vertauschen von $\mathfrak{m}$ mit $\frac{1}{3}(\mathfrak{n}^2-1)$ ist im ersten Teil gesprochen.

Die Kombination von (13) und (17) liefert nun

$$(18)\qquad \begin{aligned} 0 &= (F-\mathfrak{m})\,X'+iRY'G,\\ 0 &= -iRX'G+(F-\mathfrak{m})\,Y'. \qquad Z'=0. \end{aligned}$$

Faßt man die ersten beiden Formeln mit 1 und $\pm i$ zusammen, so gelangt man zu

$$(19)\qquad 0=(X'\pm iY')\,(F\mp RG-\mathfrak{m}).$$

Hieraus folgt in bekannter Weise die Fortpflanzung zweier entgegengesetzt rotierender zirkularer Wellen, für welche resp. ist

$$(20)\qquad \begin{aligned} (X'+iY')_- &= 0; \quad \mathfrak{m}_- = F+RG,\\ (X'-iY')_+ &= 0; \quad \mathfrak{m}_+ = F-RG. \end{aligned}$$

Wir schreiben dafür kurz

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{m}_\pm = F\mp RG = \\ &\tfrac{1}{3}Ne^2\int\frac{1+R_1^2(\mu_{33}-\mu)}{1-R^2 s_{33}}\left(\tfrac{1}{2}(q_{11}+q_{22})\mp Rs_{33}\right)d\omega. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(22)\qquad q_h=1/p_h,\quad s_h=p_h/P,\quad P=p_1\,p_2\,p_3;$$

denn P ist die Determinante aller p_{ij}, und diese ist ein Skalar, kann also bestimmt werden, indem man die Koordinatenaxen $X\,Y\,Z$ in die Hauptaxen $X_0\,Y_0\,Z_0$ legt, d. h. setzt

$$p_{11}=p_1,\quad p_{22}=p_2,\quad p_{33}=p_3,\quad p_{23}=p_{31}=p_{12}=0.$$

Hiernach ergibt sich

$$(23)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{m}_\pm &= \tfrac{1}{3}Ne^2\int\left[1+R_1^2\left((\mu_1-\mu)\,\alpha_3^2+\cdots\right)\right]\\ &\cdot\frac{\tfrac{1}{2}\left(p_2\,p_3(1-\alpha_3^2)+\cdots\right)\mp R\,(p_1\,\alpha_3^2+\cdots)}{p_1\,p_2\,p_3-R^2\,(p_1\,\alpha_3^2+\cdots)}\,d\omega. \end{aligned}$$

Diese Formel ist außerordentlich kompliziert, und die Ausrechnung scheint zu ganz unübersichtlichen Resultaten zu führen. Man kann aber Wesentliches über ihre Aussagen schon in der obigen Form erkennen.

Bei Beseitigung der Feldwirkung, d. h. für $R = 0$, $R_1 = 0$, resultiert

$$\mathfrak{m} = \frac{4\pi}{9} N e^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right), \tag{24}$$

was das Auftreten dreier Absorptionsstreifen in der Nähe von

$$|p_1|_r = 0, \quad |p_2|_r = 0, \quad |p_3|_r = 0,$$

d. h. bei

$$m\nu_1^2 = k_1, \quad m\nu_2^2 = k_2, \quad m\nu_3^2 = k_3$$

ausdrückt. Das Feld bewirkt eine Veränderung dieser Streifen. Man kann von derselben leicht eine Anschauung gewinnen in dem Falle, daß die Streifen ursprünglich durch absorptionsfreie Bereiche getrennt waren, und man nur Feldstärken betrachtet, wo jeder Streifen *seiner* Urlage näher bleibt, als derjenigen eines andern Streifens.

In der Umgebung des Streifens (1) ist dann $|p_1|$ klein neben $|p_2|$ und $|p_3|$, auch p_2 und p_3 als reell und konstant zu betrachten. Wir schreiben nun

$$\mathfrak{m}_\pm = \tfrac{1}{3} N e^2 \int (1 + R_1^2((\mu_1 - \mu)\,\alpha_3^2 + \cdots)) \tag{25}$$
$$\frac{(p_2 p_3 (1 - \alpha_3^2) + \cdots)/2 p_2 p_3 \mp R\,(p_1\,\alpha_3^2 + \cdots)/p_2 p_3}{p_1 - R^2 (p_1\,\alpha_3^2 + \cdots)/p_2 p_3}\, d\omega$$

und können dann jedes Element des Integrals als Darstellung der Wirkung eines unendlich schwachen (elementaren) durch α_3, β_3, γ_3 charakterisierten Absorptionsstreifens deuten, der nahe da liegt, wo der reelle Teil des Nenners $\mathfrak{N}$, d. h.

$$|\mathfrak{N}|_r = |p_1|_r \left(1 - \frac{R^2 \alpha_3^2}{p_2 p_3}\right) - R^2 \left(\frac{\beta_3^2}{p_3} + \frac{\gamma_3^2}{p_2}\right) \tag{26}$$

verschwindet. Da nun

$$|p_1|_r = m(\nu_1^2 - \nu^2), \quad p_2 = m(\nu_2^2 - \nu_1^2), \quad p_3 = m(\nu_3^2 - \nu_1^2), \tag{27}$$

so bestimmt $|\mathfrak{N}|_r = 0$, d. h.

$$m(\nu_1^2 - \nu^2)\left(1 - \frac{R^2 \alpha_3^2}{p_2 p_3}\right) = R^2 \left(\frac{\beta_3^2}{p_3} + \frac{\gamma_3^2}{p_2}\right) \tag{28}$$

eine *Verschiebung* des Absorptionsstreifens (1), die für die $\pm$ Wellen die gleiche ist und angenähert dem Quadrat der Feldstärke proportional verläuft.

Diese Verschiebung ist im allgemeinen für jeden Elementarstreifen, d. h. für jedes System α_3, β_3, γ_3 verschieden. Bezüglich extremaler Werte kommen die zwei Fälle in Betracht, daß p_2 und p_3 *gleiches* oder *entgegengesetztes* Vorzeichen haben.

Im 1. Falle ($p_2 p_3 > 0$) sei $p_2 < p_3$; dann sind extreme Fälle:

$$(29)\qquad \begin{aligned} \alpha_3 &= \pm 1, \quad \text{wo} \quad \nu^2 = \nu_1^2 \\ \gamma_3 &= \pm 1, \quad \text{wo} \quad m(\nu_1^2 - \nu^2) = R^2/p_2. \end{aligned}$$

Hier erfüllen also die Elementarstreifen alle im Felde den Raum

$$\nu_1^2 \lesseqgtr \nu^2 \lesseqgtr \nu_1''^2 = \nu_1^2 - \frac{R^2}{m p_2},$$

je nachdem $p_2 \lesseqgtr 0$.

Im zweiten Falle ($p_2 p_3 < 0$) sind die extremen Fälle:

$$(30)\qquad \begin{aligned} \beta_3 &= \pm 1, \quad \text{wo} \quad m(\nu_1^2 - \nu^2) = \frac{R^2}{p_3}, \\ \gamma_3 &= \pm 1, \quad \text{wo} \quad m(\nu_1^2 - \nu) = \frac{R^2}{p_2}; \end{aligned}$$

hier erfüllen die Elementarstreifen im Felde das Bereich

$$\nu_1^2 - \frac{R^2}{m p_3} = \nu_1'''^2 \lesseqgtr \nu^2 \lesseqgtr \nu_1''^2 = \nu_1^2 - \frac{R^2}{m p_2},$$

je nachdem $p_3 \gtreqless 0$, $p_2 \lesseqgtr 0$.

Es ist von Wichtigkeit, eine Vorstellung von der Größenordnung der im Vorstehenden abgeleiteten Veränderung der Absorptionsstreifen zu erhalten. Wir knüpfen dazu an die zu (29) gefügte Ungleichung an, die wir schreiben

$$\nu_1 \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \nu_1 - \frac{R^2}{2m^2 \nu_1 (\nu_2^2 - \nu_1^2)};$$

dabei ist $R = -\frac{e \nu H}{c}$, so daß wir erhalten, indem wir $\nu_2 + \nu_1$ mit $2\nu_1$ vertauschen,

$$\nu_1 \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \nu_1 - \frac{e^2 H^2}{4 m^2 c^2 (\nu_2 - \nu_1)}.$$

Nun ist die Verschiebung μ_0 beim normalen Zeeman-Effekt eines Körpers mit isotropen Molekülen gegeben durch

$$\mu_0 = \left| \frac{eH}{2mc} \right|.$$

Demgemäß lautet unsere Ungleichung

$$\nu_1 \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \nu_1 - \frac{\mu_0^2}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Die **Ausbreitung** der Absorptionslinien, auf welche die Theorie der äolotropen Moleküle führt, ist also, falls nicht ν_2 sehr nahe bei ν_1 liegt, ganz beträchtlich kleiner als die Verschiebung in dem normalen Zeemanschen Duplet.

4) Genaueres läßt die Untersuchung der **Stärke** dieser elementaren Absorptionsstreifen erkennen, die in Annäherung durch $d\,|\mathfrak{m}_{\pm}|_i$ gemessen wird, wobei das Differential das Element des Integrals für $\mathfrak{m}_{\pm}$ bezeichnet. Wir wollen für diese Diskussion den eine geringere Rolle spielenden reellen Faktor

$$\frac{1}{3}\,Ne^2\left[1 + R_1^2\left((\mu_1 - \mu)\,\alpha_3^2 + \cdots\right)\right] = f \tag{31}$$

setzen und als nur unwesentlich veränderlich betrachten.

Im 1. Falle ($p_2\,p_3 > 0$) liefert

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \pm 1 : d\,|\mathfrak{m}_{\pm}| = \frac{p_2 + p_3 \mp R}{p_2\,p_3 - R^2}\,f d\omega, \\ \gamma_3 &= \pm 1 : d\,|\mathfrak{m}_{\pm}| = \frac{p_2 + p_1 \mp R}{p_1\,p_2 - R_2}\,f d\omega. \end{aligned} \tag{32}$$

Der erste Ausdruck ist reell, gibt also die Absorptionsstärke **Null**; der zweite, in dem man im Zähler p_1 neben p_2 vernachlässigen kann, ergibt an der Stelle des elementaren Absorptionsstreifens, wo $|p_1|_r = R^2/p_2$ ist,

$$-d\,|\mathfrak{m}_{\pm}|_i = \frac{1 \mp R^2/p_2}{h_1\,\nu_1}\,f d\omega. \tag{33}$$

Diese Stärke ist für die beiden Wellen verschieden, und zwar kann je nach dem Vorzeichen von p_2 die + oder die − Welle die größere Absorptionsstärke haben.

Der gesamte Habitus der Absorptionslinie im Felde wird also in beiden Wellen der einer Verschiebung sein mit nach der ursprünglichen Position verwaschenem Rande.

Im zweiten Falle ($p_2\,p_3 < 0$) gibt die analoge Betrachtung **eine Art enger Zerlegung in nach innen verwaschene Komponenten**, insofern die elementaren Absorptionslinien an der Stelle der ursprünglichen Linie die Stärke Null, nach den Grenzlagen hin, die durch (30) gegeben wird, aber wachsende Stärken haben, die bis zu den Werten

$$-d\,|\mathfrak{m}_{\pm}|_i = \frac{1 \mp R/p_2}{h_1\,\nu_1}\,f d\omega, \quad \text{resp.} \quad \frac{1 \mp R/p_3}{h_1\,\nu_1}\,f d\omega \tag{34}$$

gehen. Wegen der entgegengesetzten Vorzeichen von p_2 und p_3 hat dabei die eine Welle am + Rande, die andere am − Rande die größere Stärke.

Beide Fälle sind von dem des gewöhnlichen longitudinalen Zeeman-Effektes durchaus verschieden.

5) Die magnetische Drehung der Polarisationsebene wird in Annäherung durch $|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r$ gemessen. Nun ist nach (25) und (31)

$$(35) \qquad \mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+ = 2R \int \frac{(p_1 \alpha_3^2 + \cdots)}{p_1 p_2 p_3 - R^2 (p_1 \alpha_3^2 + \cdots)} f d\omega,$$

wobei wir f zunächst wieder als angenähert konstant behandeln.

Wir wollen, wie oben, mit der Betrachtung in der Nähe der Absorptionslinie (1), aber doch in dem merklich durchsichtigen Bereich bleiben; es ist dann außer p_2 und p_3 auch p_1 reell; daneben ist p_1 klein und sind wieder p_2 und p_3 merklich konstant. Wir schreiben

$$(36) \quad |\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r = 2R \int \frac{\frac{p_1 \alpha_3^2}{p_2 p_3} + \frac{\beta_3^2}{p_3} + \frac{\gamma_3^2}{p_2}}{p_1 \left(1 - \frac{R^2 \alpha_3^2}{p_2 p_3}\right) - R^2 \left(\frac{\beta_3^2}{p_3} + \frac{\gamma_3^2}{p_2}\right)} f d\omega.$$

Betrachten wir wieder die elementaren Absorptionslinien, so gibt jede einzelne einen Anteil $d|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r$ zur Drehung. Der Nenner hat zu beiden Seiten der neuen Lage der Absorptionslinie entgegengesetztes Vorzeichen, die elementaren Streifen geben also, so weit im Zähler das Glied mit p_1 vernachlässigt werden kann — d. h. mit Ausnahme der nahe bei $\alpha_3 = \pm 1$ liegenden Werte —, zu beiden Seiten entgegengesetzte Drehungen.

Der hierbei ausgeschlossene Fall wird beleuchtet durch Betrachtung des Wertes des Elementes für $\alpha_3 = \pm 1$; derselbe lautet

$$(37) \qquad d|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r = \frac{2R f d\omega}{p_2 p_3 - R^2},$$

enthält also p_1 und somit ν gar nicht mehr. Die Elementarstreifen $\alpha_3 = \pm 1$ geben demgemäß in dem betrachteten Bereich überhaupt keine merklich mit ν variable Drehung.

Die beiden Fälle, die oben bez. des Zeeman-Effektes behandelt sind, bieten auch hier ein Interesse.

Im 1. Falle ($p_2 p_3 > 0$, $p_2 < p_3$) ist für $\gamma_3 = \pm 1$

$$(38) \qquad d|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r = \frac{2R f d\omega}{\left(p_1 - \frac{R^2}{p_2}\right) p_2}.$$

Das Vorzeichen von p_2 bestimmt dabei, auf welcher Seite des Elementarstreifens die Drehung positiv ist, wie sich das aus der Form

$$\left(m(\nu_1^2 - \nu^2) - \frac{R^2}{m(\nu_2^2 - \nu_1^2)}\right) m(\nu_2^2 - \nu_1^2)$$
$$= m^2 (\nu_1^{\prime 2} - \nu^2)(\nu_2^2 - \nu_1^2)$$

ergibt, die man dem Nenner des rechtsstehenden Ausdruckes geben kann. ν_1'' bezeichnet dabei die extreme Frequenz, die der Elementarstreifen (1) im Magnetfeld erhält; es ist $\nu_1'' \gtrless \nu_1$, je nachdem $\nu_2 \lessgtr \nu_1$ ist. Bei positivem R (d. h. negativem Elektron) ist dann

$$\text{für } \nu_2 > \nu_1 : d\,|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r \gtrless 0 \quad \text{bei} \quad \nu \lessgtr \nu_1'',$$

$$\text{für } \nu_2 < \nu_1 : d\,|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r \gtrless 0 \quad \text{bei} \quad \nu \gtrless \nu_1''.$$

Aus derartigen Elementarwirkungen hat man sich nun die Gesamtwirkung des Absorptionsstreifens aufzubauen, welcher letztere durch die Formel (23) in ein System von Elementarstreifen in dem Gebiet $\nu_1 \lessgtr \nu \lessgtr \nu_1''$ mit von Null bis zu einem Maximum ansteigender Stärke aufgelöst ist.

Eine einfache geometrische Ueberlegung zeigt, daß am Rande des Streifens auf der Seite von ν_1'' sich die Drehungsanteile aller Elemente mit gleichem Vorzeichen summieren, während sie sich innerhalb des Streifens mit teilweise verschiedenem Vorzeichen und mit abnehmender Stärke summieren. Es wird sonach die Drehung am Rande des Streifens auf der Seite von ν_1 kleiner sein als auf der Seite von ν_1''. Dieser Unterschied wird sich mit wachsender Entfernung vom Streifen in der Weise verändern, daß (mit schnell abnehmender Drehung) sich mehr und mehr in gleichen Entfernungen beiderseits entgegengesetzt gleiche Drehungswerte einstellen.

Im 2. Falle ($p_2 p_3 < 0$) kommt zu der Formel (38) noch für die andere Grenze

$$d\,|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r = \frac{2Rfd\omega}{\left(p_1 - \frac{R^2}{p_3}\right) p_3}, \tag{39}$$

welche die entgegengesetzte Dissymmetrie liefert. Hier wird also die Drehung in der Umgebung von (1) weniger dissymmetrisch verlaufen, ja für $p_2 + p_3 = 0$ den symmetrischen Gang annehmen. —

Auch über die Größenordnung der durch die vorstehenden Entwicklungen bestimmten magnetischen Drehungen wollen wir uns eine Vorstellung bilden. Wir wollen dazu an die Formel (38) anknüpfen und annehmen, alle Elementarstreifen gäben diesen maximalen Anteil an der Drehung. Dann folgt für die wirkliche Differenz $|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r$ die Ungleichung

$$|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+|_r < \frac{8\pi Rf}{\left(p_1 - \frac{R^2}{p_2}\right) p_2}.$$

Für ein durchsichtiges Bereich können wir, indem wir sogleich den Wert $R = -evH/c$ einsetzen und $\nu_1^2 - \frac{R^2}{mp_2} = \nu_1''^2$ setzen, diese Formel schreiben

$$|n_-^2 - n_+^2| < \left| \frac{8\pi N e^3 \nu H}{m^3 c (\nu_1''^2 - \nu^2)(\nu_2^2 - \nu_1^2)} \right|.$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß sich f nur durch ein mit H^2 proportionales Glied von $\frac{1}{3} Ne^2$ unterscheidet.

Die Theorie des normalen Zeeman-Effektes liefert

$$|n_-^2 - n_+^2| = \left| \frac{8\pi N e^3 \nu H}{m^2 c (\nu_0^2 - \nu^2)^2} \right|.$$

Es ist also, wenn nicht die Streifen (1) und (2) sehr nahe bei einander liegen, also $\nu_2^2 - \nu_1^2$ mit $\nu_1''^2 - \nu^2$ vergleichbar ist, in der unmittelbaren Umgebung eines isolierten Absorptionsstreifens die magnetische Drehung viel kleiner als in der gleichen Nähe an einem normal zerlegten Streifen eines Mediums mit gleich viel isotropen Molekülen.

In Bereichen, wo R^2 sehr klein neben dem Produkt zweier p_h ist, d. h. in angemessener Entfernung von allen Absorptionslinien, kann man im Nenner von (35) das zweite Glied vernachlässigen und dann leicht die Integration ausführen und erhält bei Benutzung des Wertes von f aus (31)

$$\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+ = \frac{8\pi N e^2 R}{9 p_1 p_2 p_3} \left[(p_1 + \cdots) + \frac{R_1^2}{10} (p_1 (\mu_1 - \mu) + \cdots) \right].$$

Der Zusammenhang dieses Resultates mit den vorstehend für die nähere Umgebung einer Absorptionslinie gezogenen Folgerungen ist leicht erkennbar. Das in R_1^2 multiplizierte Glied kann dabei unter Umständen noch merklich sein, wo die Vernachlässigung bez. R^2, die zu vorstehender Formel geführt hat, berechtigt ist.

Die im Vorstehenden aus der Annahme äolotroper Moleküle abgeleitete Dissymmetrie der magnetischen Drehung der Polarisationsebene in der Umgebung eines Absorptionsstreifens nimmt ein erhebliches Interesse in Anspruch, weil dergleichen Erscheinungen in einzelnen Fällen beobachtet sind und im Widerspruch mit der Theorie des inversen Zeeman-Effektes zu stehen schienen, so daß bereits nach andern Grundlagen der Theorie gesucht worden ist. Es ist nunmehr aber klar, daß die Möglichkeit vorliegt, die betr. Erscheinungen im Rahmen der alten Theorie zu erklären. Ich komme auf Einzelnes am Schluß noch zurück.

6) Im Vorstehenden sind die drei ursprünglichen Absorptionslinien völlig getrennt angenommen. Ein besonderes Interesse

bietet aber auch der Fall, daß zwei von ihnen völlig zusammenfallen, die Symmetrie der Moleküle nämlich den Charakter eines Rotationsellipsoides hat.

Ist $p_2 = p_3$, fallen also die Streifen (2) und (3) zusammen, so bleiben für die Umgebung des einfachen Streifens (1) die früheren Formeln für den 1. Fall ohne weiteres verwendbar. Anders verhält sich der doppelte Streifen. Zu seiner Betrachtung schreiben wir (23)

$$(40)\quad \mathfrak{m}_\pm = \int \frac{\frac{1}{2} p_2 \left((1+\alpha_3^2) + \frac{p_2}{p_1}(1-\alpha_3^2)\right) \mp R\left(\alpha_3^2 + \frac{p_2}{p_1}(1-\alpha_3^2)\right)}{p_2^2 - \frac{p_2}{p_1} R^2 (1-\alpha_3^2) - R^2 \alpha_3^2} f d\omega,$$

wobei jetzt $f = \frac{1}{3} N e^2 [1 + R_1^2 (\mu_1 - \mu)\, \alpha_3^2 + (\mu_2 - \mu)\,(1-\alpha_3^2))]$.

Da hier $d\omega = 2\pi d\alpha_3$ gesetzt werden kann, ist das Integral ohne Schwierigheit streng zu berechnen. Das Resultat ist aber immer noch derartig kompliziert — selbst wenn von der Veränderlichkeit von f abgesehen wird —, daß es m. E. vorteilhafter ist, die bisherige Methode der Diskussion beizubehalten.

In der Umgebung des (doppelten) Streifens (2) betrachten wir nunmehr p_1 als groß gegen $|p_2|$, dabei als reell und merklich konstant.

Die Bewegung des Streifens erschließen wir wieder aus dem Verhalten des reellen Teiles des Nenners N, den wir jetzt schreiben

$$(41)\qquad N = \left(p_2 - \frac{R^2}{2p_1}(1-\alpha_3^2)\right)^2 - R^2 Q^2,$$

wobei

$$Q^2 = \alpha_3^2 + \frac{R^2}{4p_1^2}(1-\alpha_3^2)^2.$$

Dieser Nenner läßt sich in zwei Faktoren, der Quotient in $d\mathfrak{m}_\pm$ also in Partialbrüche zerlegen mit den Nennern

$$p_2 - \frac{R^2}{2p_1}(1-\alpha_3^2) \pm RQ.$$

Daraus folgt, daß jeder Elementarstreifen durch das Magnetfeld in zwei Komponenten zerlegt wird, die für die ± Wellen dieselbe Lage haben. Die Zerlegung ist um so näher symmetrisch und proportional zum Felde, je größer p_1 ist, je weiter also der einfache Streifen (1) vom doppelten (2) liegt, außerdem je größer α_3^2 ist.

Wir wollen nur den Grenzfall verfolgen, wo die mit p_1 dividierten Glieder vernachlässigt werden können, dann ist

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
d\mathfrak{m}_{\pm} &= \frac{\frac{1}{2}p_2(1+\alpha_3^2) \mp R\alpha_3^2}{p_1^2 - R^2\alpha_3^2} f d\omega \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1\pm\alpha_3)^2}{p_2 + R\alpha_3} + \frac{(1\mp\alpha_3)^2}{p_2 - R\alpha_3}\right) f d\omega.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt, daß die Komponenten der Elementarstreifen in den beiden Wellen spiegelbildlich entsprechende Intensitäten aufweisen; ist die + Komponente bei der einen die stärkere, so bei der anderen die schwächere.

Die Zerlegung und die Intensitätsdifferenz wechselt mit α_3; beide nehmen mit α_3 ab. Der maximale Wert ist gegeben durch $\alpha_3 = \pm 1$, wo dann

$$-R < m(\nu_1^2 - \nu^2) < +R$$

ist. Zwischen diesen Grenzen liegen die Komponenten der anderen Elementarstreifen. Auf sehr kleine α_3, besonders auf den Fall $\alpha_3 = 0$ ist indessen die vorstehende Betrachtung nicht anwendbar. Für $\alpha_3 = 0$ wird das Element des Integrales (40), falls p_2/p_1 neben Eins fortbleibt,

$$
(43)\qquad d\mathfrak{m}_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \mp \frac{R}{p_1}}{p_2 - \frac{R^2}{p_1}} f d\omega,
$$

was eine einfache, schwache Verschiebung des bez. Elementarstreifens mit für beide Wellen (wenig) verschiedener Stärke ausdrückt.

Das Verhalten des Gesamtstreifens wird also eine dissymmetrische Verbreiterung sein, die in beiden Wellen sich etwa spiegelbildlich entspricht und so eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Zeemanschen Duplet besitzt. —

Für den Anteil des einzelnen Elementarstreifens an der Drehung der Polarisationsebene ist maßgebend der reelle Teil von

$$
(44)\qquad d(\mathfrak{m}_{-} - \mathfrak{m}_{+}) = \frac{2R\left(\alpha_3^2 + \frac{p_2}{p_1}(1-\alpha_3^2)\right)}{p_2^2 - \frac{p_2}{p_1}R^2(1-\alpha_3^2) - R^2\alpha_3^2} f d\omega.
$$

In einigem Abstand von dem Streifen (1) ist der ganze rechts stehende Ausdruck als reell zu betrachten. Ist wieder p_2/p_1 klein, so ergibt sich ein Verhalten der Drehung, das demjenigen bei dem normalen Zeemanschen Duplet durchaus analog ist, und Symmetrie inbezug auf die ursprüngliche Lage des Streifens (2) zeigt. Da die elementare Drehung bei kleinem p_2/p_1 mit abnehmendem α_3 selbst schnell abnimmt, so wird auch das ganze System von Ele-

mentarstreifen einen ähnlichen Habitus der Drehung bewirken. In der Umgebung des Streifens (2) wird die Drehung mehr oder weniger symmetrisch verlaufen.

7) Im Vorstehenden ist die Langevinsche Hypothese nur zum Teil benutzt. Es sind zwar die Moleküle als äolotrop betrachtet, aber es ist ihre Tendenz zur Orientierung im Magnetfeld bei der Diskussion außer Betracht geblieben. Diese Tendenz gewinnt Ausdruck in dem variabeln Teil von

$$f = \tfrac{1}{3} N e^2 \left[1 + R_1^2 \left((\mu_1 - \mu)\, \alpha_3^2 + \cdots\right)\right].$$

Da dieser neben Eins steht und in einen im allgemeinen sehr kleinen Faktor multipliziert ist, so wird er nur bei Beobachtungen, die einen ziemlichen Grad von Genauigkeit besitzen, in Betracht kommen. Solche sind die über das Verhalten der Absorptionslinien aber nicht. Einzig dürften Messungen über die magnetische Drehung der Polarisationsebene in durchsichtigen Spektralbereichen imstande sein, die in R_1^2 multiplizierten Glieder zur Geltung zu bringen.

Wie das im Nenner des Ausdruckes (35) für $\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_+$ auftretende R^2 drückt das R_1^2 eine Abweichung der Drehung von der Proportionalität mit der Feldstärke H aus, das Zukommen eines mit H^2 proportionalen Gliedes. Beide Terme unterscheiden sich in ihrem Charakter dadurch, daß R nicht von der Temperatur abhängt, R_1^2 aber die absolute Temperatur im Nenner enthält. Der Nachweis einer Abweichung der Drehung von der Proportionalität, die mit abnehmender Temperatur beträchtlich zunimmt, wird demgemäß, wo sie auftritt, auf die bezeichnete Wirkung zu deuten sein. Wir kommen hierauf unten zurück.

8) Für eine längs der X-Axe, d. h. normal zu den Kraftlinien fortschreitende Welle gilt

$$(45) \qquad 4\pi \sum e\mathfrak{x} = -X, \quad 4\pi \sum e\mathfrak{y} = (\mathfrak{n}^2 - 1)\, Y, \quad 4\pi \sum e\mathfrak{z} = (\mathfrak{n}^2 - 1)\, Z,$$

also bei $\dfrac{\mathfrak{n}^2 - 1}{\mathfrak{n}^2 + 2} = \mathfrak{m}$ wegen (9)

$$(46) \qquad \frac{4\pi}{3} \sum e\mathfrak{x} = -\frac{1}{2} X', \quad \frac{4\pi}{3} \sum e\mathfrak{y} = \mathfrak{m} Y', \quad \frac{4\pi}{3} \sum e\mathfrak{z} = \mathfrak{m} Z'.$$

Die Kombination mit (13) ergibt

$$
\begin{aligned}
0 &= X'(F+\tfrac{1}{2}) + iRY'G, \\
0 &= -iRX'G + Y'(F-\mathfrak{m}), \\
0 &= Z'(K-\mathfrak{m}).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Die letzte Formel liefert für die parallel zu Z liegende p-Schwingung

$$\mathfrak{m}_p = K; \tag{48}$$

die beiden vorhergehenden ergeben bei Zusammenfassung mit den Faktoren 1 und $\pm i$ für die normal zum Feld liegende s-Schwingung

$$(X' \pm iY')[F \mp GR - \mathfrak{m}_s] = -X'(\mathfrak{m}_s + \tfrac{1}{2}) \tag{49}$$

oder wegen des Wertes von $\mathfrak{m}_\pm$ (nach (20)

$$(X' \pm iY')(\mathfrak{m}_\pm - \mathfrak{m}_s) = -X'(\mathfrak{m}_s + \tfrac{1}{2}). \tag{50}$$

Dies kann man auch schreiben

$$X'(\mathfrak{m}_\pm + \tfrac{1}{2}) = \mp iY'(\mathfrak{m}_\pm - \mathfrak{m}_s),$$

woraus folgt

$$\frac{\mathfrak{m}_+ + \frac{1}{2}}{\mathfrak{m}_- + \frac{1}{2}} = -\frac{\mathfrak{m}_+ - \mathfrak{m}_s}{\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_s} \tag{51}$$

oder

$$\mathfrak{m}_s = \frac{\mathfrak{m}_-(\mathfrak{m}_+ + \frac{1}{2}) + \mathfrak{m}_+(\mathfrak{m}_- + \frac{1}{2})}{\mathfrak{m}_+ + \mathfrak{m}_- + 1}. \tag{52}$$

Dies ist der strenge Ausdruck für $\mathfrak{m}_s$ durch $\mathfrak{m}_+$ und $\mathfrak{m}_-$. Ist $|\mathfrak{m}_+|$ und $|\mathfrak{m}_-|$ klein gegen $\frac{1}{2}$ oder $|\mathfrak{m}_+ - \mathfrak{m}_s|$ und $|\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_s|$ klein gegen $|\mathfrak{m}_s + \frac{1}{2}|$, so hat man sehr einfach die Annäherung

$$\frac{\mathfrak{m}_+ - \mathfrak{m}_s}{\mathfrak{m}_- - \mathfrak{m}_s} (=) -1, \text{ d. h. } \mathfrak{m}_s (=) \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}_+ + \mathfrak{m}_-). \tag{53}$$

In diesem Falle erscheinen die in $\mathfrak{m}_s$ ausgedrückten Eigenschaften der s-Welle einfach als Superpositionen derjenigen der $\pm$ Wellen; insbesondere gilt dies von den Absorptionsstreifen. Die Werte von $\mathfrak{m}_\pm$ aus (20) liefern zugleich sehr einfach

$$\mathfrak{m}_s (=) F. \tag{54}$$

Streng gibt (52)

$$\mathfrak{m}_s = F - \frac{2R^2G^2}{2F+1}, \tag{55}$$

wodurch die Abweichungen angedeutet sind, die im allgemeinen stattfinden.

Die Formel (48) diskutiert sich ähnlich wie (23) und ergibt eine verwaschene Verbreiterung der Streifen in der p-Welle mit maximaler Stärke aus ursprünglicher Art.

Die transversale magnetische Doppelbrechung und der transversale Dichroismus bestimmen sich durch

$$(56) \qquad \mathfrak{m}_s - \mathfrak{m}_p = F - K - \frac{2R^2 G^2}{2F+1}.$$

Geht man nur bis zu Gliedern von der Ordnung des Quadrates der Feldstärke und beschränkt sich auf das durchsichtige Spektralbereich, so kann man schreiben

$$(57) \qquad \begin{aligned} F &= \tfrac{1}{3} Ne^2 \int (1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu) + R^2 s_{33}) \tfrac{1}{2}(q_{11} + q_{22})\, d\omega, \\ K &= \tfrac{1}{3} Ne^2 \int (1 + R_1^2(\mu_{33} - \mu) + R^2 s_{33})(q_{33} - R^2/P)\, d\omega. \end{aligned}$$

In der Differenz heben sich die ersten Glieder der Integrale hinweg, sodaß das Resultat mit H^2 proportional wird. Im letzten Glied von (56) ist sogar zu setzen

$$(58) \qquad \begin{aligned} G &= \frac{1}{3} Ne^2 \int s_{33}\, d\omega = \frac{4\pi}{9} Ne^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p_1 p_2 p_3}, \\ F &= \frac{1}{6} Ne^2 \int (q_{11} + q_{22})\, d\omega = \frac{4\pi}{9} Ne^2 \left(\frac{p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2}{p_1 p_2 p_3}\right). \end{aligned}$$

Die mit R^2 proportionalen Glieder drücken die Wirkung des Zeeman-Effektes aus; sie sind natürlich von denjenigen verschieden, die aus der Theorie der isotropen Moleküle früher von mir gefolgert sind, stimmen aber der Größenordnung nach überein, so daß bei Medien mit äolotropen Molekülen zumeist der Einfluß der Molekularorientierung denjenigen des Zeeman-Effektes übertreffen wird.

Schlussfolgerungen.

8) Nach dem im Vorstehenden Entwickelten wird man eine direkte Feststellung der Existenz äolotroper Moleküle am einfachsten bei solchen Medien ausführen können, die hinreichend scharfe und isolierte Absorptionslinien besitzen, um den Zeeman-Effekt zu zeigen. Bei Medien mit äolotropen Molekülen kommt keine glatte mit dem Feld proportionale Verschiebung resp. Zerlegung dieser Linien zustande, sondern eine Verbreiterung proportional dem Quadrat der Feldstärke, die in verschiedenen Typen auftreten kann. Allerdings kann diese Verbreiterung außerordentlich gering sein, sodaß der Streifen als u n v e r ä n d e r t erscheint.

Es ist bemerkenswert, daß die zahlreichen untersuchten Metalldämpfe derartige Zeeman-Effekte im allgemeinen nicht geboten haben, sodaß also äolotrope Moleküle in regelloser Anordnung dort nicht vorzukommen scheinen.

Ein zweites Hilfsmittel zur Feststellung äolotroper Moleküle kann die magnetische Drehung der Polarisationsebene in der Um-

gebung von Absorptionsstreifen bieten, wo dieselbe nach der Theorie (im Gegensatz zu dem Resultat bei isotropen Molekülen) einen dissymetrischen Charakter haben kann. Bei Dämpfen ist die Drehung bisher nur in wenigen Fällen untersucht worden, und in diesen ist fast durchgehends der symmetrische Verlauf bestätigt worden.

Eine höchst interessante Ausnahme scheint nach den wichtigen Beobachtungen von Herrn Wood[1]) der dichte und relativ kühle Natriumdampf zu bilden, der entsteht, wenn metallisches Natrium im Vakuum erhitzt wird. Hier kommen magnetische Drehungen der Polarisationsebene vor, die unsymmetrisch zur Absorptionslinie liegen, meist auf der einen Seite sehr klein sind gegenüber dem Betrag auf der anderen Seite. Und zwar liegt die stärkere Drehung bald auf der einen, bald auf der anderen Seite der Linie und ist bald positiv, bald negativ.

Herr Wood vergleicht die bez. Erscheinung mit derjenigen, die er an der Quecksilberlinie $\lambda = 2536$ *A.E.* beobachtet hat, an der er zugleich einen unsymmetrischen Verlauf der Absorption und der anomalen Dispersion feststellen konnte, und deutet im übrigen die verschiedenen Vorzeichen der Drehung auf die Wirkung negativer und positiver Elektronen oder Elementarmassen.

Die vorstehenden theoretischen Entwicklungen legen eine andere Deutung nahe, die voraussetzt, daß bei der niedrigen Temperatur des *Na*-Dampfes komplexe Moleküle vorkommen, die äolotrope Felder für die Elektronen liefern. Solche würden z. B. schon durch Aneinanderhaften von zwei Kugeln positiver Ladungen mit je einem eingeschlossenen Elektron entstehen, da für Emission und Absorption nur die Bewegung des Schwerpunktes der beiden Elektronen maßgebend ist. Systeme von mehr Kugeln würden zu anderen Aeolotropien führen. Eine Orientierung dieser Gebilde durch das Magnetfeld braucht in erster Annäherung nicht in Rechnung gesetzt zu werden.

Bei äolotropen Molekülen kommen nun nach § 5 im Magnetfelde unsymmetrische Ausbreitungen von Absorptionslinien vor, die mit unsymmetrischen Drehungen der Polarisationsebene verbunden sind, derart, daß auf einer Seite des Streifens eine viel größere Drehung stattfindet, als auf der anderen. Diese größere Drehung kann bei wirkenden negativen Elektronen sowohl positiv als negativ sein.

Die bei *Na*-Dampf von niedriger Temperatur hypothetische

1) R. W. Wood, Phys. Zeitschr. 9, p. 124, 1908.

Voraussetzung des Vorhandenseins äolotroper Moleküle bietet sich mit viel größerer Sicherheit bei geschmolzenen Kristallen und auch bei solchen Lösungen von kristallisierten Substanzen, wo die Dissoziation zurücktritt.

Die ausgedehnten Beobachtungsreihen, die Herr Elias[1]) an Salzen der seltenen Erden in Lösungen, Gläsern, Schmelzen angestellt hat, gestatten höchstwahrscheinlich die Heranziehung solcher Vorstellungen. Allerdings bieten die bez. Resultate der Anwendung jeder Theorie ungemeine Schwierigkeiten, weil kaum festzustellen sein wird, welchen Bau die wahrgenommenen Absorptionsstreifen haben; daß es sich bei ihnen im allgemeinen nicht um einzelne, einfache, reinlich getrennte Streifen handelt, sondern um sehr komplizierte Systeme einander überlagernder, zeigt häufig die direkte Anschauung. Immerhin wird man geneigt sein, so wie Herr Elias tut, einige der erhaltenen Kurven über die Dispersion der Drehung im Sinne eines unsymmetrischen, ev. entgegengesetzt symmetrischen Verlaufes zu deuten.

Man kann für die Anwendbarkeit der hier verfolgten Vorstellung äolotroper Moleküle vielleicht auch die von Herrn Elias in einigen Fällen festgestellte starke Zunahme der Drehung mit abnehmender Temperatur heranziehen. Das in dem allgemeinen Ausdruck (15) für G auftretende R_1^2 ist nämlich nach (3) mit der absoluten Temperatur T indirekt proportional, und Herr Elias hebt hervor, daß bei dem geschmolzenen Nitrat von Neodym die Drehungen ungefähr nach diesem Gesetz mit der Temperatur zu variieren scheinen.

Allerdings fehlt der Nachweis einer erheblich schnelleren Zunahme der Drehung mit der Feldstärke, als sie das lineäre Gesetz ergibt. Das auf der Orientierung der Moleküle beruhende Glied enthält nämlich die dritte Potenz der Feldstärke als Faktor. Die Sachlage ist also noch nicht völlig aufgeklärt, trotzdem Herr Elias Abweichungen von der Proportionalität zwischen Drehung und Feldstärke an mehreren Stellen hervorhebt. Ein Fortschritt wäre in erster Linie von der erschöpfenden Untersuchung des Verhaltens der Umgebung eines scharfen und möglichst isolierten Absorptionsstreifens zu erwarten.

Göttingen, im Oktober 1912.

---

1) G. J. Elias, Dissert. Utrecht, 1909; Ann. d. Phys. **35**, p. 299; 1911. S. auch R. W. Wood, Phys. Zeitschr. **9**, 148, 1908.

Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung.

(Voranzeige.)

Von

Paul Koebe in Leipzig.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 13. Januar 1912.

In der vorliegenden Note gebe ich wesentlich Gedanken wieder, welche ich gelegentlich der Naturforscherversammlung in Karlsruhe (Sept. 1911) mitgeteilt habe. Es handelt sich um eine erstmalige, durchgreifende Begründung der von Klein[1]) und Poincaré[2]) angewandten Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung[3]) und Uniformisierung. Diese Begründung erstreckt sich auf alle von mir in den Abhandlungen über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, II, III (Math. Ann. Bd. 67, 69, 72, Jahrg. 1909, 1910, 1912) bereits auf anderm Wege, nämlich mit Hülfe der Methode der Überlagerungsfläche und des iterierenden Verfahrens als existierend nachgewiesenen Uniformisierungstranscendenten, durch welche alle von Herrn Klein in der Abhandlung „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie" (1882, Math. Ann. Bd. 21) in den sogenannten „Fundamentaltheoremen" definierten Größen umfaßt werden. Sie erstreckt sich jedoch durch die ihr eigentümliche Tragweite auch auf mannigfaltige andere Probleme der konformen Abbildung. Als charakteristischer Zug

---

1) Math. Ann. Bd. 21, (1883).

2) Acta math. Bd. 4, (1884).

3) S. auch Schäflis Kontinuitätsmethode in Crelles Journal, Bd. 78, pag. 63—80, (1874).

dieser meiner Begründung ist neben einer gewissen engeren Bezugnahme zu Klein überhaupt ganz besonders die Abwendung von Poincarés Theorie der „polygones limites“ (Acta math. Bd. 4, pag. 250—276)[1]) hervorzuheben, welche seither als wesentlicher Bestandteil eines Kontinuitätsbeweises überhaupt gegolten[2]) und dadurch die allgemeineren Uniformisierungstheoreme (imaginäre Substitutionen) von der Kontinuitätsmethode überhaupt oder doch noch auf lange Zeit auszuschließen schien.

Um für diese vorläufige kurze Mitteilung, der ich eine ausführliche, auch die bezüglichen Leistungen von Klein, Poincaré, Ritter, Fricke, Brouwer, namentlich Klein und Poincaré näher bezeichnende Darlegung in den Math. Annalen unter dem Titel „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV“ folgen lassen will[3]), eine Abgrenzung zu haben, will ich mich beschränken auf den Fall des Problems der Uniformisierung einer algebraischen Kurve (x, y) vom Geschlecht p durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus.

A) Problemstellung und Unitätssatz.

Es sei F die Riemannsche Fläche der zu uniformisierenden algebraischen Funktion $y(x)$, p das Geschlecht der Fläche F. Die Fläche F denken wir uns durch p auf ihr getrennt verlaufende Rückkehrschnitte in eine $2p$-fach zusammenhängende Fläche F_0 verwandelt. Die Fläche F_0 ist schlichtartig. Es wird verlangt eine Größe $t(x, y)$ zu bestimmen, welche relativ zu F linear polymorph ist, dazu in F_0 eindeutig, sodaß F_0 durch Vermittlung eines Zweiges konform auf einen schlichten Bereich Φ mit linearer Ränderzuordnung abgebildet wird. Die Funktion $t(x, y)$ ist, wie ich in den Abhandlung II und III gezeigt habe, durch die genannten Eigenschaften bis auf eine lineare Substitution vollständig bestimmt, sofern sie überhaupt existiert.

B) Die in Beziehung zu setzenden $(6p-6)$-dimensionalen Kontinuen.

Wir gehen jetzt von irgend einem Fundamentalbereich Φ des Schottkyschen Typus aus. Derselbe besitzt $3p$ willkürliche

---

1) S. auch die kritischen Bemerkungen Poincarés pag. 235, 236.

2) Klein, Ritter, Schlesinger, Fricke, Brouwer.

3) S. auch eine Note des Verfassers in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1912: „Zur Begründung der Kontinuitätsmethode“ (pag. 59 ff.) und dessen „Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung“ in Jahresbericht des D. M. V. 1912 (insbes. pag. 161—163).

komplexe Konstanten, welche, da Bereiche, die durch lineare Substitutionen in einander transformiert werden können, nicht als wesentlich verschieden zu betrachten sind, sich auf $3p-3$ Konstanten reduzieren. Um eine nur $3p-3$ komplexe Konstanten enthaltende Normalform zu haben, denken wir uns mit dem Bereich Φ eine solche lineare Transformation ausgeführt, daß die beiden Fixpunkte der ersten Randsubstitution in 0 und ∞ übergehen und daß außerdem der Einheitspunkt einer der $2p-2$ weiteren Fixpunkte ist, welche zu den Randsubstitutionen gehören. Bezeichnen wir mit Φ' den in der angegebenen Weise normierten Fundamentalbereich Φ, so erhalten wir nun, ausgehend von diesem Bereich Φ', ein Kontinuum C_1 von Bereichen Φ', welches $6p-6$ Dimensionen besitzt. Nicht jedoch ist an dieser Stelle klar, daß alle Bereiche Φ' ein einziges Kontinuum bilden, ebensowenig wie dies von den Bereichen Φ feststeht. Das ist aber auch, wie wir später sehen werden, für den Kontinuitätsbeweis nicht erforderlich. Nachträglich ergibt sich erst, daß tatsächlich alle Bereiche Φ' und also auch Φ ein einziges Kontinuum bilden.

Wir denken uns jetzt auf der andern Seite das Kontinuum C_2 der Flächen F_0. Das ist so zu verstehen. Jede Riemannsche Fläche F vom Geschlecht p kann man bekanntlich bei hinreichend hoher Wahl von m durch umkehrbar eindeutige konforme Abbildung in eine m-blättrige Fläche verwandeln. Indem wir irgend zwei dieser m-blättrigen Flächen wählen und jede durch p Rückkehrschnitte zu einer $2p$-fach zusammenhängenden Fläche F_0 aufgeschnitten denken, behaupten wir, daß es möglich ist, diese beiden kanonisch aufgeschnittenen Flächen stetig ineinander überzuführen, sodaß auch die Schnittsysteme ineinander übergehen. In diesem Sinne reden wir dann von dem Kontinuum C_2'. Der Beweis ergibt sich dadurch, daß wir die beiden aufgeschnittenen Flächen durch konforme Abbildung[1]) je in eine schlichte $2p$-fach zusammenhängende Fläche mit durchaus regulärer analytischer Ränderzuordnung verwandeln können. Zwei solche Flächen lassen sich dann in der Tat leicht ineinander überführen, und es entpricht einer solchen Überführung in stetiger Weise eine Überführung im Gebiete der m-blättrigen Flächen, da man zu jedem schlichten Bereich mit analytischer Ränderzuordnung nach den Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden eine zugehörende m-blätt-

1) S. meinen Aufsatz „über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche u. s. w." in Jahresbericht der D. M. V. 1906, sowie die erwähnte Abhandlung II § 13.

rige Fläche finden kann, welche nachweislich gleichzeitig mit dem Bereiche stetig variiert. Der Stetigkeitsbeweis kann sowohl auf Grund der kombinatorischen Methoden selbst geführt werden, als auch unabhängig von dieser Methode auf verschiedenen Wegen z. B. durch Heranziehung der Minimaleigenschaft der Abelschen Integrale oder mit Hülfe des am Schlusse der Abhandlung II von mir benützten allgemeinen Konvergenzsatzes.

Wir denken uns nunmehr auf der einzelnen Fläche F_0 das Abelsche Integral erster Art u gebildet, welches bis auf einen bei Durchlaufung des ersten Rückkehrschnitts sich ergebenden Periodizitätsmodul $2\pi i$ in F_0 eindeutig ist[1]). Die Funktion $v = e^u$ vermittelt dann eine konforme Abbildung der Fläche F_0 auf eine mehrblättrige, den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt unbedeckt lassende Fläche F_0', deren $2p$ Randkurven paarweise durch Substitutionen der Form $v'' = cv'$ verknüpft sind, unter c Konstanten verstanden. Der Typus der Fläche F_0' erfordert zu seiner Charakteristik und genaueren Normierung noch folgende weiteren Bestimmungen: F_0' ist ein schlichtartiges, endlich-vielblättriges Riemannsches Flächenstück mit $2p-2$ Windungspunkten, deren einer mit dem Einheitspunkt koincidiert; von den Randkurven besitzt das erste Randkurvenpaar die Eigenschaft, den Nullpunkt einfach zu umschließen, währendhingegen alle übrigen Randkurven den Nullpunkt nicht umschließen. Alle in der angegebenen Weise charakterisierten Flächen F_0' bilden ein einziges Kontinuum C_2 von $6p-6$ Dimensionen, und es besteht übrigens für dieselben ein Unitätsatz wie für die Flächen Φ'; d. h.: zwei Flächen F_0', welche, vermöge der Ränderzuordnung als geschlossene Mannigfaltigkeiten vorgestellt, umkehrbar eindeutig konform aufeinander abgebildet werden können, so daß auch die kanonischen Aufschneidungen wesentlich dieselben sind, sind überhaupt wesentlich identisch.

C) Durchführung des Kontinuitätsbeweises.

Zu jedem Element des Kontinuums C_1 gehört, wie aus den kombinatorischen Methoden gefolgert werden kann, ein Bildelement des Kontinuums C_2. Das letztere Element ändert sich nachweislich stetig, wenn ersteres sich stetig ändert. Indem wir die $6p-6$-dimensionale Umgebung des ersteren Elements beschreiben,

---

1) Allgemeiner kann man Riemanns bekannte mehrblättrige Parallelogrammfläche benützen, um Windungspunkte höherer Ordnung zu vermeiden.

sind wir sicher auf Grund des Unitätssatzes, daß wir lauter verschiedene Elemente des Kontinuums C_2 erhalten. Da beide Kontinuen dieselbe Dimensionenzahl haben, ergibt sich nach einem allgemeinen Satze der Punktmengenlehre, (Satz von der Invarianz des Gebiets bei eineindeutiger stetiger Abbildung) welcher neuerdings von Herrn Brouwer[1]) in scharfsinniger, übrigens doch unmittelbar zugänglicher Weise allgemein bewiesen worden ist, daß auch im Kontinuum C_2 die vollständige Umgebung des Bildelementes gewonnen wird. Wir erhalten so als Bild des Kontinuums C_1 ein in C_2 enthaltenes zusammenhängendes $6p-6$-dimensionales Teilkontinuum C_3, von welchem zu zeigen ist, daß es mit C_2 identisch ist.

Zu dem Zwecke gehen wir von einem Element F_0' aus, welches dem Kontinuum C_3 angehört. Wir verbinden es durch eine Linie L im Kontinuum C_2 mit einem Element F_0', welches nicht zu C_3 gehören möge. Indem wir nun diese Verbindungslinie durchlaufen, werden wir zunächst die entsprechende Linie in C_1 verfolgen können. Diese Linie führt, entsprechend der Annäherung an einen Punkt $(F_0')^*$ auf L, mit Notwendigkeit an die Grenze des Kontinuums C_1. Das steht aber im Widerspruch mit meinem Verzerrungssatze, aus welchem geschlossen werden kann, daß das Bild Φ', welches einer Fläche F_0' beziehungsweise einer mit ihr äquivalenten schlichten Fläche mit $2p$ durch reguläre analytische Substitutionen paarweise bezogenen Randkurven entspricht, gegenüber dem Original F_0' nicht beliebig stark verzerrt werden kann. Eine unendlich groß werdende Verzerrung müßte nämlich

---

1) Vgl. dessen Note „Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen". Gött. Nachr., 1912, sowie die Notiz „Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets" in Math. Ann. Bd. 72, 1912. Eine Umgehung des Satzes von der Invarianz des Gebiets durch näheres Eingehen auf die analytische Natur des Problems (vgl. Klein Ann. 21) scheint mir in Anbetracht der elementaren Natur dieses Satzes, dessen Bedeutung für den Kontinuitätsbeweis bereits Fricke in seinem Vortrage auf dem Heidelberger Mathematikerkongreß (1904) und in Fricke-Klein „Vorlesungen über automorphe Funktionen", Bd. 2, pag. 413 hervorgehoben hat, sowie in Anbetracht der von mir angestrebten Ziele der Kontinuitätsmethode (vgl. z. B. Abschnitt F der vorliegenden Note) nur bedingt zweckmäßig zu sein um so mehr, als die Anwendung des Satzes für eine Dimension in der Analysis geläufig ist. Eine solche Umgehung ist prinzipiell sicher möglich. Der von Klein l. c. gegebene bloße Hinweis auf die Poincaréschen Reihen genügt allerdings bekanntlich dazu nicht, weswegen eben Fricke den Satz von der Invarianz des Gebiets als Desiderat formuliert hat

notwendig eintreten, wenn wir uns, die genannte Linie in C_1 verfolgend, der Grenze des Kontinuums C_1 mehr und mehr nähern. Der Verzerrungssatz vermittelt statt dessen geradezu den Schluß der Existenz $(F_0')^*$ entsprechenden Bildpunktes in C_1.

Nunmehr ergibt sich nach Zuendeführung des Kontinuitätsbeweises auch, daß das Kontinuum C_3 tatsächlich alle Fundamentalbereiche Φ' umfaßt. Demnach bilden auch die Fundamentalbereiche Φ des Schottkyschen Typus ein einziges Kontinuum.

D) Kennzeichnung der Hauptbeweispunkte.

1) Zugrundelegung eines $(6p-6)$-dimensionalen vollständigen Kontinuums C_1 im Gebiete aller Fundamentalbereiche des Schottkyschen Typus, von welch' letzteren zunächst nicht feststeht, ob dieselben ein einziges Kontinuum bilden.

2) Die mit p Rückkehrschnitten kanonisch aufgeschnittenen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p lassen sich als ein einziges $(6p-6)$-dimensionales Kontinuum C_2 charakterisieren.

3) Der Unitätssatz, nach welchem einem Element in C_1 nicht mehr als ein Element in C_2 entsprechen kann.

4) Dem Gebiete C_1 entspricht in C_2 vermöge eineindeutig stetiger Abbildung ein Teilkontinuum C_3.

5) Das Teilkontinuum C_3 ist ebenfalls $(6p-6)$-dimensional

6) Das Kontinuum C_3 erfüllt das Kontinuum C_2 vollständig[1]).

7) Die Fundamentalbereiche des Schottkyschen Typus bilden ein einziges Kontinuum[2]).

E) Weitere Bemerkungen.

a) Im Falle der Grenzkreisuniformisierung hängt bekanntlich die Uniformisierungstranscendente von der Wahl der Zerschneidung nicht ab. Diesem Umstande entsprechend genügt es für den Beweis des betreffenden Uniformisierungstheorems zu zeigen, daß die unaufgeschnittenen oder, was mehr ist, die wie oben längs p Rückkehrschnittenen aufgeschnittenen Flächen des Geschlechtes p ein Kontinuum bilden.

b) Im Falle der Grenzkreisuniformisierung bedient man sich, um auch bei der Anwendung des Verzerrungssatzes die durch

1) Den Kleinschen Bemerkungen zum Beweise dieses wichtigsten Punktes pag. 212 l. c. liegt ein insbesondere Mißverständnis zugrunde. Auch Poincaré ist in seiner Beschränkung auf den Grenzkreisfall keineswegs einwandfrei.

2) Die von Klein angenommene Evidenz dieses Satzes (pag. 208 l. c.) dürfte auf einen Irrtum zurückzuführen sein.

diesen noch nicht gelieferte Größenschranke für die Fundamentalbereiche Φ mit Grenzkreis zu erhalten, zweckmäßig des Satzes, daß alle derartigen Fundamentalbereiche denselben nichteuklidischen Flächeninhalt besitzen, ein Satz, durch welchen tatsächlich ein Zusammenschrumpfen des Bereiches auf einen Punkt ausgeschlossen wird. Im Falle der Uniformisierung durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus war die Möglichkeit des Zusammenschrumpfens dadurch ausgeschlossen, daß alle Bereiche den Einheitspunkt enthalten und gleichzeitig den Nullpunkt umschlingen.

c) Der Kleinsche Satz [1]), daß die den verschiedenen Uniformisierungstheoremen entsprechend nach irgend welchem Typus zu schlichtartigen Flächen aufgeschnittenen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p ein Kontinuum bilden, ergibt sich einwandfrei bei Zugrundelegung des oben bewiesenen Satzes, daß die schlichten $2p$-fach zusammenhängenden Bereiche mit paarweise regulär analytischer Ränderzuordnung ein Kontinuum bilden.

F) Verallgemeinerung des Parallelschlitztheorems der konformen Abbildung.

Zum Schlusse möchte ich, um wenigstens an einem Beispiel die Fruchtbarkeit der dargelegten Beweisprinzipien für die Probleme der konformen Abbildung überhaupt zu illustrieren, noch ein neues Theorem der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche bezeichnen, dessen Beweis mittels dieser Prinzipien besonders elegant gelingt.

Man kann bekanntlich jeden $(p+1)$-fach zusammenhängenden schlichten Bereich, welcher den unendlich fernen Punkt enthält, auf eine und nur eine Weise in einen von $p+1$ endlichen zur Achse des Reellen parallelen Schlitzen begrenzten schlichten Bereich umkehrbar eindeutig konform abbilden durch eine Funktion $z(x)$, welche sich im Unendlichen verhält wie $x + ((0))$, unter $((0))$ eine in Unendlichen reguläre und für $x = \infty$ selbst den Wert null annehmende Funktion verstanden. Dieses Theorem können wir etwa als das Parallelschlitztheorem bezeichnen.

Es ist nun möglich dieses Theorem dadurch in bemerkenswerter Weise zu verallgemeinern, daß man unter Aufrechterhaltung aller übrigen Bedingungen nur folgende Änderung trifft: anstatt zu verlangen, daß alle Schlitze unter einander parallel sind, ver-

1) Math. Ann. 21, pag. 208—209.

langt man, daß jeder einzelne Schlitz eine vorgegebene Richtung besitzt. Es ergibt sich der Satz, daß es dann ebenfalls auf eine und nur eine Weise möglich ist eine den gewünschten Bedingungen entsprechende konforme Abbildung zu machen. Diesen Satz können wir als das allgemeine Schlitztheorem bezeichnen.

Man bemerkt sofort, daß die Konstantenzahl die richtige ist und hat dazu den Unitätssatz. Nimmt man in der Tat an, daß zwei Bereiche mit denselben korrespondierenden Schlitzrichtungen konform auf einander abgebildet seien, so daß die Abbildungsfunktion $\bar{x}(x)$ sich im Unendlichen verhält wie $x + ((0))$, so wird die Differenz $\bar{x} - x$ eine auch im Unendlichen reguläre Funktion von x, durch welche der in der x-Ebene befindliche Schlitzbereich auf einen ganz im Endlichen befindlichen Bereich abgebildet wird, dessen vollständige Begrenzung sich auf $p+1$ Schlitze verteilen muß. Das ist jedoch topologisch unmöglich. Es muß demnach $\bar{x} - x$ eine Konstante und zwar gleich null sein. Bei der Durchführung des Beweises kann man zweckmäßig den abzubildenden Bereich zunächst in bekannter Weise auf einen Parallelschlitzbereich abbilden.

Sind speziell die gegebenen Schlitzrichtungen zu je zweien entweder parallel oder orthogonal, so läßt sich die Abbildungsaufgabe mit durchführbaren Randwertaufgaben der Potentialtheorie in Zusammenhang bringen und dadurch ohne Zuhilfenahme der Kontinuitätsmethode z. B. unter Zugrundelegung der kombinatorischen Methoden lösen. Auch die allgemeine Aufgabe läßt sich mit Hülfe dieser Methoden lösen, wenn man dieselben in der von Herrn Prym[1]) gefundenen eigenartigen Erweiterung heranzieht.

Dem hierdurch angedeuteten ausdehnungsfähigen Kreise von Abbildungsproblemen beabsichtige ich demnächst an anderer Stelle eine ausführliche Untersuchung zu widmen.

---

1) Prym-Rost: „Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung". Leipzig, Teubner, 1911. S. auch Appells Preisschrift: „Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions Abéliennes en séries trigonométriques". Acta math. Bd. 13, 1890.

Über die Beziehungen zwischen den Volumenflächen der isotropen und anisotropen Phase und über den Verlauf der neutralen Kurve $\Delta v = 0$.

Von

F. Körber.

Vorgelegt von G. Tammann in der Sitzung vom 23. November 1912.

G. Tammann[1]) hat für das Gebiet kleiner Volumen die Zustandsgleichung

$$(v - v_{p=\infty}) \cdot (K+p) = C \cdot T$$

aufgestellt, in der die Konstanten $v_{p=\infty}$, K und C folgende physikalische Bedeutung haben: $v_{p=\infty}$ ist das Grenzvolumen des Stoffes bei unendlich hohem Druck, K der durch die gegenseitige Anziehung der Moleküle bedingte Binnendruck und C berechnet sich als Produkt des Wärmeausdehnungskoeffizienten beim Drucke p a_p mit $(K+p)$, dem zugehörigen inneren Druck: $C = a_p \cdot (K+p)$. Für Atmosphärendruck nimmt C speziell die Form: $C = a_{p=0} \cdot K$ an.

Die Gültigkeit der Gleichung ist für 9 von Amagat in einem Temperaturdruckbereich von 50° und 3000 Atm. auf die Volumenänderungen untersuchte Flüssigkeiten für Drucke von 1000 Atm. aufwärts erwiesen worden.

Im Anschluß an diese für Flüssigkeiten geltende Gleichung

$$(1) \qquad (v_2 - v_{2p=\infty}) \cdot (K+p) = C_2 T$$

hat G. Tammann unter der Annahme, daß sich das Volumen einer kristallisierten Masse bezüglich seiner Kompressibilität und

---

1) G. Tammann, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. **1911**, 527, Ann. d. Phys. (4) **37**, 975 (1912).

Wärmeausdehnung wie seine Schmelze unter einem höheren Druck verhält, für anisotrope Stoffe die ganz entsprechend gebaute Gleichung

(2) $$(v_s - v_{3p=\infty}) \cdot (K + \Delta K + p) = C_s T$$

aufgestellt, deren Gültigkeit allerdings noch nicht erwiesen ist.

ΔK ist die Änderung des inneren Druckes bei der Kristallisation, C_s berechnet sich ganz entsprechend den Flüssigkeiten zu

$$C_s = a_{3p} \cdot (K + \Delta K + p) = a_{3p=0} \cdot (K + \Delta K);$$

$v_{3p=\infty}$ ist das Grenzvolumen der anisotropen Phase; es deckt sich nicht mit dem entsprechenden Werte für die Flüssigkeit, da Extrapolationen nach zu urteilen die Isothermen von Kristall und Schmelze sich in der Regel schneiden werden, so daß $v_{3p=\infty} > v_{2p=\infty}$ zu setzen ist. Die Differenz dieser beiden Grenzvolumen ist vermutlich durch eine Volumenzunahme infolge der Orientierung der Moleküle im Raumgitter bedingt; G. Tammann führt für diese Volumenänderung $v_{3p=\infty} - v_{2p=\infty} = Dv_{p=\infty}$, die nicht auf Rechnung der Erhöhung des Binnendrucks des Stoffes zu setzen ist, die Bezeichnung Sperrigkeit ein.

Beide Volumenflächen, die des Isotropen und die des Anisotropen, sind gleichseitige hyperbolische Paraboloide.

Im Folgenden soll nun der Zusammenhang der durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Volumenflächen der isotropen und anisotropen Phase näher besprochen werden, speziell wird der Verlauf der Schnittkurve beider Flächen untersucht werden, deren Projektion auf die pT-Ebene die für die Gestalt der Schmelzkurve so wichtige neutrale Kurve $\Delta v = 0$ ist. Es wird sich ergeben, daß für den Verlauf der Schnittkurven von ausschlaggebender Bedeutung die Annahmen über die Sperrigkeit des Anisotropen sein werden. Die beiden von G. Tammann angeführten Möglichkeiten, daß einmal $Dv_{p=\infty}$ unabhängig von Druck und Temperatur ist, dann aber die gleiche Abhängigkeit von Druck und Temperatur zeigt, wie das Gesamtvolumen, werden getrennt untersucht werden.

a) Im ersten Falle, daß $Dv_{p=\infty}$ eine Konstante ist, ist die Volumenfläche des Anisotropen durch zwei Parallelverschiebungen aus der des Isotropen abzuleiten. Der Erhöhung des Binnendruckes bei der Kristallisation um ΔK entspricht eine Parallelverschiebung um ΔK in der Richtung der negativen Druckachse, der Sperrigkeitskonstanten eine solche um $Dv_{p=\infty}$ im Sinne der positiven Volumenachse. Durch diese zweifache Transformation

ist die Gleichung für die Flüssigkeit in die für den Kristall übergeführt, d. h. die Volumenfläche des Isotropen deckt sich nach den beiden Verschiebungen mit der des Anisotropen. Unter Annahme einer von Druck und Temperatur unabhängigen Sperrigkeit des Anisotropen muß also

$$C_s = C_s \quad \text{oder} \quad a_{3p=0} \cdot K = a_{3p=0} \cdot (K + \Delta K)$$

sein.

Es verhalten sich also die Wärmeausdehnungskoeffizienten unter dem Druck Null umgekehrt wie die inneren Drucke der beiden Phasen:

$$\frac{a_{3p=0}}{a_{2p=0}} = \frac{K}{K + \Delta K}.$$

Diese Beziehung folgt auch direkt aus der von G. Tammann angegebenen Gleichung

$$a_p = a_{p=0} \cdot \frac{K}{K+p}\ ^{1)},$$

wenn man nur für p die Binnendruckserhöhung ΔK bei der Kristallisation einführt; die Verschiebung um $Dv_{p=\infty}$ zu größeren Volumen ändert die Wärmeausdehnung nicht, da hierbei die Isobaren parallel zu sich verschoben werden. Die Konstanten C der Zustandsgleichungen sind also in diesem Falle identisch, da

$$a_{3p=0}(K + \Delta K) = a_{2p=0} \cdot K \quad \text{oder} \quad C_s = C_s = C$$

ist.

Ergibt umgekehrt eine voneinander unabhängige Berechnung der Koeffizienten der Gleichungen (1) und (2) aus experimentellen Daten über die Volumen der isotropen und anisotropen Phase für beide Gleichungen identische Werte von C, so haben wir das als Hinweis darauf aufzufassen, daß $Dv_{p=\infty}$ unabhängig von Druck und Temperatur ist.

Aus den beiden Zustandsgleichungen

(1a) $$(v_s - v_{2p=\infty}) \cdot (K + p) = C \cdot T$$

und

(2a) $$(v_s - v_{3p=\infty}) \cdot (K + \Delta K + p) = C \cdot T$$

worin $(v_{3p=\infty} - v_{2p=\infty}) = Dv_{p=\infty}$ ist, können wir nun durch Eliminierung von v die Gleichung der neutralen Kurve $\Delta v = 0$ ge-

1) G. Tammann, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1911, 544, Ann. d. Phys. (4) **37**, 993 (1912).

winnen. Wir erhalten

$$p^2+p(2K+\Delta K)-\frac{\Delta K\,.\,C\,.\,T}{Dv_{p=\infty}}+K\,.\,(K+\Delta K)=0,$$

oder

$$(3)\qquad \left(p+\left(K+\frac{\Delta K}{2}\right)\right)^2=\frac{\Delta K\,.\,C}{Dv_{p=\infty}}\cdot\left(T+\frac{1}{4}\,\frac{\Delta K\,.\,Dv_{p=\infty}}{C}\right),$$

die Gleichung einer zur Seite der positiven T-Achse geöffneten Parabel. Der Parameter ist gegeben durch $\frac{\Delta K\,.\,C}{Dv_{p=\infty}}$, die Koordinaten des Scheitelpunktes betragen

$$p_S=-\left(K+\frac{\Delta K}{2}\right),$$

$$T_S=-\frac{1}{4}\,\frac{\Delta K\,.\,Dv_{p=\infty}}{C}$$

und die Hauptachse verläuft im Abstande $p_S=-\left(K+\frac{\Delta K}{2}\right)$ parallel der T-Achse.

Von besonderem Interesse sind die Schnittpunkte der neutralen Kurve mit den beiden Achsen. Setzen wir in Gleichung (3) $T=0$, so geben die Wurzeln der übrigbleibenden quadratischen Gleichung für p

$$p^2+(2\,K+\Delta K)p+K(K+\Delta K)=0$$

die Schnittpunkte der neutralen Kurve mit der Druckachse an; wir erhalten

$$p_{1,\,T=0}=-K$$

$$p_{2,\,T=0}=-(K+\Delta K).$$

Es sind dies die Punkte, für die nach Gleichung (1) und (2) die Volumen unbestimmt sind, also auch gleich gesetzt werden dürfen. Für alle anderen Punkte der Druckachse unterscheiden sich die Volumen des Isotropen und des Anisotropen um $Dv_{p=\infty}$.

Als Schnittpunkt unserer Parabel mit der Temperaturachse, d. h. für $p=0$, erhalten wir aus Gleichung (3)

$$T_{p=0}=Dv_{p=\infty}\cdot\frac{K\,.\,(K+\Delta K)}{C\,.\,\Delta K}.$$

Berücksichtigen wir, daß $C=a_{2p=0}\,K=a_{3p=0}(K+\Delta K)$ ist, so können wir für

$$C\,.\,\frac{\Delta K}{K\,.\,(K+\Delta K)}=\frac{C}{K}-\frac{C}{K+\Delta K}=a_{2p=0}-a_{3p=0}$$

einführen, so daß

$$T_{p=0} = \frac{Dv_{p=\infty}}{a_{2p=0} - a_{3p=0}}$$

ist, ein Resultat, das direkt aus dem geradlinigen Verlaufe der Isobaren zu erschließen ist (vergl. Fig. 1), da ja $a_{2p=0}$ und $a_{3p=0}$ die Steigung der Isobaren für $p = 0$ angeben. Würden die Volumen der Flüssigkeiten und Kristalle auch bei kleinen Drucken

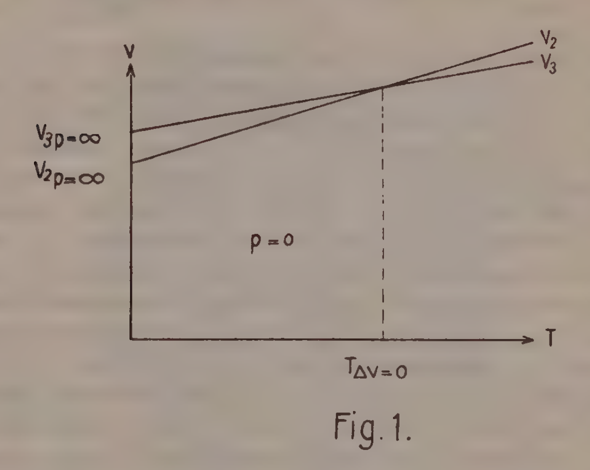


Fig. 1.

der Gleichung (1) folgen, so genügte also die Kenntnis der Volumen und der Wärmeausdehnungskoeffizienten beider Phasen bei einer einzigen Temperatur unter Atmosphärendruck, um den Wert von $Dv_{p=\infty}$ angeben zu können. Da der Anschluß der Volumen an Gleichung (1) bei höheren Drucken besser ist, könnte eine Bestimmung der Ausdehnungskoeffizienten unter möglichst hohem Druck über ein größeres Temperaturgebiet vielleicht zu genaueren Bestimmungen von $Dv_{p=\infty}$ führen, als die Bestimmung aus den mit Hülfe der Isothermen gewonnenen Grenzvolumen, die für die bisher untersuchten Flüssigkeiten mit einer Unsicherheit von 0.001—0.002 des Volumens behaftet sind [1]). Für den Schnittpunkt der Isobaren unter dem Drucke p ergibt sich nämlich

$$T_{\Delta v = 0, p} = \frac{Dv_{p=\infty}}{C} \cdot \frac{(K+p).(K+\Delta K+p)}{\Delta K}.$$

1) F. Körber, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1912, 17 und Ann. d. Phys. (4) **37**, 1031—1033 (1912).

Eine der für $p = 0$ angewandten analoge Umformung ergibt hier:

$$T_{\Delta v = 0, p} = \frac{Dv_{p = \infty}}{a_{2p} - a_{3p}}.$$

Schließlich berechnet sich für eine beliebige Temperatur T der Druck, bei dem die Volumen der isotropen und anisotropen Phase gleich sind, zu

$$p_{\Delta v = 0, T} = -K - \frac{\Delta K}{2} \pm \sqrt{\Delta K^2 + \frac{\Delta K . C . T}{Dv_{p = \infty}}}.$$

In Figur 2 sind eine Reihe neutraler Parabeln für verschieden gewählte Konstanten der Zustandsgleichungen (2a) und (3a) gezeichnet. Die hier gezeichneten Kurven lassen erkennen, welchen Einfluß die Veränderung einer der Konstanten, während die anderen festgehalten werden, auf den Verlauf der neutralen Linien hat. In den Fällen II, III, IV und V ist nämlich jedesmal eine der vier wesentlichen Konstanten der Gleichungen (1a) und (2a) gegen den Ausgangsfall, dem die Kurve I entspricht, verändert worden, und zwar immer so, daß dadurch die neutrale Parabel zu dem der experimentellen Beobachtung zugänglichen Gebiete der pT-Ebene hin verschoben erscheint. In der Tabelle sind für die einzelnen Fälle die Koordinaten der Scheitelpunkte und der Schnittpunkte mit den Achsen angegeben; ferner finden sich unter $T_{\Delta v = 0 \atop p = 3000}$ die dem experimentell bequem erreichbaren Druck von

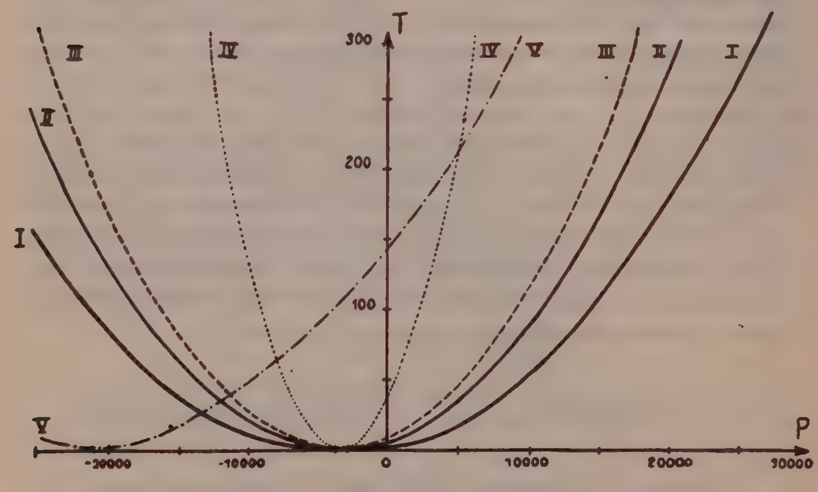


Fig. 2.

3000 kg/cm² entsprechenden Temperaturen der Neutrallinien und entsprechend unter $p_{\Delta v = 0 \atop T = 300}$ die Drucke, bei denen sich die Isothermen der isotropen und anisotropen Phase für etwa Zimmertemperatur schneiden würden.

	I.	II.	III.	IV.	V.
K	**3000**	3000	3000	3000	**20000**
ΔK	**1000**	1000	**500**	1000	1000
C	**3.0**	**2.0**	3.0	3.0	3.0
$Dv_{p=\infty}$	**0.001**	−0.001	0.001	**0.01**	0.001
a_2	0.001	0.00066 . . .	0.001	0.001	0.000150
a_3	0.00075	0.0005	0.000857	0.00075	0.000143
p_S	−3500	−3500	−3250	−3500	−20500
T_S	$-1/12$	$-1/8$	$-1/24$	$-5/6$	$-1/12$
$p_{T=0}$	−3000	−3000	−3000	−3000	−20000
	−4000	−4000	−3500	−4000	−21000
$T_{p=0}$	4	6	7	40	143
$T_{\Delta v = 0 \atop p = 3000}$	14	21	26	140	184
$p_{\Delta v = 0 \atop T = 300}$	26517	21015	17969	6039	9517
	−33517	−28015	−24469	−13039	−50517

Der Verlauf der Kurven in Figur 2 läßt erkennen, daß sich die neutrale Linie zu um so höheren Temperaturen und um so niedrigeren Drucken verschiebt je größer der Binnendruck der isotropen Phase, je größer die Sperrigkeit der anisotropen Phase und je kleiner der Wärmeausdehnungskoeffizient ist und um so weniger sich die Binnendrucke beider Phasen voneinander unterscheiden.

b) Wir wollen nun voraussetzen, daß die Sperrigkeit des Anisotropen nicht eine von Druck und Temperatur unabhängige Größe ist, sondern für sie das gleiche Gesetz der Abhängigkeit von Druck und Temperatur annehmen, wie für das Gesamtvolumen. Welchen Einfluß wird diese Annahme auf die Konstanten der Gleichungen (1) und (2) und damit auf den Verlauf der neutralen Kurve haben? Behalten wir für $v_{3p=\infty} - v_{2p=\infty}$, die Sperrigkeit bei unendlich hohem Druck oder beim absoluten Nullpunkt, die Bezeichnung $Dv_{p=\infty}$ bei, so wird bei abnehmendem Druck bezw. zunehmender Temperatur außer den durch die Gleichungen (1 a)

und (2a) gegebenen Volumenvergrößerungen beim Kristallisierten sich noch die Zunahme der Sperrigkeit superponieren. Das Kompressions- bezw. Wärmeausdehnungsgesetz wird beim Kristall nicht mehr das der Schmelze nur für einen höheren Druck sein; der Faktor $C_3 = a_{3p=0}(K + \Delta K)$ für die anisotrope Phase kann nicht mehr gleich dem der isotropen C_2 sein. Es muß die Ungleichung

$$a_{3p=0}(K + \Delta K) > a_{2p=0} \,.\, K$$

oder

$$\frac{a_{3p=0}}{a_{2p=0}} > \frac{K}{K + \Delta K}$$

gelten, da der Kristall durch Hinzutreten der Vergrößerung der Sperrigkeit mit steigender Temperatur gegen die Schmelze unter dem äußeren Druck $p = \Delta K$ eine verstärkte Wärmeausdehnung zeigt.

Für die isotrope bezw. anisotrope Phase gelten dann die Gleichungen:

$$\text{(1b)} \qquad (v_2 - v_{2p=\infty}) \,.\, (K + p) = C_2 \,.\, T = a_{2p=0} \,.\, K \,.\, T,$$

$$\text{(2b)} \quad (v_3 - v_{3p=\infty}) \,.\, (K + \Delta K + p) = C_3 \,.\, T = a_{3p=0}(K + \Delta K) \,.\, T,$$

worin $C_3 > C_2$ oder

$$a_{3p=0} \,.\, (K + \Delta K) - a_{2p=0} \,.\, K > 0$$

ist.

Finden wir bei der Berechnung der Koeffizienten der Zustandsgleichungen für die Volumenfläche des Kristalls einen größeren Wert C_3 als für die Flüssigkeit, so haben wir diesen Befund im Sinne einer Änderung der Sperrigkeit analog der Abhängigkeit des Gesamtvolumens von Druck und Temperatur zu deuten.

Unter Benutzung der Bezeichnung $v_{3p=\infty} - v_{2p=\infty} = Dv_{p=\infty}$ gewinnt man durch Eliminierung von v die Gleichung der Neutrallinie:

$$p^2 - \frac{a_{2p=0} \,.\, K - a_{3p=0}(K + \Delta K)}{Dv_{p=\infty}} \,.\, p \,.\, T + (2K + \Delta K) \,.\, p$$
$$- \frac{K \,.\, (K + \Delta K) \,.\, (a_{2p=0} - a_{3p=0})}{Dv_{p=\infty}} \, T + K \,.\, (K + \Delta K) = 0.$$

Die Diskussion dieser Gleichung zweiten Grades führt zu folgendem Resultate. Da die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist:

$$\delta = \frac{a_{2p=0} \, a_{3p=0} \,.\, K \,.\, (K + \Delta K) \,.\, \Delta K^2}{4 \, Dv_{p=\infty}} \neq 0,$$

und die der Koeffizienten der Glieder 2. Grades einen negativen Wert ergibt:

$$d = -\left(\frac{a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}(K+\Delta K)}{2\,Dv_{p=\infty}}\right)^2 < 0,$$

so stellt unsere Gleichung eine Hyperbel dar.

Die Mittelpunktskoordinaten ergeben sich zu

$$p_M = -K\,.\left(1 + \frac{a_{2p=0}\,\Delta K}{a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)}\right),$$

$$T_M = -\frac{a_{2p=0}\,.\,K + a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)}{[a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)]^2}\,.\,\Delta K\,.\,Dv_{p=\infty}.$$

Die Neigung α der Hauptachse gegen die Druckachse wird bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)}{Dv_{p=\infty}}\right)^2} - 1}{\frac{a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)}{Dv_{p=\infty}}}$$

Für die Richtung der Asymptote ergibt sich einmal die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi_1 = \infty$, d. h. die eine Asymptote verläuft parallel zur T-Achse im Abstande p_M, andererseits erscheint der Richtungstangens in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; die Lage der zweiten Asymptote ist aber bestimmt durch die der ersten und der Hauptachse: $\varphi_2 = 2\alpha - \varphi_1$.

Zur Festlegung des Scheitelpunktes müssen wir noch seinen Abstand vom Mittelpunkt, den Achsenabschnitt a auf der Hauptachse kennen. Es ist

$$a^2 = \frac{2\,a_{2p=0}\,.\,a_{3p=0}\,.\,K\,.\,(K+\Delta K)\,.\,\Delta K^2\,.\,Dv_{p=\infty}^2}{[a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)]^4}$$
$$\cdot\left(1 - \sqrt{1+\left(\frac{a_{2p=0}\,.\,K - a_{3p=0}\,.\,(K+\Delta K)}{Dv_{p=\infty}}\right)^2}\right).$$

Für die Koordinaten der Schnittpunkte der neutralen Hyperbel mit den Achsen erhalten wir dieselben Ausdrücke wie im Falle a)

$$p_{T=0} = \begin{cases} -K \\ -(K+\Delta K), \end{cases} \tag{3}$$

$$T_{p=0} = \frac{Dv_{p=\infty}}{a_{2p=0} - a_{3p=0}}.$$

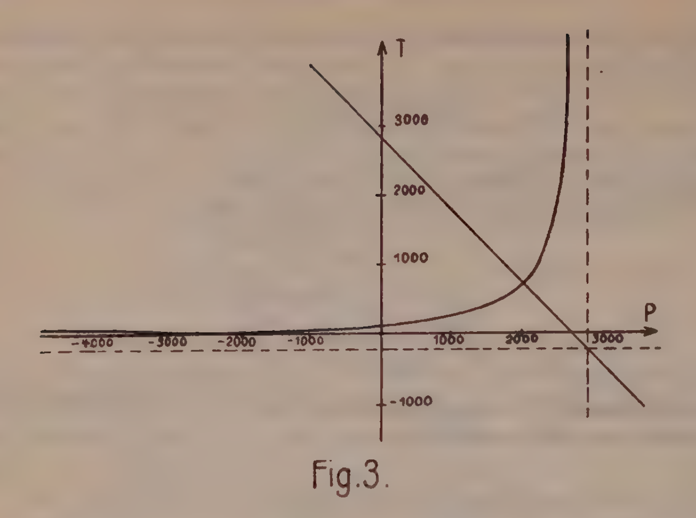


Fig. 3.

In Figur 3 ist der eine Ast der neutralen Hyperbel für folgende Wahl der Koeffizienten gezeichnet:

$$K = 3000, \quad \Delta K = 1000, \quad Dv_{p=\infty} = 0.01,$$
$$C_2 = 3.0, \quad C_3 = 3.5,$$

d. h.

$$a_{2p=0} = 0.001, \qquad a_{3p=0} = 0.000875.$$

Der zweite Ast, der vollständig in das Gebiet negativer Temperaturen fällt, mit dem also irgend eine physikalische Vorstellung nicht zu verbinden ist, ist fortgelassen. Der Zeichnung liegen zu Grunde folgende aus den angegebenen Konstanten berechneten Werte:

$$p_M = 3000, \qquad T_M = -260, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -0{,}98, \qquad \alpha = 134^\circ 25',$$
$$\varphi_1 = 90^\circ, \qquad \varphi_2 = 178^\circ 50', \qquad a = 1309,$$
$$p_{T=0} = \begin{cases} -3000 \text{ kg/cm}^2, \\ -4000 \quad " \end{cases} \qquad T_{p=0} = 80^\circ.$$

Ein Vergleich mit Kurve IV in Figur 2 zeigt eine ganz beträchtliche Verschiebung der Neutrallinie zu kleinen Drucken infolge der vergrößerten Wärmeausdehnung des Kristallisierten. Vor allem ist hervorzuheben, daß im Falle b) die neutrale Linie mit steigender Temperatur nicht zu beliebig hohen Drucken ansteigen kann, sondern unterhalb eines Maximalwertes p_M bleiben muß. Eine Veränderung einer Konstanten bei Beibehaltung der Werte der anderen würde in demselben Sinne wirken wie die Konstanten-

veränderung im Falle a). Es ist dies sofort einzusehen, da die Schnittpunktskoordinaten der Neutrallinie mit den Achsen in beiden Fällen durch die gleichen Ausdrücke wiedergegeben werden.

Die im Vorstehenden berechneten Parabeln bezw. Hyperbeln stellen natürlich nur unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Zustandsgleichungen (1a) und (2a) bezw. (1b) und (2b) die neutralen Kurven $\Delta v = 0$ dar. Nur in dem Gebiete der pT-Ebene, in dem die Volumen wirklich den Gleichungen gehorchen, werden natürlich auch die Neutrallinien den angegebenen Verlauf zeigen. Ebenso wie die Flüssigkeitsvolumen bei tiefen Temperaturen der Gleichung (1a) nicht mehr folgen, dürften auch die Kristalle — die Gültigkeit der Gleichung (2a) oder (2b) im übrigen Gebiete der pT-Ebene vorausgesetzt — bei sehr tiefen Temperaturen ein abweichendes Verhalten zeigen. Da wir über den Charakter dieser Abweichungen weder für die Flüssigkeit noch für den Kristall orientiert sind, ist es unmöglich anzugeben, welche Änderungen diese Abweichungen im Verlaufe der Neutrallinie bei tiefen Temperaturen bedingen werden. Auch bei kleinen Drucken besonders in der Nähe des Siedepunktes sind die Volumen des Isotropen nicht mehr durch Gleichung (1) wiederzugeben. Diese Abweichungen dürften jedoch für den Verlauf der Neutrallinien belanglos sein, da diese bei Temperaturen in der Nähe des Siedepunktes stets bei derartig hohen Drucken liegen dürften, daß das Flüssigkeitsvolumen der Gleichung (1) gehorchen wird. Sollte aber das Volumen der anisotropen Phase in der Nähe der Schmelzkurve ein abnormes Verhalten analog dem der Flüssigkeit in der Nähe der Verdampfungskurve zeigen, so würde dadurch der Verlauf der neutralen Kurve gerade an der wichtigsten Stelle, beim Maximum der Schmelzkurve, wesentlich beeinflußt werden. Eine Hochbiegung der Volumenfläche des Kristalles würde eine Verschiebung der Schnittlinie zu kleineren Drucken hin zur Folge haben; das Maximum der Schmelzkurve würde dann bei niedrigerem Druck liegen, als nach dem Verlaufe der neutralen Linie, geschlossen aus den Zustandsgleichungen, zu erwarten wäre.

Über die geologischen Verhältnisse des südlichen Reinhardswaldes und Bramwaldes, besonders auf Blatt Münden.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1912.

Die Gebirgsschichten des südlichen Reinhardswaldes und Bramwaldes, zunächst der Buntsandstein, bilden auf Blatt Münden und den Nachbarblättern, abgesehen von allerlei Störungen und Unregelmäßigkeiten, im Großen und Ganzen ein Gewölbe, welches sich nach Südsüdwesten senkt, und dessen Westflügel ein wenig stärker geneigt ist, als der Ostflügel.

Für die Ausbildung der jetzigen Verhältnisse ergeben die geologischen Untersuchungen im wesentlichen Folgendes: Ursprünglich ist ja mindestens die Trias in unserem Gebiete in flacher Neigung oder annähernd eben abgelagert worden, so namentlich der mittlere Buntsandstein auf Blatt Münden selbst bis auf seine allerobersten Schichten, welche nebst dem Röth oder Oberen Buntsandstein sich auf den Nachbarblättern darauf legen, sowie der ganze Muschelkalk und wohl auch der Keuper, welche etwas weiter hin im Osten und im Westen in ganz ähnlicher Entwicklung erhalten sind. Was aber von diesen Schichten auf Blatt Münden fehlt, ist ohne Zweifel zunächst durch Meeres-Abrasion abgetragen worden, später auch durch Abspülung und Erosion.

Dies ergibt sich daraus, daß der obere Teil des Mittleren Buntsandsteins, der „Bausandstein“, auf der Hochfläche nordwestlich von Münden vielfach in größerer Mächtigkeit auftritt, nach Nordwesten an Mächtigkeit abnimmt und endlich verschwindet, sodaß seine Grenze unter dem Tertiär des Gahrenberges quer hindurch-

läuft, ohne mit ihren festen Bänken einen Wall oder eine Kante zu bilden, wie dies sonst allgemein der Fall ist. Erst 6 bis 8 Kilometer weiter nach Nordwesten und Westen, bei Hombressen auf Blatt Hofgeismar, bei Karlsdorf bis Immenhausen und Knickhagen tritt mit geringen Unterbrechungen der Bausandstein in derselben Gesteinsbeschaffenheit wieder auf, in der er auch im Bramwald, auf dem Blümerberg und Kattenbühl sich findet und in großen Steinbrüchen bei Speele gewonnen wird. Nördlich und nordwestlich vom Gahrenberge fehlt also der Bausandstein und zum Teil auch wohl dessen Unterlage, und in dieser Richtung steigen sowohl die Schichten als auch durchschnittlich die Tages-Oberfläche nach dem Junkernkopf und dem Mühlenberg an.

Es liegt daher Grund zu der Annahme vor, daß der Bausandstein hier infolge seiner höheren Lage der Abrasion stärker ausgesetzt war, und daß somit schon vorher eine ungleichmäßige Aufbauchung des Buntsandsteins erfolgt ist. Wann diese aber stattgefunden hat, und ob sie sich nicht mehrfach wiederholt hat, bleibt zunächst noch eine offene Frage, ebenso wie die Zeit der Abrasion, welche wohl schon zur Jura-Zeit begonnen haben könnte, sicher aber noch bis in die Tertiärzeit sich wiederholt hat, namentlich bei Beginn der Miocänzeit, da die miocänen Quarzsande in ihrem unteren Teile häufig Gerölle anderer Gesteine enthalten, gelegentlich auch von eisenschüssigem Sandstein des Oberoligocän, und zuweilen nicht auf diesem liegen, sondern unmittelbar auf wesentlich älteren Schichten; mitunter fehlt aber auch unter dem Ober-Oligocän das Mitteloligocän, und häufig fehlen die älteren Braunkohlenbildungen, die ja freilich vielleicht nicht überall zur Ablagerung gelangt sind.

Es kann dies nicht auffällig sein, wenn man berücksichtigt, daß die recht verschiedene Beschaffenheit der hier auftretenden Tertiärschichten: 1. Ältere Braunkohlenbildungen, 2. Rupelthon, 3. Oberoligocän, marin, wesentlich Sande, 4. Miocän, fossilarme Sande, darüber obere Braunkohlenbildungen, ohne Zweifel mit großen Verschiebungen der Meeresräume in ursächlichem Zusammenhange steht, also doch wesentlich mit Senkungen und Hebungen der Erdrinde, so erscheint es auch ziemlich selbstverständlich, daß bei diesen Bewegungen lokale Verwerfungen sowie Sattel- und Mulden-Faltungen der Schichten entstehen konnten[1]), und daß lokale Abrasionen höher hervorragender Gebiete sich wiederholen konnten.

1) Der neuerdings mehrfach gebrauchte Ausdruck „präoligocäne“ Verwerfungen dürfte somit recht oft unzutreffend sein.

Die Muldenbiegung der Braunkohlen des Gahrenberges erfolgte jedenfalls recht spät, etwa gegen Ende der Miocän-Zeit, vielleicht gleichzeitig mit der Entstehung der Spalte in der Muldenlinie, durch welche später der Basalt empordrang, und mit der Senkung der Muldenlinie um rund 50 m auf etwa 2500 m Länge.

Etwas jünger könnten füglich alle die Spalten sein, welche eingesunkene Streifen und Schollen von Tertiärgebirge enthalten und Veranlassung zu der Entstehung der jetzigen, oft so tief eingeschnittenen Täler gaben, zumal wenn diese Täler von der Südost-Nordwestrichtung wesentlich abweichen, wie die des Osterbaches und des Hemelbaches. Auf die Ostwestrichtung einzelner Störungen wirkten vielleicht die Ausläufer des „Warburger Sattels" noch ein, der von Stille und Kraiß ausführlicher beschrieben wurde und auf Blatt Hofgeismar noch deutlich zu erkennen ist bis in die Nähe von Karlsdorf. Es könnten dies übrigens etwas abgelenkte Südost-Nordwest-Störungen sein.

Auf die Ablagerung der Miocänschichten, welche ja auf allen hohen Bergkuppen der weiten Umgebung von Kassel sich in derselben, wenig gestörten Lage finden, folgte unzweifelhaft eine neue, ausgedehnte Abrasion, welche den größten Teil dieser ursprünglich wohl zusammenhängenden Decke von Tertiärbildungen hinwegnahm, soweit sie nicht durch Basaltkegel oder Decken einigermaßen geschützt waren, sodaß nur vereinzelte Schollen davon auf den Hochflächen oder zwischen ältere Gesteine eingesunken erhalten blieben, nicht selten auch mit Blöcken von Quarzit (Knollenstein). Natürlich wurde in unserem Gebiet hierbei auch Buntsandstein in großem Umfange fortgerissen, von welchem viel Schutt und Brocken auf den Hochflächen zu finden sind, auch auf den erhaltenen Tertiärschichten. Es erinnert dies an den Plänerschutt, welcher über den anscheinend miocänen Quarzsanden auf der Pläner-Hochfläche der Sackberge bei Alfeld liegt und Granitblöcke enthält, und wohl der älteren Diluvialzeit angehört, der Zeit, wo der vorrückende nordische Gletscher die Wässer so hoch anstaute.

Da nordisches Diluvium nach Süden nur etwa bis in die Gegend von Kreiensen reicht, so läßt sich nur aus dem analogen Vorkommen schließen, daß auch die Buntsandsteinschuttmassen auf der Hochfläche des Reinhardswaldes und die letzte Abrasion der älteren Diluvialzeit entstammen könnten.

Es mag zu dieser Zeit wohl auch hoch liegender Lehm abgelagert worden sein; doch ist dieser kaum vom „Molkenboden" und Verwitterungslehm des Buntsandsteins zu unterscheiden, der viel-

fach das anstehende Gestein ganz verhüllt, zumal als „Gehängelehm".

Die Ausbildung von Tälern dürfte alsbald nach Entstehung der Bruchlinien und Graben-Versenkungen begonnen haben, kann aber erst dann in größtem Maßstabe fortgeschritten sein, als die letzte Überflutnng aufhörte, und die Wasserläufe stärkeres Gefälle bekamen. Dann erst konnten Abhangsschutt und Deltabildungen an Bedeutung gewinnen, wie in den losen Sanden südlich Volkmarshausen und in den Lehmgruben bei Bonaforth, sowie die in den ausgedehnten Deltabildungen bei Vaake, Veckerhagen und Hemeln.

Auffällig ist die .geringe Entwicklung des Weserschotters, welcher, abgesehen von Lagern nahe der Talsohle bei Grifte, Hilwartshausen und Hemeln etc., südöstlich von Vaacke in einem schmalen Bande sich von knapp 20 m über der Weser südöstlich vom Ahlebach allmählich bis zu fast 40 m in die Höhe zieht, sodaß von einer Terrasse hier kaum die Rede sein kann, ebenso wenig wie nördlich vom Eichhof. Vielleicht ist dies dadurch zu erklären, daß das Tal hier schnell vertieft wurde, und daß der Ahlebach die Strömung der Weser ablenkte oder ihre Ablagerungen mit fortführte, bis endlich Lehm alles Ältere bedeckte.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1912. Beiheft.

Inhalt:

Von der
Akademie der Wissenschaften, Göttingen
genehmigter Nachdruck
KRAUS REPRINT LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1967

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 26. Oktober 1912.

F. Leo, Satyros βίος Εὐριπίδου. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1912, S. 273).

Derselbe legt vor: P. Kehr, Nachträge zu den Papsturkunden Italiens VI. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

Beide Aufsätze sind während der Ferien eingegangen.

W. Voigt, Ueber elektrische und magnetische Doppelbrechung. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

F. Klein legt (durch den Vorsitzenden Sekretär) das Heft der Math. Encykl. V 1, 5 vor.

G. Tammann, Zur Theorie des Polymorphismus. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

Oeffentliche Sitzung am 9. November 1912.

L. Morsbach redet über grammatisches und psychologisches Geschlecht im Englischen. (Erscheint in den Nachrichten, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 2).

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß.

Gesammelt von **F. Klein** und **M. Brendel.**

III. Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie.

Von

L. Schlesinger in Gießen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juli 1912 vom Vorsitzenden Sekretär mit einer Mitteilung von F. Klein.

„Dem Einzelnen bleibe die Freiheit, sich mit dem zu beschäftigen, was ihn anzieht, was ihm Freude macht, was ihm nützlich deucht; aber das eigentliche Studium der Menschheit ist der Mensch."

Goethe, Wahlverwandtschaften, VII. Kap.
Aus Ottiliens Tagebuch.

1. Einleitendes und Übersicht über das benutzte Material.

Wollte man versuchen, allein an der Hand der von Gauß selbst durch den Druck veröffentlichten Abhandlungen sich ein Bild zu entwerfen von den Einsichten, die Gauß sich auf dem Gebiete der Funktionentheorie[1]) erworben hat, so würde dieses Bild ein nach mehreren Seiten hin unvollständiges sein. Hat doch Gauß vielleicht sparsamer als irgend ein anderer Forscher seinen Zeitgenossen aus dem Schatze seiner Kenntnisse gespendet und überdies in seinen Veröffentlichungen größeren Wert auf eine vollendete Darstellung gelegt als auf die Wiedergabe des Gedankenganges, der ihn zu seinen Resultaten geführt hat. Dazu kommt noch die ihm eigentümliche Scheu, mit Anschauungen und Methoden vor die Öffentlichkeit zu treten, die gar zu umstürzlerisch er-

1) Wir bezeichnen mit diesem zu Gauß' Zeiten weniger gebräuchlichen Terminus dasjenige wohlumgrenzte Gebiet der reinen Analysis, das man in neuerer Zeit mit diesem Namen belegt.

scheinen könnten[1]), und das daraus entspringende Bestreben, sich in seinen Publikationen den Gewohnheiten seiner Zeitgenossen anzupassen.

So müssen wir neben den in Betracht kommenden von Gauß zum Druck beförderten Arbeiten als mit diesen gleichberechtigte Quellen heranziehen:

1) den Nachlaß an handschriftlichen Aufzeichnungen wissenschaftlichen Inhalts,

2) den Briefwechsel mit Bessel, W. Bolyai, Olbers, Schumacher und anderen[2]).

3) Nachrichten über mündliche Mitteilungen von Gauß, soweit sie uns in mehr oder minder authentischer Form überliefert sind.

Der handschriftliche Nachlaß, der zur Zeit im Gauß-Archiv der Göttinger Sternwarte aufbewahrt wird, ist schon von dem ersten Herausgeber der Gaußschen Werke, E. J. Schering, in einem gewissen Maße verwertet worden.

Aus den Nachlaßteilen, die sich auf funktionentheoretische Gegenstände beziehen, hat Schering eine Anzahl von Abhandlungen zusammengestellt, die im III. Bande der Gaußschen Werke, S. 207—230 und S. 361—490 abgedruckt sind. Ein Teil dieser Abhandlungen ist eine in allem wesentlichen unveränderte Wiedergabe von Gaußschen Handschriften[3]); Schering hat aber vielfach die von ihm abgedruckten Aufzeichnungen, ohne Rücksicht auf die Zeit ihrer Entstehung, nach Gegenständen geordnet, wohl

---

1) Vergl. z. B. in einem Briefe an Bessel vom 27. Januar 1829 (Bessel-Gauß Briefwechsel, Leipzig 1880, S. 490): „Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber [über „die ersten Gründe der Geometrie"] zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte."

2) 1. Gauß-Bessel, Briefwechsel, Leipzig 1880 (von 1804, Dez. 21—1844, Aug. 15); 2. Gauß-W. Bolyai, Briefwechsel, Leipzig 1899 (von 1797, Sept. 29—1853, Febr. 6); 3. [Gauß-Olbers, Briefwechsel] Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke; II. Band, Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß, Berlin 1. Abt. 1900, 2. Abt. 1909; (von 1802, Jan. 18—1839, Mai 30). 4. Gauß-Schumacher, Briefwechsel Altona I (1860), II (1860), III (1861), IV (1862), V (1863), VI (1865) (von 1808, April 2—1850, Novemb. 4).

3) 1. Determinatio seriei nostrae, S. 207—229; 2. De origine proprietatibusque generalibus numerorum arithmetico-geometricorum, und De functionibus transcendentibus quae ex differentatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur, S. 361—374; 3. Elegantiores integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates, S. 404—412; 4. De curva lemniscata, S. 413—432; 5. Zur Theorie der neuen Transcendenten I—V, S. 433—480; 6. Pentagramma mirificum, S. 481—490.

weil es ihm unmöglich schien, viele dieser Aufzeichnungen auch nur annähernd zu datieren. Über die Herkunft der einzelnen Stücke geben die Werke III, S. 491—496 abgedruckten Bemerkungen Scherings nur einige Hinweise. Die Abhandlung „Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel" (Werke III, S. 375—402) kann als ein von Scherings Hand aufgeführtes Bauwerk bezeichnet werden, in das einzelne von Gauß herrührende Steine eingefügt sind. Sie kann demnach als Material für die Wiederherstellung des Gaußschen Gedankenganges nicht eigentlich benutzt werden.

Eine wertvolle Nachlese des funktionentheoretischen Nachlasses hat Herr Fricke im VIII. Bande der Werke gegeben[1]). Herr Fricke war schon in der Lage, das von Herrn Stäckel 1898 aufgefundene Tagebuch (oder Notizenjournal) zu benutzen, in das Gauß von 1796—1814 kurze Notizen über die Gegenstände seiner wissenschaftlichen Beschäftigung zumeist mit genauer Datierung einzutragen pflegte. Dieses Tagebuch wurde 1901 von Herrn F. Klein mit Anmerkungen herausgegeben[2]), die ihrerseits auch eine Reihe von bis dahin nicht veröffentlichten sonstigen Aufzeichnungen von Gauß wiedergaben und damit neue Fragestellungen aufrollten. An der Hand dieses Tagebuchs ist es fortschreitend möglich geworden, Einsicht zu gewinnen in den Gang der Entwicklung von Gauß' funktionentheoretischen Forschungen, indem die Eintragungen des Tagebuchs einerseits vielfach eine Datierung der in verschiedenen Heften, Büchern und auf Zetteln befindlichen Aufzeichnungen ermöglichen, andererseits aber auch Kunde geben von Resultaten, von denen in dem übrigen handschriftlichen Nachlaß keine Spur vorhanden ist.

Neben diesen bisher veröffentlichten Quellen durfte ich auch den handschriftlichen Nachlaß selbst benutzen[3]), und ich habe demselben

1) S. 65—67; 69—75; 76—79; 80—83; 84—85; 93—94; 96; 98; 99—105; 106—111.

2) Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin 1901; Mathematische Annalen, 57 (1901), S. 1—34. Auf den letzteren Abdruck beziehen sich die im folgenden vorkommenden Zitate.

3) Ich habe die folgenden Teile des Nachlasses durchgearbeitet:

1. Das Tagebuch (Notizenjournal).
2. Die Schedae.
   - Aa: Schedae Nr. I. Jul. 1798.
   - Ab: Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov.
   - Ac: Varia, Novbr. 1799. Imprimis de Integrali $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+\mu\mu \sin\varphi^2)}}$.

noch eine Anzahl bisher nicht veröffentlichter Aufzeichnungen entnehmen können, die zum Teil bereits mit den erforderlichen Erläuterungen in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht worden sind[1]), während ein anderer Teil im folgenden, teils im Text, teils im Anhang zum Abdruck gelangt[2]).

Obwohl nun dieses reichhaltige Material im Ganzen einen befriedigenden Einblick in den Entwickelungsgang von Gauß' funktionentheoretischem Schaffen gewährt, bleiben doch im einzelnen noch manche Lücken, die durch Vermutungen ausgefüllt werden müssen, wie ja auch sonst, der Natur der Sache nach, der subjek-

---

An: Cereri, Palladi, Junoni sacrum, Febr. 1805.

3. Leiste „Die Arithmetik und Algebra", durchschossenes Exemplar mit handschriftlichen Aufzeichnungen von Gauß. (Im folgenden kurz mit Leiste zitiert).

4. Die Handbücher:

   15 (Ba). Opuscula varii Argumenti. VolumenPrimum. Brunovici 1800.

   16 (Bb). Den astronomischen Wissenschaften gewidmet. November 1801.

   17 (Bc). Astronomische Untersuchungen und Rechnungen vornehmlich über die Ceres Ferdinandea. 1802.

   18 (Bd). Mathematische Brouillons. October 1805.

   19 (Be). Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik. Angefangen im May 1809.

5. Zwei Kapseln mit Zetteln, und auf einzelne Blätter geschriebenen größeren Entwürfen, die in einzelne Umschläge (Enveloppen) geordnet sind. (Die folgenden Überschriften sind nicht von Gauß).

   Fa. Reihen im allgemeinen.
   Fb. Lagrangesche Reihe.
   Fc. Reihe $1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \text{etc.}$
   Fd. Tafeln der Π-Funktion.
   Ff. Arithm.-geom. Mittel, ältere Untersuchungen.
   Fg. Modulfunktion.
   Fh. Lemniskatische Funktionen.
   Fi. Allgemeine elliptische Funktionen und Integrale.
   Fm. Varia analytica.

1) Materialien u.s.w. II „C. F. Gauss: Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1796—1799"; ich zitiere diese Publikation im Folgenden stets als „Fragmente".

2) Die Stellen des Textes, wo sich solche bisher nicht veröffentlichte Auszüge aus Gaußschen Handschriften finden, sind aus dem Verzeichnis am Schluß zu ersehen.

tiven Auffassung ein verhältnismäßig breiter Raum verstattet werden muß. Ich werde aber bestrebt sein, allemal das tatsächlich Erweisbare von diesen subjektiven Momenten scharf zu sondern und überhaupt die letzteren auf ein möglichst geringes Maß zu reduzieren.

In mannigfacher Weise wird der Bericht, den wir über Gauß' Tätigkeit gerade in den entscheidenden Jahren zu erstatten haben werden durch die Abhandlung von Herrn P. Bachmann[1]) ergänzt, indem ja die funktionentheoretischen und die zahlentheoretischen Untersuchungen von Gauß in inniger Wechselbeziehung zu einander stehen.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß wir es hier ausschließlich mit Gauß zu tun haben; nicht um eine Entwickelungsgeschichte der Analysis im XIX. Jahrhundert handelt es sich, sondern einzig und allein um eine Geschichte der Entwickelung von Gauß' Gedanken. Es würde nicht angehen, aus dem von Gauß bei seinen Lebzeiten zurückgehaltenen Material Prioritätsansprüche zu Gunsten von Gauß, gegenüber solchen Mathematikern zu konstruieren, die Resultate, die Gauß für sich schon früher entwickelt, aber nicht bekannt gemacht hatte, später oder gleichzeitig durchaus unabhängig und von diesen Untersuchungen von Gauß unbeeinflußt gefunden haben. Die Feststellung, daß ein Mathematiker eine Entdeckung gemacht hat, die auch dem Geiste des princeps mathematicorum entsprungen war, soll den Ruhm des zweiten Entdeckers nicht schmälern, sondern ihn erhöhen!

2. Traditionen über die erste Jugendzeit 1791—1795.

In einem April 1816 datierten Briefe an Schumacher[2]) schreibt Gauß: „Haben Sie denn wirklich vergessen, daß das arithmetisch-geometrische Mittel, mit welchem Hr. Degen sich beschäftigt, ganz dasselbe ist, womit ich mich seit 1791 beschäftigt habe, und jetzt einen ziemlichen Quartband darüber schreiben könnte?" Hiernach hat also Gauß im Jahre 1791, d. h. im Alter von 14 Jahren, begonnen, sich mit dem agM. zu beschäftigen[3]).

---

1) Materialien u. s. w. I, Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten.

2) G.-S. Briefw. I, S. 125; auf diesen Brief kommen wir später noch ausführlich zurück.

3) Die betreffende Stelle des Abdrucks wurde durch Herrn Brendel mit dem Originalbriefe verglichen und für durchaus authentisch befunden.

Ob er ganz von selbst auf das agM. gekommen ist, oder ob er von irgend einer Seite her eine Anregung empfangen hat, wird sich wohl kaum feststellen lassen[1]). Jedenfalls sagt er in der

1) Bekanntlich hat Lagrange (Mémoires de Turin II (1784/85), S. 237 = Oeuvres II (1868), S. 251 ff.) in der Abhandlung „Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré" den Algorithmus des agM. aufgestellt. Er geht dabei (Oeuvres II, S. 264) von der (Landenschen) Transformation:

$$y' = \frac{y\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}}{1 \pm q^2y^2}$$

aus, durch die sich

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}} \quad \text{in} \quad \frac{dy'}{\sqrt{(1 \pm p'^2y'^2)(1 \pm q'^2y'^2)}}$$

verwandelt, wo

$$p' = p + \sqrt{p^2 - q^2}, \qquad q' = p - \sqrt{p^2 - q^2}$$

ist; für

$$p + q = m, \quad p - q = n, \quad p' + q' = m', \quad p' - q' = n'$$

hat man also

$$m' = m + n, \quad n' = 2\sqrt{mn}.$$

Er bemerkt dann (a. a. O. S. 271), daß bei wiederholter Anwendung dieser Transformation, die sich ergebenden Folgen $p, p', p'', \ldots$ und $q, q', q'', \ldots$ von einander weg divergieren (sont divergentes l'une par rapport à l'autre), sodaß man also, indem man sie nach rückwärts hin fortsetzt, zwei Folgen $\ldots {}''p, {}'p, p$ und $\ldots {}''q, {}'q, q$ erhält, die gegen einander konvergieren. Es ist dann

$$p = {}'p + \sqrt{{}'p^2 + {}'q^2}, \quad q = {}'p - \sqrt{{}'p^2 + {}'q^2} \quad \text{u. s. w.},$$

also

$${}'p = \frac{p+q}{2}, \quad {}'q = \sqrt{pq}; \quad {}''p = \frac{{}'p + {}'q}{2}, \quad {}''q = \sqrt{{}'p\,{}'q}; \text{ u. s. w.},$$

sodaß die korrespondierenden Glieder stets das arithmetische bezw. geometrische Mittel der vorhergehenden sind. Wenn nun $p > q$, so hat man offenbar ${}'p < p$, ${}'q > q$, ${}'q < {}'p$, weil

$${}'p - {}'q = \frac{p+q}{2} - \sqrt{pq} = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2;$$

die Reihe $p, {}'p, {}''p, \ldots$ ist also eine abnehmende, die Reihe $q, {}'q, {}''q, \ldots$ dagegen eine zunehmende, und der Unterschied der korrespondierenden Glieder nimmt ins Unendliche ab. Setzt man dann wieder

$$y = \frac{{}'y\sqrt{(1 \pm {}'p^2\,{}'y^2)(1 \pm {}'q^2\,{}'y^2)}}{1 \pm {}'q^2\,{}'y^2} \quad \text{u. s. w.}$$

so ist

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}} = \frac{d'y}{\sqrt{1 \pm {}'p^2\,{}'y^2)(1 \pm {}'q^2\,{}'y^2)}} = \text{u. s. w.},$$

Anzeige der Abhandlung „Determinatio attractionis etc." (1818, Werke III, S. 360) ausdrücklich, daß er die auf das agM. bezüglichen Resultate, die er in jener Abhandlung zum ersten Male von sich aus veröffentlicht, „so wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen Lagrange's und Legendre's gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Form darstellen zu müssen geglaubt hat, ... theils weil jene Form ihm wesentliche Vorzüge zu haben schien, theils weil sie gerade so den Anfang einer viel ausgedehnteren Theorie ausmachen, wo seine Arbeit eine ganz verschiedene Richtung von der der genannten Geometer genommen hat".

Das in der zitierten Briefstelle bezeichnete Jahr 1791 erscheint auch durch den Umstand verbürgt, daß Gauß (nach Mitteilung von Herrn Brendel) in diesem Jahre eine Anzahl mathematischer Bücher geschenkt erhalten hat, und er sich darum dieses Jahres auch 1816 noch wohl erinnert haben mag.

Da Gauß zu jener Zeit noch keine Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung gehabt hat, so wird man sich etwa denken müssen, daß er die Annäherung der sukzessiven arithmetischen und geometrischen Mittel aus zwei Zahlen aneinander bemerkt und sich vielleicht auch irgend eine Vorstellung von dem Grenzwert gebildet haben könnte, dem diese Mittel zustreben. Schering berichtet[1]) „nach Mitteilungen über eine mündliche Äußerung von Gauß", daß Gauß „im Jahre 1794 die Beziehungen zwischen den ag-Mitteln und den Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadratzahlen fortschreiten, gekannt zu haben scheint[2])".

Dieser Algorithmus wird zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int \frac{M\,dy}{\sqrt{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)}},$$

wo M eine beliebige rationale Funktion von y^2 bedeutet, und (S. 283) insbesondere auf das bei der Rektifikation der Ellipse und Hyperbel auftretende Integral

$$\int \frac{(1 - e^2 x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - e^2 x^2)}}$$

angewandt. — Wir fügen diesem kurzen Bericht über Lagranges Arbeit noch die Bemerkung hinzu, daß man den gemeinsamen Grenzwert, dem die Folgen $p, 'p, ''p, \ldots$ und $q, 'q, ''q, \ldots$ zustreben, nach Gauß, das agM. zwischen p und q nennt und mit $M(p, q)$ bezeichnet.

1) Gauß Werke III, S. 493.

2) Diese Beziehungen lassen sich mit Benutzung der von Gauß später angewandten Bezeichnungen kurz so darstellen: Setzt man

Zu dieser Äußerung Scherings bemerken wir das Folgende. Reihen, deren Exponenten mit den Quadratzahlen fortschreiten bezw. arithmetische Progressionen zweiter Ordnung bilden, sind schon im XVII. Jahrhundert aufgetreten, nämlich bei der Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Aufsätzen von Jacob Bernoulli und Leibniz[1]), auch hat Daniel Bernoulli[2]) in einem Briefe an Euler vom 14. April 1742 die Frage aufgeworfen: „si a est numerus fractus, invenire summam seriei $a + a^4 + a^9 + a^{16} + \text{etc.}$".

Euler selbst hat sich mit der in Rede stehenden Art von Reihen von 1741 an zu wiederholten Malen beschäftigt; zuerst wohl in einer Abhandlung, die 1752 erschienen ist[3]). Ob Gauß

(1) $$\begin{cases} p(y) = 1 + 2y + 2y^4 + 2y^9 + \ldots, \\ q(y) = 1 - 2y + 2y^4 - 2y^9 + \ldots, \\ r(y) = 2y^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{9}{4}} + 2y^{\frac{25}{4}} + \ldots, \end{cases}$$

so ist

(2) $$(p(y^2))^2 = \tfrac{1}{2}[p(y)^2 + q(y)^2], \qquad (q(y^2))^2 = \sqrt{p(y)^2 \cdot q(y)^2}, \text{ u. s. w.}$$

Ferner hat man

(3) $$r(y)^4 = p(y)^4 - q(y)^4,$$

und, wenn wir mit $M(a, b)$ das agM. zwischen a und b bezeichnen,

(4) $$M(p(y)^2, q(y)^2) = 1, \qquad \frac{\pi}{M(p(y)^2, r(y)^2)} = -\log y.$$

Sind a, b, c drei durch die Relation $c^2 = a^2 - b^2$ verknüpfte Größen, und setzt man

(5) $$-\pi \frac{M(a, b)}{M(a, c)} = \log y,$$

so gelten die Darstellungen

(6) $$a = M(a, b)\,p(y)^2, \qquad b = M(a, b)\,q(y)^2, \qquad c = M(a, b)\,r(y)^2.$$

1) Acta Eruditorum 1690, S. 219—223 bezw. 358—360. Auf diese Abhandlungen hat neuerdings G. Eneström hingewiesen, Bibliotheca mathematica (3) 9, S. 206—210 (1909).

2) Siehe den zitierten Aufsatz von Eneström, S. 209, Fußnote 3).

3) Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leur diviseurs, Bibliothèque impartiale 3 (1751) S. 10—31; [Eneström, Nr. 175]; wieder abgedruckt Commentat. arithm. 2 (1849), 639—647; Opera postuma 1 (1862), 76—84. Nach Jacobi (Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß, herausgegeb. von Stäckel und Ahrens, Leipzig 1908, S. 59, 60) hat Euler diese Abhandlung am 22. Juni 1747 in der Berliner Akademie gelesen, gewisse Entwickelungen daraus aber schon im Januar 1741 an Daniel Bernoulli mitgeteilt. Jacobi bezeichnet (ebenda) diese Abhandlung Eulers als „eine erste Redaktion der Observatio de summis divisorum" (Novi commentarii

die Eulerschen Entwickelungen schon im Jahre 1794 gekannt hat,

---

Acad. sc. Petrop. 5 [1754/5] 1760, S. 59—74, Enestr. Nr. 243) und spricht sich über dieselbe wie folgt aus: „Sie ist nämlich der erste Fall gewesen, in welchem Reihen aufgetreten sind, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, und auf diese Reihen ist durch mich die Theorie der elliptischen Transzendenten gegründet worden. Die Eulersche Formel ist ein spezieller Fall einer Formel, welche wohl das wichtigste und fruchtbarste ist, was ich in reiner Mathematik erfunden habe:

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(z-z^{-1})(1-qz^2)(1-q^2z^2)(1-q^3z^2)\ldots$$
$$(1-qz^{-2})(1-q^2z^{-2})(1-q^3z^{-2})\ldots = (z-z^{-1}) - q(z^3-z^{-3}) + q^3(z^5-z^{-5})$$
$$- q^6(z^7-z^{-7}) + q^{10}(z^9-z^{-9})\ldots,$$

wo die Exponenten von q [d. h.] 1, 3, 6, 10 etc. die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man für z eine imaginäre Kubikwurzel der Einheit: so erhält man die Eulersche Formel. Hierdurch habe ich sie mit der Trisektion der elliptischen Integrale in Verbindung gebracht. Differenziert man nach z und setzt dann $z=1$, so erhält man auch für den Kubus des Eulerschen Produktes die schöne Entwickelung

$$(7)\quad [(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots]^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - 11q^{15} + \text{etc.}“$$

Die erste von Jacobi angegebene Formel (die übrigens a. a. O. von Jacobi fehlerhaft wiedergegeben ist, indem auf der linken Seite statt z^2 und z^{-2} überall z und z^{-1} gesetzt ist) geht, wie in den „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ (Jacobis Werke I, S. 234) gezeigt wird, durch eine einfache Transformation (man hat $-qz^2$ für z, dann q für q^2 zu setzen und mit z zu multiplizieren) aus der Formel

$$(8)\quad \begin{aligned}&(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\ldots\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\ldots\\ &= \frac{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}\end{aligned}$$

hervor, die, wie wir sehen werden, von Gauß 1800 aufgestellt worden ist (vergl. Gauß' Werke III, S. 434 letzte Gleichung, ferner S. 440, 464). Die von Euler angegebene Formel lautet (in den Jacobischen Zeichen)

$$(9)\quad \begin{aligned}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots &= 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\ldots\\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu q^{\frac{3\nu^2+\nu}{2}}\end{aligned}$$

(vergl. Jacobi an Fuß, S. 23, Fuß an Jacobi, S. 42; Fundamenta, Werke I, S. 237 Gl. (6)), sie findet sich bei Gauß, Werke III, S. 448, Gl. 23; die letzte von Jacobi angegebene Formel (7) steht bei Gauß, Werke III, S. 440, Zeile 5 v. u. Übrigens hängen diese Identitäten, wie Jacobi, Fundamenta, Werke I, S. 237 bemerkt, aufs engste mit den von Gauß in der „Summatio quarundam serierum singularium“ (1808, Werke II, S. 9 ff.) gegebenen Formeln zusammen, vergl. hierzu die Abhandlung Jacobis, Crelles Journal 32, Werke VI, S. 302. Weitere historische Notizen über das Auftreten der Formel (9) bei Euler findet man in der erwähnten Jacobischen Abhandlung und in dem Aufsatze von P. Stäckel, Bibliotheca mathem. (III) 11, 220 ff.

läßt sich kaum feststellen; später hat er sie sicher kennen gelernt, da sie sich zum Teil auch in der „Introductio in analysin infinitorum (1748)“ in dem Kapitel De partitione numerorum finden, ein Werk, daß sich Gauß (vergl. seinen Brief an W. Bolyai vom 30. Dez. 1798, Gauß-Bolyai Briefwechsel S. 15) nebst den „Institutiones calculi differentialis und integralis“ 1798 gekauft hat.

Jedenfalls ist es wohl möglich, daß Gauß, der (nach Mitteilungen von Herrn Brendel) etwa 1793—94 begonnen hat mit unendlichen Reihen zu operieren, auch mit solchen Reihen gerechnet und ihren Zusammenhang mit dem agM. bemerkt hat. Da aus dieser ersten Jugendperiode von Gauß' Schaffen Aufzeichnungen, die sich auf das agM. beziehen, nicht erhalten sind, so läßt sich kaum etwas Sicheres darüber feststellen. Wir werden jedoch in der Schilderung der historischen Jugendperiode, die mit dem Jahre 1796 beginnt, über Aufzeichnungen zu berichten haben, die als ein Niederschlag der als verloren anzusehenden älteren Notizen angesehen werden dürfen, und die mit jenen beiden Daten 1791 (Gauß an Schumacher) und 1794 (Schering) jedenfalls nicht im Widerspruch stehen.

Ehe wir nun den Boden dieser historischen Jugendperiode betreten, führen wir der Vollständigkeit wegen noch an, daß Gauß im art. 186 der Theoria motus[1]) erklärt, er habe sich des Prinzips der Methode der kleinsten Quadrate schon seit 1795 bedient. Im Zusammenhange hiermit mag auch gleich darauf hingewiesen werden, daß Gauß sein ganzes Leben hindurch viel und gern numerisch gerechnet hat. Er hat nicht nur bei den geodätischen und astronomischen Arbeiten der späteren Jahre sich in Bezug auf Genauigkeit der Rechnung nicht genug tun können, sondern sich, wie wir sehen werden, des numerischen Kalküls einerseits zur Verifikation von Resultaten bedient, die er auf analytischem Wege erhalten hatte, andererseits aber auch dazu, um durch numerische Induktion neue Wahrheiten zu entdecken. Beides hat er mit den großen Analysten des XVIII. Jahrhunderts, namentlich mit Euler gemein. Bei den Nachfolgern von Gauß verkümmert dieses Verfahren immer mehr und mehr.

---

1) Werke Bd. VII, S. 235 (vergl. Borchardt in Jacobis Werken I, S. 399) „Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 usi sumus, ...“

3. Die historische Jugendperiode: 1796 bis zur Doktorpromotion 16. Juli 1799[1]). Tagebuch, Leiste, Scheda Aa.

a) Allgemeines. Inversion von Integralen.

Mit dem Jahre 1796 beginnen die Aufzeichnungen des Tagebuchs. Die Notizen auf den leeren Blättern des Leiste stammen der Hauptsache nach aus den Jahren 1796—1797[2]), da im Jahre 1798 die als Schedae bezeichneten Heftchen beginnen[3]); man wird aber die Möglichkeit zulassen müssen, daß Gauß auch noch 1798, wenn er etwa während der Arbeit die Notizen in Leiste zu vergleichen hatte, auf frei gebliebenen Stellen der einzelnen Blätter, Aufzeichnungen eintrug, die mit jenen älteren Notizen in Zusammenhang stehen. Eine genaue Datierung ist also zumeist nur an der Hand des Tagebuches möglich; Leiste und ebenso auch die Schedae selbst liefern mit wenigen Ausnahmen nur gewisse obere und untere Zeitgrenzen.

Im September 1796 hat Gauß die erste der Aufzeichnungen in sein Tagebuch gemacht, die sich auf einen ausgesprochen funktionentheoretischen Gegenstand beziehen[4]). Es ist die Reihenentwickelung für die Umkehrungsfunktion $x = \psi(z)$ des Integrals

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

nach positiven ganzen Potenzen von z. Die folgende Notiz 33) läßt auch sofort den Gedankengang erkennen, der Gauß zu dieser Betrachtung führt; sie gibt nämlich die analoge Entwicklung für die Umkehrfunktion des allgemeineren Integrals

---

1) Briefwechsel Gauß-Bolyai, S. 34.

2) Vgl. Klein, Mathem. Annalen 57, S. 4 und 20.

3) Die älteste Scheda Aa trägt das Datum Juli 1798.

4) Math. Ann. 57, S. 10, Notiz 32). Dieses selbe Integral und seine Umkehrung findet sich auch auf einem aus dem Jahre 1796 stammenden Blättchen (Fh), betitelt: Exercitationes Mathematicae. Anschließend daran betrachtet Gauß auch das lemniskatische Integral. Es heißt daselbst:

„Si Φ: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = x$ erit

$$\varphi x = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{120}x^9 - \frac{11}{15600}x^{13} + \frac{211}{13000 \,.\, 272}x^{17}“$$

Diese Entwicklung stimmt überein mit der auf dem Zettel betitelt „Elegantiores Integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates“ (Fh) gegebenen (abgedruckt Werke III, S. 405, art. [4], Zeile 5 v. u.).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}},$$

so daß es sich einfach um den Versuch handelt nach der Analogie der Funktion

$$x = \sin\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

allgemeinere Funktionen aufzufinden. Von einer Unterscheidung der Fälle $n = 2$, $n = 3, 4$, $n > 4$ ist keine Rede[1]).

Aus dem Jahre 1796 stammen noch fünf in unser Gebiet gehörige Tagebuchnotizen[2]), von denen nur die letzte besonders erwähnt werden mag, da sie sich auf die Lagrangesche Reihe bezieht, ein Gegenstand, der Gauß auch späterhin noch wiederholt beschäftigt hat[3]). Daß Gauß der Frage der Reiheninversion seine besondere Aufmerksamkeit zugewandt hat, erklärt sich daraus, daß er namentlich am Anfang seiner analytischen Forschungen die Methode der Reihenentwicklung als heuristisches Hilfsmittel mit Vorliebe verwendet; wir werden dies bestätigt finden nicht nur bei den auf die Umkehrung der Integrale algebraischer Funktionen bezüglichen Untersuchungen, sondern auch bei den Arbeiten über das agM.

Die Tagebuchnotizen des Jahres 1796 korrespondieren zum Teil mit Aufzeichnungen im Leiste; so Note 6) mit Leiste S. 6, Note 39) mit Leiste S. 8, Note 48) mit Leiste S. 13, Note 49) mit Leiste S. 10, 11. Es läßt sich daraus der Schluß ziehen, daß diejenigen Leistenotizen, die hinter der Seite 13 stehen, jedenfalls aus einer späteren Zeit stammen werden.

Zu Anfang des Jahres 1797 beginnt Gauß sich systematisch mit der Theorie der elliptischen d. h. zunächst der lemniskatischen

---

1) Wesentlich tiefer geht die (von ihrem Herausgeber Herrn Fricke nicht datierte) Notiz Werke Bd. VIII S. 93, 94; wir kommen auf diese später zurück, da sie aus späterer Zeit stammt.

2) 45)—49) ebenda S. 12. Es mag hier auf die beiden wahrscheinlich zu einander gehörigen Tagebuchnotizen 42), 43) vom Oktober 1796 (ebenda S. 11) hingewiesen werden, die absichtlich in rätselhafter Form gehalten sind. Daß das „Vicimus GEGAN" der Notiz 43) auf das agM. bezogen werden könnte, habe ich in den „Fragmenten" hervorgehoben.

3) Bei S. 10—11 des Leiste findet sich eine Aufzeichnung betitelt: „Beweis des Lagrangeschen Lehrsatzes"; ferner sind zwei Blätter vorhanden (Fb), die auch aus 1796 stammen dürften, das eine hat den Titel „Versuch eines neuen Beweises des La Grangischen Lehrsatzes", das andere ist Werke VIII, S. 76—79 abgedruckt.

Funktionen zu beschäftigen. Dieser Gegenstand hat ihn in Verbindung mit der Untersuchung der allgemeineren Transzendenten, die aus der sogenannten Gaußschen Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

entspringen, viele Jahrzehnte hindurch, wenn auch mit Unterbrechungen beschäftigt. Obwohl Gauß über diese seine Untersuchungen nur verhältnismäßig wenig veröffentlicht hat, so haben dieselben doch für die Entwickelung seiner funktionentheoretischen Gedanken eine so ausschlaggebende Rolle gespielt, daß wir diese Arbeiten mit besonderer Sorgfalt verfolgen müssen.

Ein flüchtiger Blick wird auf den Stand zu werfen sein, in dem sich die Theorie der elliptischen Integrale befand, als Gauß ihr seine Bemühungen zuwandte. Im Vordergrund des Interesses stand das Integral zweiter Gattung, das die Rektifikation der Ellipse und der Hyperbel lieferte, mit der sich wohl zuerst Maclaurin beschäftigt hat. Die Landensche Transformation war zwar von Lagrange in der bereits oben zitierten Abhandlung auch auf das Integral erster Gattung angewandt worden, aber im Grunde genommen schien nur die einfache Form, in der sich bei Euler das Additionstheorem der Integrale erster Gattung dargeboten hatte, diese Integrale als ein geeignetes Objekt für die weitere Untersuchung zu bezeichnen.

Gauß hatte, wie wir gesehen haben, von vornherein (1796) in gewissen speziellen Integralen erster Gattung die Quelle für eine Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen gesucht; er hat aber damit parallel und durchaus unabhängig davon das agM. in Verbindung mit den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen, und wir werden zeigen, wie bei ihm diese beiden Fäden anfangs von einander unbeeinflußt neben einander herlaufen, bis sie sich — erst verhältnismäßig spät, nämlich 1799 — mit einander vereinigen.

Es möge gleich vorweg ausgesprochen werden, was die im folgenden zu schildernde Untersuchung des handschriftlichen Nachlasses ergeben hat.

Gauß behandelt das lemniskatische Integral erster Gattung, in dem er die erste und am nächsten liegende Weiterführung des trigonometrischen Integrals erkennt, und führt die Theorie der daraus entspringenden Funktionen zu einem hohen Grade der Entwickelung; daneben arbeitet er auch an dem agM. weiter, dessen Zusammenhang mit der Rektifikation der Ellipse er gekannt zu haben scheint. Der

Zusammenhang zwischen dem agM. und dem Integrale erster Gattung bleibt ihm lange Zeit verborgen, er entdeckt ihn erst Ende des Jahres 1799 auf einem merkwürdigen Umwege, gewissermaßen durch die Beobachtung der numerischen Übereinstimmung zweier Größen bis auf die elfte Dezimalstelle. Von da ab laufen jene beiden Fäden in der Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen zusammen, in der sie sich gleichsam zu einer höheren Einheit verbinden. Wir werden der besseren Übersicht wegen diese beiden Fäden, so lange sie von einander gesondert verlaufen, auch gesondert verfolgen und zwar wollen wir zuerst die Theorie der lemniskatischen Funktionen, dann jene des agM. betrachten.

b) Die lemniskatischen Funktionen in den Jahren 1797—1799.

Schon die Tagebuchnotiz 50) vom 7. Januar 1797 bringt einige Integralformeln, die mit den lemniskatischen Integralen zusammenhängen. Namentlich die beiden

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} \qquad \int\sqrt{\sin x}\,dx = 2\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ &\text{(II)} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \end{aligned}\right\} y^2 = \frac{\sin}{\cos}x$$

sind in sofern von Interesse, als sie einerseits auf die Stelle hinweisen, von der Gauß die Anregung zur Beschäftigung mit dem lemniskatischen Integral empfangen hat, andrerseits ein Beispiel dafür liefern, wie gewisse Formeln Jahrzehnte hindurch immer wieder bei Gauß wiederkehren, so daß er gleichsam auf verschiedenen Etappen seiner wissenschaftlichen Entwickelung die Tragweite seiner Methode immer an denselben Formeln erprobt.

Auf dem Deckel des Leiste findet sich die folgende Aufzeichnung, die wohl noch aus 1796 stammen dürfte:

[Deckel des Leiste]:

„ $$\int\frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \frac{2}{\int\sqrt{\sin x}\,dx} = 1{,}311031$$

nach Stirling De summatione et interpolatione serierum[1])
1,31102877714605987

---

1) Stirling: Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum (Lond. 1730).

$$\int \sqrt{\sin x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \int dx (\sqrt{x} - \sqrt{\sin x})$$
$$= 2 \int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{(1-p^4)}} \quad \text{“}[1].$$

Der angegebene Wert von $\int\limits_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$ rührt, wie Gauß in der Scheda Aa (1798) angibt (abgedruckt Werke III, S. 413) von Euler her. An dieser Stelle verifiziert Gauß den Stirlingschen Wert dieses Integrals (der lemniskatischen Periode) „utentibus formula arc sin lemn. $\frac{7}{23}$ + 2 arc sin lemn. $\frac{1}{2}$“, also mit Hilfe des Additionstheorems, auf 11 Dezimalstellen[2]). Ebenfalls in der Scheda Aa, aber an späterer Stelle (abgedruckt Werke III, S. 418) berechnet Gauß den Wert von $\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$, wo nach der von Gauß zu jener Zeit benutzten Bezeichnung

$$\varpi = 2 \int\limits_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

ist, auf 26 Dezimalstellen mit Hilfe der zum lemniskatischen Falle gehörigen Thetafunktion. Endlich finden sich die beiden Integrale (I), (II) zwischen den Grenzen 0 und 1 in der 1812 veröffentlichten Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem etc.“ (Werke III, S. 150), wo Gauß die Stirlingschen Werte der beiden Integrale

$$\int\limits_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} \quad \text{und} \quad \int\limits_0^1 \frac{p^2\, dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

auf 17 Dezimalstellen wiedergibt und hinzufügt, daß der Wert des letzteren Integrals „ex nostro calculo, artificio peculiari innixo, = 0,59907011736779610372“ sei. Da das Produkt der beiden Integrale (vergl. ebenda) gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, so ergibt

1) Auf die lemniskatische Periode beziehen sich noch zwei Leisteaufzeichnungen, die ich in den „Fragmenten“ [23]—[28] und [41] veröffentlicht habe. Über diese vgl. a. a. O. S. 17.

2) Auf dem bereits erwähnten Blatte „Elegantiores integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates“ (Fh) findet sich dieselbe Bemerkung.

sich hieraus auch leicht der Wert des ersten Integrals; überdies folgt daraus, daß die erste auf dem Leiste-Deckel stehende Gleichung noch einer Korrektion (des Faktors $\frac{\pi}{4}$ in dem zweiten Gliede) bedarf. Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch, daß die Darstellung der lemniskatischen Periode durch das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ auch in der Scheda Ac (1799—1800) benutzt wird (abgedruckt Werke III, S. 425).

Wir haben diese Wertberechnung der lemniskatischen Periode darum hier so ausführlich dargestellt, weil dieselbe, wie wir sehen werden, in der weiteren Entwickelung des Gaußschen Gedankenganges eine bedeutsame Rolle spielt. Des weiteren sehen wir, daß Gauß zu jener Zeit mit dem Studium des ersten Bandes von Eulers Institutiones calculi integralis beschäftigt war, wo die in der Tagebuchnotiz 50) aufgezeichneten Integrale im VIII. Kapitel behandelt werden. Direkt auf Euler weist die Tagebuchnotiz 52) hin „Criterii Euleriani rationem sponte detexi"; die „Kriterien" sind wahrscheinlich die für die Ausführbarkeit eines binomischen Integrals (siehe Euler a. a. O. Problema 9, § 104 ff.), auf solche Integrale beziehen sich nämlich die beiden folgenden Tagebucheintragungen 53), 54) und die Notiz 59) vom 2. März. Im Leiste stehen hierher gehörige Rechnungen bei S. 27, 91, 92, 104.

Diese immerhin etwas schülerhaften Exerzitien gaben den Anstoß zu durchaus selbständigen Forschungen, die Gauß mit einem Schlage auch in analytischen Fragen hoch über das Niveau seiner Zeitgenossen emporheben.

„Curvam lemniscatam a $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ pendentem perscrutari coepi", so lautet die Tagebuchnotiz 51)[1]) vom 8. Januar 1797. Von Aufzeichnungen über diesen Gegenstand kommen hier zunächst die folgenden in Betracht:

1) Notizen in Leiste S. 16—18, 19 (durchstrichen), 20, 21, 25.
2) die von Schering, Werke III (S. 404—406) unter dem Titel „Elegantiores integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates"

1) Mathem. Ann. 57, S. 12. Damit übereinstimmend die von Schering Werke III, S. 493 erwähnte Notiz auf der letzten Seite der Scheda Ac: Functiones lemniscaticas considerare coeperamus 1797 Jan. 8.

Nr. [1]—[4] abgedruckten schon erwähnten Fragmente, die sich auf losen Blättern gefunden haben. (Fh.)

Gauß hat sich wohl darum dazu entschlossen, das lemniskatische Integral zum Gegenstande eingehender Untersuchungen zu machen, weil er in ihm auf Grund seines Ursprungs aus der Rektifikation der Lemniskate die genuine Analogie des trigonometrischen Integrals zu finden hoffte; daß das Integral, das den Bogen der Ellipse darstellt, keine Analogie mit dem den Kreisbogen liefernden trigonometrischen Integrale darbietet, mußte ihm schon aus der Form des Additionstheorems für die Integrale erster Gattung deutlich werden. Dieses Additionstheorem hat er jedenfalls bei Euler kennen gelernt und es findet sich an mehreren Stellen des Nachlasses, so u. a. in Leiste S. 48 aufgezeichnet [1]). Aus dem Additionstheorem erschließt er zunächst, daß die Umkehrfunktion des lemniskatischen Integrals eine eindeutige und periodische Funktion ist [2]).

Gauß setzt:

$$x = \sin \operatorname{lemn} \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \right)$$

$$\frac{1}{2}\varpi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

1) Es heißt dort: „Integral v[on]

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}} = 0$$

ist

$$\cos\varphi\cos\psi = \cos\mu + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-c^2\sin^2\mu}\,.“$$

2) Gauß hat neben dem lemniskatischen Integral auch die Integrale (Leiste S. 52)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x+x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)}}$$

mit einer Funktion dritten Grades unter den Wurzelzeichen betrachtet. In der Werke VIII, S. 93—94 abgedruckten Notiz — die aber einer späteren Zeit angehört — wird das Integral

$$y = \int_{-1}^{z} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

untersucht. Die Umkehrfunktion $z = P(y)$ wird graphisch „sinnlich gemacht“ und als „einförmige und zwar periodische Funktion“ der (natürlich realen) Variabeln y erkannt. Beide Eigenschaften ergeben sich auch dort aus dem Additionstheorem (vergl. die Anmerkung von Herrn Fricke a. a. O. S. 95).

$$x = \cos \operatorname{lemn}\left(\frac{1}{2}\varpi - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^{1)}$$

und stellt die Additions- und (ganzzahligen) Multiplikationsformeln zusammen. Von den letzteren scheint Gauß alsbald zur Teilungsgleichung übergegangen zu sein, denn am 19. März 1797 trägt er bereits in sein Tagebuch die Notiz ein „Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^{ti} dividendo curvam lemniscatam in n partes“ [2]. Aus dieser Bemerkung geht auch unzweifelhaft hervor, daß Gauß zu jener Zeit (März 1797) schon die zweite (imaginäre) Periode entdeckt hatte, da die doppelte Periodizität, und nur diese, den Grund dafür erkennen läßt, weshalb die Teilungsgleichung vom Grade n^2 ist (vergl. besonders das „Cur“ [3]). Damit war ihm aber nicht nur

1) In der Handschrift bezeichnet Gauß den Wert des Integrals von 0 bis 1 mit $\frac{1}{2}\pi$ und die Umkehrungsfunktion mit

$$x = \operatorname{sn} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \operatorname{cs}\left(\frac{1}{2}\pi - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)$$

In Bezug auf die Bezeichnungen ist noch folgendes zu bemerken. An manchen Stellen (namentlich nach 1798 in Scheda Aa) hat Gauß für den sinus und cosinus lemniscaticus eigene Zeichen; 1797 im Leiste schreibt er anfangs dafür einfach sin, cos oder auch nur s, c; aber auch die im Texte angewandten (von Schering benutzten) Abkürzungen finden sich im Leiste (z. B. bei S. 92, 93). Die Bezeichnung ϖ für die halbe Periode gebraucht Gauß von 1798 an ganz konsequent. Der benutzte Buchstabe ist eine ältere, den Druckwerken des 18. Jhs. eigentümliche Form des π, die sich auch in der „Introductio“ von Euler findet; Gauß will also daran erinnern, daß ϖ für die Lemniskate die analoge Rolle spielt, wie π für den Kreis. In den Aufzeichnungen im Leiste (vergl. Herrn Kleins Anmerkungen, Math. Ann. 57, S. 14, 15) wird der vierte Teil der lemniskatischen Periode mit Π oder geradezu mit π und in der Tagebuchnotiz 63) (Math. Ann. 57, S. 15) mit π^1 (d. h. also das π der Lemniskate!) bezeichnet.

2) Notiz 60), Mathem. Ann. 57, S. 14.

3) In seiner Gedächtnisrede auf Jacobi (Jacobis Werke I, S. 9) bemerkt Dirichlet: „So hatte man ... gefunden, daß der Grad der mit Hilfe des Eulerschen Satzes gebildeten Gleichung, von deren Lösung die Teilung des elliptischen Integrals abhängt, nicht wie in der analogen Frage der Kreisteilung der Anzahl der Teile, sondern dem Quadrate dieser Anzahl gleich ist. Die Bedeutung der reellen Wurzeln, deren Anzahl mit jener übereinstimmt, war leicht ersichtlich, wogegen die zahlreichen imaginären ganz unerklärlich erscheinen mußten. Aber daß hier ein Geheimnis verborgen liege, darüber hatte man vor Abel und Jacobi kein Bewußtsein, und ihnen war es vorbehalten, sich zuerst über diese und ähnliche Erscheinungen zu wundern.“ Vergl. auch a. a. O. S. 11.

Bei S. 88 des Leiste findet sich die folgende Zusammenstellung:

„$0;\ \pm\Pi;\ 2\Pi;\ 3\Pi;\ 4\Pi$ &c
$0;\ \pm\Pi\sqrt{-1};\ \ \pm\Pi\pm\Pi\sqrt{-1}$ &c
$0;\ \pm 2\Pi\sqrt{-1};\ \pm\Pi\pm 2\Pi\sqrt{-1}$ &c, &c.“

der Zugang zu den tiefsten Ergebnissen der Theorie der lemniskatischen Funktionen frei gemacht, sondern er fand sich auch genötigt, seine Funktionen für komplexe Werte der Variabeln zu untersuchen.

Mit den auf die erwähnte Notiz unmittelbar folgenden Tagebuchnotizen[1]) korrespondieren Aufzeichnungen im Leiste von S. 62 an bis über S. 100 hinaus, die wir also mit Sicherheit für die hier in Rede stehende Zeit in Anspruch nehmen können. Gauß bestimmt auf Grund der aus dem Additionstheorem folgenden Formeln die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Funktionen sin lemn und cos lemn und leitet daraus die Darstellung dieser Funktionen in der Form von Quotienten doppelt unendlicher Produkte her; auch für die Konvergenzuntersuchung dieser Produkte findet sich ein Ansatz [2]). Die gedachten Funktionen erscheinen also als Quotienten von ganzen transzendenten Funktionen (wie wir in moderner Terminologie sagen würden), die Gauß anfangs mit M, N, μ, ν später mit P, Q, p, q bezeichnet. Es werden nun diese ganzen Funktionen in gewöhnliche Potenzreihen der Variabeln x entwickelt, und Gauß hebt (Werke III, S. 406) hervor, daß diese Potenzreihen „quavis convergentia data citius convergunt", während die Potenzreihenentwicklung des sin lemn divergiert, wenn

---

Unmittelbar darauf folgt das in der Fußnote 2), hier unten angegebene unendliche Produkt. Das obige Schema gibt in der Ebene der komplexen Variabeln das quadratische Punktgitter, dessen Bedeutung für die Theorie der biquadratischen Reste Herr Bachmann, Materialien I, S. 20, erörtert. Das a. a. O. ebenfalls besprochene allgemeine parallelogrammatische Gitter dürfte Gauß in Betracht gezogen haben, als er im Jahre 1800 die allgemeinen elliptischen Funktionon (den sinus lemniscaticus universalissime acceptus, vgl. weiter unten, S. 42) untersuchte.

1) 61), 62), 63), die beiden letzten vom 21. bezw. 29. März; vergl. auch die beiden Anmerkungen von Herrn Klein a. a. O. S. 14—16.

2) Leiste S. 88 heißt es:

$$„\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\left(\cdots\right.$$

$$\sum\frac{1}{\varrho^4}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\&c\right)“$$

In der Scheda Aa (begonnen Juli 1798; vergl. weiter unten) heißt es (Werke III, S. 415): „Si valores s qui reddunt ipsum sin lemn $\varphi = 0$ secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius s, qui reddunt ipsum sin lemn $\varphi = \infty$, quorum primum sit $P\varphi$, secundum $Q\varphi$, permissum erit (id quod rigorose demonstrare possumus) ponere

$$\text{sin lemn}\,\varphi = \frac{P\varphi}{Q\varphi}\text{“.}$$

die Variable größer ist als $\frac{\varpi}{\sqrt{2}}$ [1]) und die für cos lemn, wenn die Variable größer ist als ϖ. Wie Herr Königsberger [2]) bemerkt hat, sind diese Zähler und Nenner genau die für den lemniskatischen Fall spezialisierten Al-Funktionen von Weierstraß.

Bemerkenswert ist, daß Gauß, wie wir oben gesehen haben, neben dem lemniskatischen Integral auch die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \text{ bezw. } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

betrachtet, offenbar weil es ihm lehrreich erschien, die bei diesen verschiedenen Integralen auftretenden verschiedenen Realitätsverhältnisse mit einander zu vergleichen; so findet sich in Leiste S. 39 eine Darstellung der Umkehrfunktion des ersteren Integrals als Quotient von doppelt unendlichen Produkten [3]).

Gauß stellt nun (Leiste S. 66—71) Formeln auf für die Multiplikation der Variabeln in den ganzen transzendenten Funktionen M, N (den spätern P, Q) mit 2, 4 und mit der komplexen ganzen Zahl $(1+\sqrt{-1})$, die fast vollständig mit denen übereinstimmen, die sich auf S. 63 des Handbuchs **16** (begonnen 1801) finden und (in abgeänderter Reihenfolge) in Werke III (S. 410, 411) abgedruckt sind. Es sind dies zum Teil die Ausführungen der in der Tagebuchnotiz 63) (vom 29. März 1797) angedeuteten Resultate.

In Leiste S. 78 stellt Gauß Differentialrelationen zwischen den Funktionen P, Q auf [4]), mit derselben Bezeichnung (P, Q statt der früheren M, N) ist auf S. 26 des Leiste ein Ausdruck für $P(nx)$ durch P, Q notiert (siehe Math. Ann. 57, S. 16); wir haben

---

1) „sive" sagt Gauß gleich darauf schärfer „si φ^4 ponitur $> \frac{\varpi^4}{4}$". φ ist a. a. O. unabhängige Variable.

2) Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transzendenten (1879), S. 95.

3) Siehe Klein, Math. Ann. 57, S. 15 Fußnote; Gauß macht auch dort den Ansatz zur Konvergenzuntersuchung der unendlichen Produkte.

4) Er setzt

$$\frac{QdP-PdQ}{Q^2} = \sqrt{1-\frac{P^4}{Q^4}}\,[dx] \quad \left[\text{also } \frac{P}{Q} = \sin\text{lemn}\, x\right]$$

und findet

$$\begin{array}{ll} \text{I} & PQ''-QP'' = 2\,QQ-2\,QP+2\,PP \\ \text{II} & QP''-PQ'' = 2\,QQ+2\,QP+2\,PP. \end{array}$$

Die Bezeichnung P, Q läßt darauf schließen, daß diese Eintragung aus dem Jahre 1798 herrührt.

hier ein interessantes Beispiel dafür, daß Gauß manchmal auf früher leer gebliebenen Stellen seiner Notizhefte spätere Eintragungen gemacht hat.

Auf die Teilung der Lemniskate in sieben Teile bezieht sich eine Notiz im Leiste S. 69, auf die Fünfteilung (vgl. Tagebuchnotiz 62) vom 21. März) beziehen sich Notizen in Leiste S. 87, 100, 102.

Ein wesentlich neuer Gedanke tritt Leiste S. 92 auf, nämlich die Entwickelung von sin lemn a in eine Reihe, die nach den sinus der ungeraden Vielfachen von a fortschreitet (vgl. die Tagebuchnotiz 91 b [1])), und S. 93 eine Entwickelung des „arcus cuius sinus lemn. $= s$“ nach sinus der geraden Vielfachen von φ mit in Graden ausgedrückten Zahlenkoeffizienten.

Damit hätten wir den auf lemniskatische Funktionen bezüglichen Inhalt des Leiste erschöpft und das Tagebuch führt uns nun in den Juli des Jahres 1798, wo Gauß (Notiz 92), a. a. O. S. 21) angibt: „de lemniscata elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus, et quidem per methodos quae campum prorsus novum nobis aperiunt.“

Im Juli 1798 beginnt Gauß auch das erste der von ihm Schedae benannten Notizheftchen, die Scheda Aa [2]), mit einer augenscheinlich das früher gefundene zusammenfassenden Redaktion der Untersuchungen über lemniskatische Funktionen, die aber bald (S. 4) abbricht. Die folgenden Auseinandersetzungen (S. 6—8 der Scheda) tragen wieder ganz den Charakter vorläufiger Notizen und dürften die in der Tagebuchnotiz 92) bezeichneten Entdeckungen wiedergeben.

Es werden darin (S. 6) die Zähler und Nenner von sin lemn und cos lemn zunächst als einfach unendliche Produkte dargestellt (Werke III, S. 416 oben), dann sin lemn φ in eine Reihe von Partialbrüchen (S. 7) und (S. 8) in die nach sinus der ungeraden Vielfachen von φ fortschreitende Reihe entwickelt; während aber in

1) Dieselbe steht zwar (Math. Ann. 57, S. 20) an späterer Stelle, vergl. jedoch die bezügliche Bemerkung von Klein, a. a. O. zu 91 a); in der Anmerkung zu 91 b) hat Klein auch die Leiste S. 93 stehende Entwickelung angegeben.

2) Aus dieser sind in den Werken III abgedruckt der Aufsatz „De curva lemniscata“ S. 413 ff.; u. z. artt. 1, 2, 3 (S. 3—4 der Scheda), [4] (S. 6 der Scheda), [6] (Zeile 2—6, S. 7 der Scheda; Zeile 7, 8, Seite 8 der Scheda), [7] (bis Ende der S. 417, S. 14, 15 der Scheda, die beiden ersten Gleichungen auf S. 418, S. 21 und 22 der Scheda), [8] (die erste Gleichung S. 27, die vier folgenden und Zeile 2—4 v. u. S. 28 der Scheda). Die Angabe Scherings (III, S. 494), daß dieser art. [8] aus der Scheda Ac stammt, beruht auf einem Versehen.

Leiste (S. 92, vergl. oben) diese Reihe mit numerischen Koeffizienten vorkommt, sind hier (Werke III, S. 417, Zeile 8) die Koeffizienten in der das allgemeine Gesetz aufzeigenden Form

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \frac{\pi}{\varpi}\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\sin\varphi - \frac{\pi}{\varpi}\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\sin 3\varphi + \cdots$$

gegeben [1]). Die Worte „ex expressionibus supra allatis sequitur" (S. 7) und „hinc vero sequitur" (S. 8) zeigen zwar, daß Gauß diese Entwickelung aus der Entwickelung der Zähler und Nenner von sin lemn und cos lemn in einfach unendliche Produkte erschlossen hat; es wird aber wohl ein „numerisches Experimentieren" vorhergegangen sein [2]).

Es folgen jetzt (S. 8—13 der Scheda Aa) überaus mühsame und scharfe Rechnungen für $\frac{\pi}{\varpi}$, e^{π}, $e^{-\pi}$, $e^{\frac{1}{2}\pi}$, $e^{-\frac{1}{2}\pi}$ (die zum Teil Werke III, S. 431, Zeile 7 v. u. bis 432 abgedruckt sind [3])), die Gauß wahrscheinlich zu dem Zwecke angestellt hat, um zu den Darstellungen der Zähler und Nenner von sin lemn und cos lemn durch trigonometrische Reihen zu gelangen. Dieser bedeutsame Schritt vollzieht sich in folgender Weise.

Es werden für diese Zähler und Nenner $P\varphi$, $Q\varphi$, $p\varphi$, $q\varphi$ [4]) die Logarithmen genommen, die sich aus der Darstellung der Funktionen

1) Vergl. Werke III, S. 417, Zeile 8, wo aber Schering $\psi\varpi$ an Stelle von φ gesetzt hat.

2) Vergl. die Tagebuchnotiz 63) Math. Ann. 57, S. 15, 16 und die Anmerkung von Klein ebenda.

3) Vergl. Klein, Math. Ann. 57, S. 21; Gauß hat bei diesen Rechnungen Methoden der additiven Zahlentheorie zur Anwendung gebracht, namentlich die Darstellung einer Zahl durch die Summe von zwei Quadraten, um ihren Primzahlcharakter zu entscheiden. Solche Rechnungen finden sich vielfach auch schon in Leiste, so S. 48: „discerpendi 283009 in bina quadrata $4225 + 528^2$, Also Primzahl", ferner S. 96, 103 u. s. w. — Die von Schering, Werke III, S. 426—431 abgedruckten, auf wesentlich feineren Methoden beruhenden Rechnungen für die selben Größen entstammen wohl einer späteren Zeit, da darin die Disqu. Arithm. zitiert werden (allerdings ohne Angabe der Artikelnummer, so daß es möglich wäre, daß das genannte Werk damals noch nicht ganz fertig gedruckt war), wahrscheinlich 1800; vgl. weiter unten.

4) Die hier so bezeichneten Funktionen unterscheiden sich von den früher ebenso bezeichneten (die Gauß durch beständig konvergente gewöhnliche Potenzreihen dargestellt hatte) durch einen Exponentialfaktor (vergl. Werke III, S. 416, art. [5]); während jene mit den Weierstraßschen Al bezw. σ-Funktionen identisch sind, fallen die hier auftretenden mit den Jacobischen ϑ-Funktionen zusammen (vergl. Klein, Math. Ann. 57, S. 21, Anm. zu 92)).

selbst in Form von einfach unendlichen Produkten mit Benutzung der Formel

$$\log(1+\mu\cos\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\mu}{1+\sqrt{1-\mu^2}}\right\}^n \frac{\cos n\varphi}{n}$$

(Werke III, S. 417, Scheda Aa, S. 14)

direkt als Reihen ergeben, die nach den cosinus der geraden Vielfachen von φ fortschreiten. Die Koeffizienten dieser Reihen werden dann (Scheda Aa, S. 21, 22, Werke III, 418 oben) numerisch angegeben. Nun knüpft Gauß (Scheda Aa, S. 23) an die auch im Leiste S. 78 (vergl. oben S. 20) aufgezeichneten Differentialbeziehungen der $P\varphi$ u. s. w. an und findet die Darstellung von $P\varphi$ selbst in Form einer Reihe, die nach sinus der Vielfachen von φ fortschreitet, zunächst mit numerischen Koeffizienten [1]). Es tritt dann, — offenbar als Ergebnis einer numerischen Induktion — auf S. 27 der Scheda Aa die Formel

$$\sin\operatorname{lemn}\psi = \sqrt{\frac{4}{e^{\frac{\pi}{2}}}}\cdot\frac{\sin\varphi - e^{-2\pi}\sin 3\varphi + e^{-6\pi}\sin 5\varphi - \cdots}{1+2e^{-\pi}\cos 2\varphi + 2e^{-4\pi}\cos 4\varphi - \cdots}$$

auf, der sich dann auf S. 28 die folgenden anschließen:

$$(10)\quad \begin{cases} P\psi = 2^{3/4}\sqrt{\dfrac{\pi}{\varpi}}\left\{\dfrac{\sin\varphi}{e^{\frac{\pi}{4}}} - \dfrac{\sin 3\varphi}{e^{\frac{9\pi}{4}}} + \dfrac{\sin 5\varphi}{e^{\frac{25\pi}{4}}} - \cdots\right\} \\[2ex] Q\psi = \dfrac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\varpi}}\left\{1 + \dfrac{2\cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \dfrac{2\cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \cdots\right\} \end{cases}$$

---

1) Da die betreffende Stelle aus Scheda Ac von Schering nicht abgedruckt worden ist, setze ich sie hierher: S. 23 steht zwischen Zahlenrechnungen:

$$„P\varphi = 0{,}8393290116 \sin\varphi$$
$$- \quad 15673989 \sin 3\varphi$$
$$+ \quad 55 \sin 5\varphi$$
$$d\,\frac{P}{Q} = \frac{1}{Q}\frac{dP}{d\varphi} - \frac{P}{Q^2}\frac{dQ}{d\varphi} = \sqrt{1-\frac{P^4}{Q^4}}$$
$$QP' - PQ' = \sqrt{Q^4 - P^4}\text{“}$$

und S. 25 (vergl. Klein, Math. Ann. 57, S. 21)

$$P\varphi = 0{,}839329010926691403 \sin\varphi$$
$$- \quad 1567398860966741 \sin 3\varphi$$
$$+ \quad 5466056449 \sin 5\varphi$$
$$- \quad 37 \sin 7\varphi.$$

$$(11)\quad \begin{cases} 1-2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}-2e^{-9\pi}+\cdots=\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} \\ e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{9\pi}{4}}+e^{-\frac{25\pi}{4}}+\cdots=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}.\text{[1]} \end{cases}$$

Es folgen die (Werke III, S. 418, 419 abgedruckten) numerischen Werte von

$$2e^{-\pi},\ 2e^{-4\pi},\ 2e^{-9\pi},\ 2e^{-16\pi},\ 2e^{-25\pi}$$
$$2e^{-\frac{\pi}{4}},\ 2e^{-\frac{9\pi}{4}},\ 2e^{-\frac{25\pi}{4}},$$

die zur numerischen Verifikation der Gleichungen (11) dienen.

Wir schließen damit den Bericht über die lemniskatische Funktionen für die Periode 1797—1798 ab und fügen nur noch einige allgemeine Bemerkungen hinzu.

Auf die Entwickelung des Gaußschen Gedankenganges wirft eine Bemerkung einiges Licht, die Gauß 1828 in einem vom 30. März datierten Briefe an Bessel macht. Er schreibt[2]: „Zur Ausarbeitung der seit vielen Jahren (1798) angestellten Untersuchungen über die transzendenten Funktionen werde ich vorerst wohl noch nicht kommen können, da erst noch mit manchen andern Dingen aufgeräumt werden muß. Herr Abel ist mir, wie ich sehe, jetzt zuvorgekommen und überhebt mich in Beziehung auf etwa ein Drittel dieser Sachen der Mühe, zumal, da er alle Entwickelungen mit Eleganz und Konzision gemacht hat. Er hat gerade denselben Weg genommen, welchen ich 1798 einschlug, daher die große Übereinstimmung der Resultate nicht zu verwundern ist. ... Jeder Mißdeutung zuvorzukommen bemerke ich jedoch, daß ich mich nicht erinnere, von diesen Sachen irgend jemand etwas mitgeteilt zu haben[3].“

In der Tat ist Gauß ebenso wie Abel zunächst vom

1) In diesen Formeln ist (vergl. die Form in der Schering dieselben Bd. III, S. 418, art. [8] wiedergibt) $\psi = \varphi\frac{\varpi}{\pi}$ zu nehmen. In der Handschrift steht auch linker Hand φ. Die Verwechslung von ϖ mit π zieht sich auch in die später (Scheda Ac) entwickelten Formeln für die allgemeinen elliptischen Funktionen hinüber, vergl. weiter unten S. 43.

2) Gauß-Bessel Briefwechsel, S. 477, vergl. auch den Werke III, S. 495 zitierten Brief von Gauß an Crelle.

3) Auf den Einfluß, den Gauß (unmittelbar und mittelbar) auf Abel ausgeübt hat, wird weiter unten näher einzugehen sein.

Additionstheorem ausgegangen, hat mit Hilfe desselben die Periodizität bewiesen, dann die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Funktionen sin lemn und cos lemn bestimmt und aus diesen „secundum regulas notas" die Darstellungen der Zähler und Nenner in der Form von unendlichen Produkten gewonnen.

Mit der Entwickelung der Zähler und Nenner in trigonometrische Reihen wie überhaupt mit der Einführung dieser als selbständiger Transzendenten ist Gauß allerdings schon 1798 erheblich über Abels „Recherches" hinausgegangen, — wenigstens im lemniskatischen Falle. — Diese Einschränkung muß gemacht werden, da keinerlei Anhaltspunkt dafür vorliegt, daß Gauß schon 1798 die allgemeinen elliptischen Funktionen behandelt hat. Die Tagebuchnotiz 95), Oktober 1798, könnte ja so gedeutet werden, daß der „novus in analysi campus" die Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen wäre, aber dieselbe Wendung findet sich auch schon bei Notiz 92) und 1799 bei der Notiz 98) mit dem Zusatze certo, so daß uns diese Deutung unwahrscheinlich zu sein scheint. Bedenkt man überdies, daß Gauß, wie er am 12. März 1816 an Olbers schreibt[1]) 1796—98 „die Hauptsachen der Disquisitiones arithmeticae gebildet" und auch in dieser Zeit[2]) den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gefunden hat, der 1799 als Doktordissertation veröffentlicht wurde, so wird man eher geneigt sein, das Jahr 1798 von weiteren Entdeckungen zu entlasten und die Bemerkung von Gauß über seine und Abels Methoden so aufzufassen, daß die 1798 für den Fall der lemniskatischen Funktionen zur Anwendung gebrachten Methoden gemeint seien, die sich ja dann nachträglich auch im allgemeinen Falle bewährt haben.

c) Die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels in den Jahren 1797—1798.

Zwischen den auf die lemniskatischen Funktionen und auf andere Gegenstände bezüglichen Aufzeichnungen im Leiste finden sich bei den Seiten 25, 26, 37, 48, 49, 56, 83, 88 Notizen über die Theorie des agM. Diese Notizen stammen allem Anscheine nach aus den Jahren 1797—1798, werden aber wenigstens zum Teil als der Niederschlag noch älterer Aufzeichnungen anzusehen seien, die wohl für uns verloren sind[3]). Ein Teil dieser Leistenotizen ist in den

---

1) Gauß-Olbers Briefwechsel I, S. 629.

2) Siehe Tagebuchnotiz 80), Math. Ann. 57, S. 18 und Werke III, S. 30.

3) Der älteste vorhandene Zettel (Ff) zu der in Rede stehenden Theorie trägt die Überschrift »[abgerissen]n termini medii si nomine uti licet arithmetico-

„Fragmenten" unter den Nummern [1]—[41] abgedruckt und mit Erläuterungen versehen, auch die Frage ihrer Entstehungszeit ist daselbst eingehend erörtert; wir können uns demnach hier darauf beschränken, ihren wesentlichen Inhalt kurz zusammenzufassen.

Der elementare Algorithmus des agM. aus zwei realen Zahlen a, b war Gauß zu jener Zeit geläufig; daß er neben dem direkten Mittel $M(a, b)$ auch die durch Rückwärtsverlängerung der aus a, b hervorgehenden Kette und die aus a und $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ hervorgehenden Ketten betrachtet hat, geht aus der folgenden (in den „Fragmenten" nicht wiedergegebenen) bei S. 56 des Leiste befindlichen Aufzeichnung hervor.

[Leiste, S. 56]

$$\begin{array}{lll} \ldots\ 'a,\ a,\ a',\ a'',\ \ldots & A = a+b & \\ \ldots\ 'b,\ b,\ b',\ b'',\ \ldots & B = a-b & \\ \ldots\ 'A,\ A,\ A',\ A'',\ \ldots & A' = a & = \frac{1}{2}('a+'b) \\ \ldots\ 'B,\ B,\ B',\ B'',\ \ldots & B' = \sqrt{a^2-b^2} & = \frac{1}{2}('a-'b) \\ & A'' = \frac{1}{4}(''a+''b) & \\ & B'' = \frac{1}{4}(''a-''b). & \end{array}$$

Gauß hat nun das agM. zwischen den Zahlen a, b $(a > b)$ mit dem Umfange der Ellipse mit den Halbachsen a, b, also mit dem vollständigen elliptischen Integral zweiter Gattung in Verbindung gebracht. Er setzt nämlich die numerische Exzentrizität der Ellipse

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \nu$$

und entwickelt einerseits den Ellipsenquadranten

---

geometrici«. Er enthält u. a. die Reihe (vergl. Werke III, S. 365 letzte Gleichung)

$$»\mathrm{Tm}(1+x) = 1 + z = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}xx - \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \frac{31}{2048}x^5 - \frac{195}{16384}x^6 + \frac{305}{32768}x^7 \ldots«$$

wo $\mathrm{Tm}(1+x)$ das agM. (Terminus medius) zwischen 1 und $1+x$ bedeutet, und die Umkehrung derselben:

$$»1 + x = 1 + 2z + \frac{1}{2}zz - \frac{1}{4}z^3 + \frac{3}{16}z^4 - \frac{5}{32}z^5 + \frac{23}{256}z^6 - \frac{5}{128}z^7 \ldots«$$

Außer diesem Zettel sind noch einige andere vorhanden, die aber viel später geschrieben zu sein scheinen.

$$q = a\int_0^1 \frac{(1-\nu^2 x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2\,.\,1-\nu^2 x^2}},$$

andererseits den mit a multiplizierten reziproken Wert des agM. nach Potenzen von ν:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} q &= \frac{\pi}{2}a\left\{1-\frac{1.1}{2.2}\nu^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}\nu^4-\cdots\right\},\\ \frac{a}{M(a,b)} &= \frac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})} = 1+\frac{1.1}{2.2}\nu^2+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\nu^4+\cdots \end{aligned}\right.$$

Durch Reihenvergleichung findet er dann die Beziehungen

$$(13)\qquad q = \frac{\pi}{2}a\frac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}+\nu\frac{dq}{d\nu},\text{[1]}$$

$$(14)\qquad -\frac{2}{a\pi}\frac{dq}{d\nu} = \frac{\nu}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}+(\nu^2-1)\frac{d}{d\nu}\frac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}$$

(vergl. die Formeln [11] und [38] der „Fragmente"), die historisch in sofern von besonderem Interesse sind, als sie Beispiele für die „relationes inter functiones contiguas" darstellen, für die durch die angegebenen Potenzreihen gelieferten speziellen Fälle der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.

Das lebhafte Interesse, das Gauß schon in sehr früher Zeit für Euler bekundet hat — so hat er sich auf den ersten Durchschußblättern des Leiste eine Zusammenstellung der Schriften Eulers, wahrscheinlich nach der Fußschen Liste, aufgezeichnet — läßt vermuten, daß er die Reihenentwickelungen für q und $\frac{dq}{d\nu}$ der Eu-

---

1) Auf einem Blatte (Ff) finden sich die folgenden Formeln:

$$\text{»}E = 1-\frac{1}{2[2]}xx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4-\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}x^6\ldots.$$

$$F = 1+\frac{1}{2.2}xx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6}x^6\ldots.\text{«}$$

Es wird dann durch Differentiation von F und Reihenvergleichung die Formel

$$(1-xx)\left(F+\frac{x\partial F}{\partial x}\right) = E$$

abgeleitet, die mit der Formel (13) unseres Textes gleichwertig ist. Auch steht auf derselben Seite dieses Blattes die Formel

$$F(x) = \frac{1}{M(1+x,1-x)}.$$

lerschen Abhandlung „Animadversiones in rectificationem ellipsis“ (Opuscula varii argumenti II, 1750, S. 121 ff.) entnommen haben mag, wo diese Entwickelungen in derselben Form auftreten wie in den Leistenotizen. Auch die Methoden, deren sich Gauß bei diesen seinen Untersuchungen bedient hat, erinnern lebhaft an Euler; beide arbeiten mit numerischen Induktionen, beide mit der Transformation und Vergleichung von Potenzreihen (vgl. oben S. 10).

Im höchsten Grade überraschend wirkt aber eine andere Leisteaufzeichnung, in der Gauß völlig unvermittelt durch die Gleichung (vergl. die Formel [6] a. a. O.)

$$\text{(15)} \qquad \frac{v}{M(1, \sqrt{1-v^2})} = (2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{9}{2}} + \cdots)^2 = r^2$$

den Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen herstellt, deren Exponenten die Quadratzahlen sind. Man wird wohl nicht fehlgehen, wenn man diese Notiz mit der Tagebuchnotiz 58) vom 15. Februar 1797 in Verbindung bringt, in der die Reihe

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} - \cdots$$

vorkommt und wo es am Schluß heißt: „unde facile omnes series ubi exp[onentes] ser[iem] sec[undi] ordinis constituunt transformantur“ [1]). Beide Aufzeichnungen zeigen (übereinstimmend mit der Angabe Scherings, vergl. oben), daß Gauß lange ehe ihm die Thetafunktionen, selbst im lemniskatischen Falle, bekannt waren, sich mit Reihen beschäftigt hat, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden.

Wie er die Beziehung solcher Reihen zum agM., insbesondere wie er jene Gleichung (15) gefunden haben mag, läßt sich nur vermuten. Es ist anzunehmen, daß Gauß bemerkt hat, daß die Quadrate der Reihen $p(y)$, $q(y)$, $r(y)$ (vgl. oben Gl. (1) S. 8, Fußnote) den Gesetzen des agM. gehorchen, wenn man y durch y^2, y^4, y^8, ... ersetzt, und daß er daraufhin die Gleichung (15) und die analogen einfach angesetzt hat, indem er sich die Größe z direkt durch jene Gleichung (15) definiert denkt. Für die letztere Annahme sprechen die von Gauß im Leiste aufgezeichneten Gleichungen ([2], [3], a. a. O.)

---

1) In dieser Tagebuchnotiz nimmt Gauß selbst auf die Tagebucheintragung 7) vom 24. Mai 1796 Bezug. Die Reihe $1 + \zeta + \zeta^3 + \zeta^6 + \zeta^{10} + \cdots$ kommt auf S. 26 der Scheda Aa vor; ein Zusammenhang mit den übrigen daselbst befindlichen Aufzeichnungen hat sich nicht feststellen lassen.

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu+\frac{1}{4}\nu^3+\frac{9}{64}\nu^5+\cdots &= 4s+8s^5+\cdots \\ \nu &= 4s-16s^3-56s^5-\cdots, \end{aligned} \right.$$

denen sich noch (a. a. O. [4]) die Gleichung

$$(17) \qquad \frac{2a}{\pi}q = 1-4s^2+20s^4+64s^6+\cdots$$

zugesellt.

Dagegen muß betont werden, daß die Reihen $p(y)$, $q(y)$ erst in späteren Aufzeichnungen (Ende 1799) auftreten, was freilich nicht ausschließt, daß sie Gauß schon früher bekannt waren, zumal die Bezeichnung r in der Gleichung (15) im Leiste wirklich benutzt wird. Die genuine Definition der Größe s durch das agM. (vergl. die Formel (5) S. 8) findet sich gleichfalls erst Ende 1799, und dürfte wohl auch erst zu dieser Zeit entdeckt worden sein. Ich bin jedoch geneigt anzunehmen, daß Gauß schon zu der hier in Rede stehenden Zeit den Grenzwert des agM. $M(1,\nu)$ für ein gegen die Null abnehmendes ν untersucht und bestimmt haben mag, da sich diese Bestimmung (vergl. die „Fragmente")

$$(18) \qquad \lim_{\nu=0} M(1,\nu)\log\frac{4}{\nu} = \frac{\pi}{2}$$

aus der zitierten Eulerschen Abhandlung direkt ergibt, wenn man die von Gauß aufgestellte Relation (13) zwischen q, $\frac{dq}{d\nu}$ und $M(1,\sqrt{1-\nu^2})$ benutzt.

Für die Herleitung der Gleichungen (16), (17) kommt die außerordentliche Gewandheit in Betracht, die sich Gauß schon frühzeitig in dem Operieren mit Reihen, deren Inversion (durch die Lagrangesche Formel, vgl. oben) und Transformation angeeignet hat. Daß er aber die Bedeutung der Größe s gleich erkannt hat, indem er mit ihrer Hilfe in der Gleichung (17) den Ellipsenquadranten als Funktion des Moduls uniformisiert, ist der vorahnenden Kraft des mathematischen Genius zuzuschreiben, dessen geheimnisvolles Wirken wohl nirgends in so überraschender Weise zu verspüren ist, wie eben in den Jugendarbeiten von Gauß.

d) Rückblick. Die Inauguraldissertation (1799).

Wenn wir fragen, was aus dieser Fülle von Einzelresultaten, die Gauß in den wenigen Jahren 1797—1799 gefundenen hat, die prinzipiell nachhaltigste Wirkung auf die Entwicklung seines mathematischen Denkens ausgeübt hat, so werden wir vor allem die

Tatsache in den Vordergrund stellen müssen, daß sich ihm durch die Entdeckung der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktionen die Bedeutung der komplexen Größen enthüllt hat. Und zwar ihre Bedeutung in zwiefacher Hinsicht, nämlich als Zahlen in der Arithmetik und als Variable in der Analysis[1]).

Die Erscheinung, daß der sinus lemniscaticus seinen Wert nicht verändert, wenn das Argument um $(m+n\sqrt{-1})2\varpi$ vermehrt wird, wo m, n reelle ganze Zahlen bedeuten, daß also für diese Funktion die komplexen ganzen Zahlen $m+n\sqrt{-1}$ dieselbe Rolle spielen wie für den sinus die reellen, muß auf Gauß einen tiefen Eindruck gemacht haben, zumal die Ähnlichkeit des Verhaltens der lemniskatischen und der Kreisfunktionen sich auch bei dem Problem der Teilung bemerkbar machte, worauf ja Gauß in jener berühmten Stelle der VII. Section seiner Disquisitiones arithmeticae hingewiesen hat. Wir werden also Jacobi beistimmen müssen, wenn er[2]) über die von Gauß bewirkte Einführung der komplexen ganzen Zahlen in die Theorie der biquadratischen Reste sich wie folgt ausspricht:

„Aber wie einfach jetzt auch eine solche Einführung der komplexen Zahlen als Moduln erscheinen mag, so gehört sie nichtsdestoweniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, daß zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern, daß er aus dem Studium der elliptischen Transzendenten geschöpft ist, und zwar der besonderen Gattung derselben, welche die Rektifikation vom Bogen der Lemniscata gibt. ...... Gauß versichert in den „Disquisitiones arithmeticae“, die Methode seiner Kreisteilung auf die Teilung der ganzen Lemniscata anwenden zu können, und verspricht hierüber ein amplum opus zu einer Zeit, in welcher er sich sicher noch nicht, seinen eigenen späteren Angaben zufolge, mit den biquadratischen Resten beschäftigt hatte. Auch ist es nicht unwahrscheinlich, daß er die Fundamentaltheoreme über biquadratische Reste aus dieser Quelle geschöpft hat.“

Noch unmittelbarer ergab sich aus der Erkenntnis der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktionen die Notwendigkeit, das Gebiet einer veränderlichen Größe dadurch zu erweitern, daß dieser Größe beliebige komplexe Werte beigelegt werden.

Schon Euler hatte zwar die Einführung der komplexen Variabeln in formaler Weise vollzogen, indem er einerseits den Zusammen-

1) Vergl. Bachmann, Materialien I, S. 42, 43.

2) Crelles Journal 19, Jacobis Werke VI, S. 275 ff.

hang zwischen den Kreisfunktionen und der Exponentialfunktion begründet, andererseits die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen untersucht hat[1]). Für Gauß handelte es sich aber darum, durch Eingehn auf die „wahre Metaphysik der imaginären Größen" ihre reale Existenz und damit die Berechtigung, sich ihrer in der Analysis zu bedienen, definitiv zu begründen. Vor der Öffentlichkeit geschieht dies erst im Jahre 1831[2]), weil — wie Gauß sich dort ausdrückt — „es bisher an einer Veranlassung gefehlt hat", er fügt aber gleich hinzu, daß „aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden."

Die erstere Schrift[3]) fällt ihrer Entstehungszeit nach in die hier betrachtete Zeitperiode[4]), wir werden also für das Jahr 1797 einerseits die Entdeckung der Darstellung komplexer Größen durch die Punkte einer Ebene, andrerseits, als erste Anwendung dieser Darstellung, den geometrischen Beweis der Wurzelexistenz anzusetzen haben.

Was zunächst den ersten Punkt betrifft, so gründet man neuerdings die Berechtigung, komplexe Größen als Substrate der formalen Rechenoperationen zu betrachten, auf die von Hamilton[5]) herrührende Auffassung dieser Größen als Paare von reellen bezw. Quadrupel von positiven Größen.

---

1) Über Eulers Untersuchungen zur Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln berichtet Stäckel, Bibliotheca Mathem. (III) 1, S. 113 ff.

2) Anzeige, Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda, Werke II, S. 169 ff.; vgl. besonders S. 175 ff.

3) Demonstratio nova theorematis etc. Inauguraldissertation, Helmstedt 1799, Werke III, S. 1 ff.

4) Vergl. die Tagebuchnotiz 80) Oktober 1797: „Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum. Prom. in dissert. pecul. mense Aug. 1799."

5) Transactions of the Royal Irish Academy 17 (Dublin 1837), S. 293; Lectures on Quaternions (ibid. 1853), Vorrede. Im selben Jahre wie Hamilton hat auch Johann Bolyai in seiner der Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften eingereichten, aber damals nicht veröffentlichten Preisschrift: Responsio ad quaestionem ... ab Incl. Soc. Sc. Jablonowskiana Lipsiae anno 1837 motam, herausgegeben von P. Stäckel, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn XVI (1899), S. 281 ff., dieselbe Auffassung der komplexen Größen, wie sie bei Hamilton auftritt, zur Geltung gebracht. Am Schlusse dieser Abhandlung findet sich eine Kritik der in der oben erwähnten Anzeige entwickelten Auffassung von Gauß, aus der wir die folgenden Stellen hierher setzen:

„Neque notiones imaginaria concernentes in Gött.gel. Anz. [1831] p. 632 usque 638 traditas Ill^{mi} Gauss (salvo respectu summo Viro debito) pro satisfacientibus habere possum. Enim ......

Die Wurzelexistenz für eine Gleichung $f(z) = 0$, wo f eine ganze rationale Funktion von z bedeutet, beweist Gauß, indem er $f(x + yi)$ in seinen realen und imaginären Bestandteil $T + Ui$ spaltet und aus dem Verlaufe der beiden algebraischen Kurven $T = 0$, $U = 0$ für große Werte von $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ erschließt, daß Schnittpunkte dieser Kurven vorhanden sein müssen[1]).

1mo notiones dextri, sinistri, supra, infra etc. non determinabantur, relativae sunt, et tamquam minus geometrica hic evitari debent possuntque;

2do haud concipitur, quomodo ad conclusionem, et quo sensu [perveniatur] quod $+ i$ (ut et $- i$) sit proportionalis media inter $+ 1$ et $- 1$, imprimis quod antea proportio generaliter definita haud sit, ac etiam rhombi pro quadrati sumi possunt;

3tio expositio haec innititur veritati axiomatis XI. dubiosae contemplationique spatii in Arithmetica evitandae; cui priorem quidem incommodo facile remedium afferi potest, sumendo (ut brevis sim) superficiem sphaericam radii infiniti, quam parasphaericam appellare licet,

4to (ut loca minoris momenti praeteream) phrasis: quod alia genera quantitatum in scientia quantitatis admitti non possint, haud probanda est: supra enim satis luculenter ostenditur, quantitates quidem (pro lubitu) quotvis generum introduci posse, sed solum modo non debere; ......"

Gauß hat natürlich von diesen Bemerkungen Johann Bolyai's niemals Kenntnis erhalten. Umso merkwürdiger ist eine Stelle aus einem aus späterer Zeit (jedenfalls nach 1831, vgl. weiter unten S. 89 und 115) stammenden Manuskript von Gauß, betitelt: „Bestimmung der Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Funktionen einer veränderlichen Größe entwickelt werden können" (Fa), wo es S. 3 Fußnote) heißt: „Da hier nicht der Ort ist, in die Metaphysik des Räumlichen weiter einzudringen, so übergehe ich den Umstand, daß die Wechselbeziehung zwischen vorwärts-rückwärts und rechts-links erst durch die Hinzufügung des dritten Gegensatzes oben-unten, zwischen den Raumtheilen, welche die Fläche scheidet, Haltung bekommt, so wie den, daß dieses Verhältniss nicht durch eine Definition a priori gegeben, sondern nur durch Zusammenhalten mit einem wirklich Vorhandenen drei Dimensionen darbietenden erkannt werden kann, insofern in diesem die Namen bereits feststehen. Man vergl. Göttingische gelehrte Anzeigen 1831, S. 637 [Werke II, S. 177]. Die abstracte allgemeine Lehre von den complexen Größen hat mit beiden nichts zu schaffen."

1) Wie P. Stäckel, Bibliotheca Mathematica (III) **1**, S. 124 hervorhebt, hat d'Alembert in seiner Arbeit „Recherches sur le calcul intégral", Histoire de l'Académie 1746 (Berlin, 1748) S. 182—200, derselben die Gauß in den artt. 5. und 6. seiner Dissertation (Werke III, S. 7) kritisch bespricht, die Gleichungen $T = 0$, $U = 0$ als Kurven in der (x, y)-Ebene aufgefaßt, die durch die rechtwinkeligen Koordinaten ihrer Schnittpunkte diejenigen Werte x, y bestimmen, für die $x + y\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ darstellt (vergl. außer der von Stäckel zitierten Stelle Histoire, S. 191, Remarque I-ère, besonders auch a. a. O. S. 188). Es erscheint uns heute sehr naheliegend, von dieser Deutung der Wurzeln $x + yi$, zu der Darstellung einer beliebigen komplexen Größe $x + yi$ durch die Punkte einer Ebene überzugehn.

Kronecker erblickt[1]) „das eigentliche Wesen" der Gaußschen Schlußweise darin, daß für das Kurvensystem $T = 0$, $U = 0$ „die Konfiguration in Bezug auf deren Schnittpunkte innerhalb eines hinreichend groß gewählten Kreises nicht anders ist, wie für diejenigen Kurvensysteme, welche aus einer „reinen" Gleichung desselben Grades hervorgehn". Man könne dies — so fährt er fort — daraus erkennen, daß in der Gaußschen Deduktion „eigentlich nur die höchste Potenz von $x + yi$ und von den Koeffizienten der übrigen Glieder der Gleichung nur die Eigenschaft in Betracht gezogen wird, daß deren absolute Werte unter einer gewissen Grenze liegen, sodaß eine dabei zulässige Veränderung der Koeffizienten die Deduktion nicht berührt[2])."

Daß Gauß in der Inauguraldissertation die Anwendung der komplexen Größen äußerlich vermeidet, dürfte seinen Grund hauptsächlich in dem Bestreben haben, sich den Gewohnheiten seiner Zeitgenossen möglichst anzupassen (vergl. oben S. 2). Als Gauß bei Gelegenheit seines goldenen Doktorjubiläums (1849) eine neue Darstellung seines alten Beweises mit Benutzung komplexer Größen gab[3]), war „der Begriff der komplexen Größen jedermann geläufig" und unter dem „jedermann" dürfen wir wohl auch Gauß selbst mit einbegreifen, denn 1797 hatte auch er vor dem Operieren mit komplexen Größen noch eine gewisse Scheu, die sich z. B. in der Fußnote, Werke III, S. 6, aber auch sonst in seinen Aufzeichnungen deutlich erkennen läßt.

Auf der letzten Seite des Tagebuchs befindet sich die folgende Aufzeichnung:

„Quantitates imaginariae: Quaeritur criterium generale, secundum quod functiones plurium variabilium complexae ab incomplexis dignosci possint."

Ob diese Notiz auch schon in die hier besprochene Jugendzeit

---

1) Berliner Monatsbericht 1878, S. 151, 152.

2) Man hat (vergl. z. B. Rudio, Züricher Vierteljahrsschrift 39, 1894) Bedenken dagegen geltend gemacht, daß sich Gauß (siehe etwa Werke III, S. 27) auf Eigenschaften allgemeiner algebraischer Kurven beruft. Gauß sagt selbst (Werke III, S. 29): „Denique observo, minime impossibile esse, ut demonstratio praecedens ... etiam in forma mere analytica exhibeatur." Bei einer solchen „Arithmetisierung" des Gaußschen Beweises — die meines Wissens bisher nicht durchgeführt ist, deren Durchführung aber in hohem Maße erwünscht wäre — wird es wohl nötig sein, die ganz spezielle Natur der algebraischen Kurven $T = 0$, $U = 0$ auszunutzen.

3) Beiträge zur Theorie der algebr. Gleichungen 1849, Werke III, S. 71 ff. (Jubiläumsschrift).

fällt, läßt sich wohl ebensowenig entscheiden wie die Frage[1]), ob etwa die bereits erwähnte letzte Tagebuchaufzeichnung des Jahres 1798: „Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.[2])“ auf die Funktionen eines komplexen Arguments gedeutet werden könnte.

4. Die Jahre 1799—1800. Scheda Ac. Allgemeine elliptische Funktionen.

Die beiden Fäden (lemniskatische Funktionen und agM.), die wir im vorigen Abschnitte von einander unbeeinflußt neben einander herlaufen sahen, vereinigen sich nach der Tagebuchnotiz 98) am 30. Mai des Jahres 1799, indem Gauß die Bemerkung macht, daß das agM zwischen 1 und $\sqrt{2}$ bis auf die elfte Dezimalstelle mit dem Werte $\frac{\pi}{\varpi}$ übereinstimmt; „qua re demonstrata“ — so fügt er hinzu — „prorsus novus campus in analysi certo aperietur.“

Man wird wohl nicht fehlgehn, wenn man in Bezug auf die Veranlassung zu diesem numerischen Experiment die folgende Annahme macht. Gauß hatte für $\frac{\varpi}{\pi}$ die Darstellung (Scheda Aa, siehe oben S. 24 die zweite der Gleichungen (11))

$$\frac{\varpi}{\pi} = 4\left(e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{9\pi}{4}} + e^{-\frac{25\pi}{4}} + \cdots\right)^2$$

abgeleitet. Andererseits war ihm die Darstellung (Leiste, siehe oben S. 28, Gl. (15))

$$\frac{\nu}{M(1, \sqrt{1-\nu^2})} = 4\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{9}{2}} + z^{\frac{25}{4}} + \cdots\right)^2$$

für den reziproken Wert des agM bekannt. Die Reihen auf den rechten Seiten stimmen für $z = e^{-\frac{\pi}{2}}$ überein. Nun findet sich in der Scheda Aa (S. 10) der Werke III, S. 432 wiedergegebene Wert

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078957;$$

setzt man diesen in die Formel (Leiste, siehe oben S. 29 die zweite der Gleichungen (16))

1) Siehe Bachmann, Materialien I, S. 43.

2) Notiz 95).

$$v = 4z - 16z^3 - 56z^5 - \cdots$$

für z ein, so ergibt sich für v ein Wert, der angenähert gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Nun wäre für $v = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\frac{v}{M(1, \sqrt{1-v^2})} = \frac{1}{M(\sqrt{2}, 1)};$$

Gauß konnte also den Versuch machen, die numerischen Werte von $M(\sqrt{2}, 1)$ und $\frac{\pi}{\varpi}$ mit einander zu vergleichen[1]). Das Resultat dieser Vergleichung wäre die Tagebuchnotiz 98) vom 30. Mai.

Indessen bleiben diese Untersuchungen, wie es scheint, vorläufig liegen; Gauß ist ja zu dieser Zeit mit der Redaktion und dem Druck der „Disquisitiones arithmeticae“ beschäftigt, die Inauguraldissertation wird ebenfalls in diesen Wochen redigiert worden sein[2]) und endlich bezeugt die Tagebuchnotiz 99) vom September 1799, daß Gauß im Sommer dieses Jahres seine Aufmerksamkeit den Prinzipien der Geometrie zugewendet hat[3]).

Erst im November[4]) erfolgt eine, neue Entdeckungen über das agM. anzeigende Tagebuchnotiz, diese noch in Braunschweig, und bald folgen ihr — schon in Helmstedt — zwei weitere Notizen vom 14. und 23. Dezember über denselben Gegenstand[5]). Im No-

1) In den „Fragmenten“ habe ich darauf hingewiesen, daß Gauß nach den in den Leistenotizen enthaltenen Formeln in der Lage gewesen wäre, ohne weiteres die Übereinstimmung von $M(\sqrt{2}, 1)$ mit $\frac{\pi}{\varpi}$ zu erhärten; ich versuche daselbst auch eine Erklärung dafür zu geben, daß Gauß trotzdem im Mai 1799 den Weg der numerischen Induktion betreten hat.

2) Vergl. Brief an Bolyai vom 22. April 1799, Briefw. S. 22.

3) Am 24. Mai ist Gauß mit W. Bolyai vor des letzteren Abreise nach Siebenbürgen zu Clausthal a. Harz zusammengetroffen (Siehe Gauß-Bolyai Briefwechsel S. 26, 27; die Angabe Bolyais a. a. O. S. 146, das Zusammentreffen habe am 24. Juni stattgefunden, beruht auf einem Schreib- oder Gedächtnisfehler). Vielleicht hat dieses Zusammentreffen Gauß zur erneuten Beschäftigung mit den Prinzipien der Geometrie angeregt.

4) Aus einem neuerdings von Herrn Brendel im Gaußarchiv aufgefundenen Briefe, den Joh. Friedr. Pfaff am 24. Nov. an Gauß gerichtet hat, geht hervor, daß Gauß seine Bemerkung vom 30. Mai an Pfaff brieflich mitgeteilt hatte. Pfaff schreibt, er habe sich sehr dafür interessiert, und macht auch einige auf das agM. bezügliche Bemerkungen, die aber den in Rede stehenden Gegenstand nicht unmittelbar berühren. Jedenfalls geht aus diesem Briefe hervor, daß die Beziehungen zwischen Gauß und Pfaff auch wissenschaftlich recht nahe waren. Bekanntlich hat sich Gauß vom Dezember 1799 bis gegen Ostern 1800 in Helmstedt als Hausgenosse von Pfaff aufgehalten. Auf die Beziehungen der beiden Männer wird an anderer Stelle genauer einzugehen sein.

5) 100)—102), vergl. die zugehörigen Anmerkungen von F. Klein.

vember 1799 beginnt Gauß auch ein neues Notizheft, die Scheda Ac, und wir sind durch die vollständige Konkordanz der in diesem Heftchen enthaltenen Aufzeichnungen mit den erwähnten und den weitern Tagebuchnotizen 105), 106), 108) in der glücklichen Lage, nicht nur den Gedankengang von Gauß in dieser an wichtigen Fortschritten so reichen Zeit wiederherstellen, sondern sozusagen auch Tag für Tag verfolgen zu können, wie weit Gauß gekommen war.

Wir geben zunächst eine summarische Inhaltsangabe dieser Scheda.

Sie hat auf dem Titelblatt die Aufschrift „Varia Novbr. 1799“. Dann folgt „Imprimis de integrali $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\mu\mu\sin\varphi^2}}$“, was aber, wie auch Schrift und Tinte zeigte, nicht gleichzeitig mit der Aufschrift selbst, also offenbar später angebracht worden ist. Die Seiten 1—8 enthalten „Grundlehre oder Analysis des Raumes“ (räumliche Koordinaten und sphärische Trigonometrie). Auf S. 7 oben stehen die folgenden Entwickelungen: (abgedruckt Werke III, S. 423, [15])

$$(\alpha)\quad \frac{\varpi}{\pi} = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{8}+\cdots\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(\beta)\quad = \left(1+\frac{1.2.3}{2.4.4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.2.3.5.6.7}{2.4.4.6.8.8}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1.2.3.5.6.7.9.10.11}{2.4.4.6.8.8.10.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(\gamma)\quad = \left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$ [1)]

1) Die Reihe (α) findet sich auch (mit der älteren Bezeichnung Π statt $\frac{1}{2}\varpi$ für die lemniskatische Periode) auf der Rückseite des Titelblatts von Leiste (siehe „Fragmente“ [41]). Ebenda ist auch die Reihe (β) angedeutet und (wie Herr Brendel neuerdings bemerkt hat) mit ihrer Hilfe der Wert von Π auf 15 Dezimalstellen berechnet. Dieselbe Reihe (β) ist auch im Tagebuch (Notiz 91a) mit der Datierung Juli [1798] aufgezeichnet. Es scheint hiernach, daß die erwähnte Notiz auf der Titelrückseite des Leiste aus derselben Zeit (Juli 1798) herrührt, und daß auch die Leiste-Notizen [1]—[22], [29]—[40] der „Fragmente“ damals eingetragen worden sind. Gauß dürfte also zu jener Zeit die letzten Eintragungen in den Leiste gemacht und unmittelbar nachher die Scheda Aa begonnen haben.

Auf S. 9 folgen zunächst zwei Reihenentwickelungen für $\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi}$, von denen die eine Werke III, S. 423, [15] abgedruckt ist, dann kommen die von mir in den „Fragmenten" unter den Nummern [42]—[51] abgedruckten Aufzeichnungen, die bis S. 10 der Scheda gehen. Auf diese bezieht sich die Tagebuchnotiz 100), sodaß die Seiten 9, 10 der Scheda im November noch in Braunschweig geschrieben sein dürften. S. 11 beginnen mit anderer Tinte die Aufzeichnungen „Fragmente" [52]—[74], die mit den Tagebuchnotizen 101), 102) korrespondieren, also in der zweiten Hälfte des Dezember in Helmstädt geschrieben sein dürften; sie füllen die Seiten 11—13 der Scheda. Die auf S. 14 beginnenden Notizen sind im wesentlichen Werke III, S. 423, [16] bis S. 425 abgedruckt. Die folgenden Seiten der Scheda sind viel flüchtiger geschrieben, numerische Rechnungen wechseln mit Formeln. Eine Zusammenstellung der auf der S. 26—51 enthaltenen, auf allgemeine elliptische Funktionen bezüglichen Formeln findet sich — mit teilweise veränderten Bezeichnungen und in vom Original abweichender Reihenfolge — in Bd. III, S. 433—435; auf lemniskatische Funktionen bezügliche Formeln der Scheda Ac sind Werke III, S. 419 Art. [9] (S. 29 der Scheda) und [10] (S. 37 der Scheda) abgedruckt. Art. [8], S. 418 stammt (entgegen den Angaben Scherings S. 494) aus Scheda Aa (vgl. oben S. 21) bis auf die letzte Formel dieser Seite, die der Scheda Ab entnommen ist.

„Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus" heißt es in der Tagebuchnotiz 100) vom November 1799.

Nach den Aufzeichnungen der Scheda Ac handelt es sich dabei wesentlich um zwei Entdeckungen. Die eine betrifft die Koeffizienten der Entwickelung

$$(19) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi . z}} = A + A'\cos\varphi + A''\cos 2\varphi + A'''\cos 3\varphi + \cdots$$

(„Fragmente" [42]), die Gauß durch Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreiten, darstellt, die zweite bezieht sich auf das Verhalten des agM. $M(1, x)$ für große Werte von x.

Aus der Formel (18) folgt mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (16)

$$(20) \qquad \lim_{\nu=0} M(1,\nu)\log z = -\frac{\pi}{2}$$

oder für $\nu = \frac{1}{x}$

(21) $$\lim_{x=\infty} M(1,x)\frac{1}{x}\log\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$$

und dies führt zu dem Ansatz („Fragmente" [45]—[50])

(22) $$M(1,x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\left(x-\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{x^3}-\cdots\right)}{\log\frac{1}{z}}.$$

Dies ist die Darstellung, von der Gauß, Tagebuchnotiz 101) am 14. Dezember 1799 schreibt: „Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus." Nun fährt er fort „nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus."

Dies finden wir auf S. 11 der Scheda Ac ausgeführt; Gauß bezeichnet daselbst den reziproken Wert des Zählers in (22) mit Q, entwickelt diese Größe nach fallenden Potenzen von x und erkennt in ihr den von φ unabhängigen Teil von $(x^2-\cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ (vergl. oben Gleichung (19) und die im Anhang 1. abgedruckten Aufzeichnungen), den er nunmehr mit dem Werte des Integrals

(23) $$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2.x^2-r^2}}$$

identifiziert[1]).

Am 23. Dezember 1799 schreibt Gauß ins Tagebuch: „Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem.".

Er bemerkt also jetzt (siehe die Aufzeichnung [56] der „Fragmente", Scheda Ac, S. 7), daß die Reihenentwickelung für Q mit der für den reziproken Wert des agM. (siehe oben (12) zweite Gleichung) übereinstimmt, daß also einerseits $\frac{1}{Q}$ selbst ein agM. ist, und daß andererseits der reziproke Wert des agM. durch das Integral (23), und durch das konstante Glied der Reihenentwickelung (19) gegeben wird.

Wann Gauß die nun folgenden Aufzeichnungen gemacht hat, die ihn zu den Formeln („Fragmente" [67]—[74])

(24) $$\log z = -\frac{\pi}{2}\,\frac{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}{M(1-\nu)}$$

---

1) Man vergl. hierzu die Darstellung im Handbuch 15, S. 14, abgedruckt in Werke III, S. 370—371, die aus etwas späterer Zeit (1800) stammt.

$$(25)\begin{cases} \dfrac{\nu}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})} = 2(2z+2z^9+\cdots)(1+2z^4+2z^{16}+\cdots), \\ \dfrac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})} = (2z+2z^9+\cdots)^2+(1+2z^4+2z^{16}+\cdots)^2 \end{cases}$$

und damit zu einem gewissen Abschluß der Theorie des agM. führen, läßt sich nicht ganz genau feststellen. Diese Aufzeichnungen gehen bis zur S. 15 der Scheda Ac. Da sich aber auf S. 22 der Scheda die Werke II, S. 311 abgedruckte Aufzeichnung über ternäre Formen findet[1]), und Gauß auf diesen Gegenstand bezügliche Untersuchungen in der Tagebuchnotiz 103) vom 13. Februar 1800 erwähnt, so kann man wohl annehmen, daß er die durch die Gleichungen (24), (25) bezeichneten Entdeckungen vor dem 13. Februar 1800 gemacht hat, und daß erst dann eine Pause in den Arbeiten über elliptische Funktionen eingetreten ist.

Wir sehen, daß Gauß durch die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung erst auf die Bedeutung des Integrals erster Gattung für die allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen aufmerksam geworden ist. Vorher war er offenbar der Ansicht, daß das Analagon der Kreisfunktionen nur bei denjenigen Integralen zu suchen sei, die ähnlich wie das Kreisbogenintegral die Rektifikation gewisser Kurven liefern, also das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ die der Lemniskate, das allgemeine Integral zweiter Gattung die der Ellipse. Aber die weiteren Entwickelungen aus der Theorie des agM. lieferten ihm noch weit mehr als diese bloße Anregung zur Beschäftigung mit dem Integral erster Gattung.

Die Einsicht, daß die 1798 für die lemniskatische Periode gefundenen Reihen (11) (S. 24) sich aus den jetzt für das allgemeine agM. gefundenen Reihen (25) für $\nu = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ergeben, enthüllte ihm die Bedeutung der auf den linken Seiten von (25) auftretenden Ausdrücke als Perioden (um in moderner Terminologie zu sprechen) des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung.

Große Schwierigkeiten mögen ihm aber die Realitätsverhältnisse bereitet haben. Schon für die Wahl des Moduls bot das lemniskatische Integral keinen rechten Anhaltspunkt, weil für dieses der Modul bald gleich $\sqrt{-1}$ also imaginär, bald gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$, also real und kleiner als Eins erscheint. Wir sehen in der Tat, wie

1) Vergl. Bachmann, Materialien I, S. 19.

Gauß zwischen den verschiedenen Normalformen

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu\cos u}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2\sin^2 u}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)}}$$

(Scheda Ac, S. 26) (Scheda Ac, Titel) (Tagebuch Nr. 105) und Werke VIII, S. 96)

lange Zeit hin- und herschwankt. Wie mühevoll mag ihm erst die Erkenntnis dessen geworden sein, daß der Quotient der Perioden eines elliptischen Integrals erster Gattung allemal eine imaginäre Größe sein muß!

Einen Einblick in diese Zeit des Langens und Bangens gewährt die folgende Aufzeichnung, die sich auf einem Zettel ohne Datum findet, die aber offenbar an den Anfang des Jahres 1800 zu setzen ist [1]):

„Der Radicalfehler, woran meine bisherigen ‚Bestrebungen, den Geist der elliptischen Function zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, daß ich dem Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Theils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugelsector ausdrücken soll.“

Was Gauß hier als „wahrscheinlich“ bezeichnet, wäre also, daß jenes Integral (für e real und kleiner als Eins) zwei reelle Perioden mit incommensurablem Verhältnis besitzt [2]); aber wie ein Blitz leuchtet dieser Irrtum in die Gedankenwerkstatt von Gauß hinein: wir sehen, daß er die komplexe Variable auf der Kugel interpretiert und den dem Periodenparallelogramm entsprechenden Fundamentalbereich entwirft, wir sehen, daß er aus der Existenz zweier realer Perioden auf das Vorhandensein einer unendlich kleinen Periode schließt. Und alles das im Jahre 1800!

Endlich am 1. Mai 1800 heißt es im Tagebuch 105): „Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)}}$$

ad summam universalitatem perduximus“, weiter am 22. Mai, 106):

---

1) Am 1. Mai 1800 hat Gauß nämlich schon völlige Klarheit erreicht, vergl. Tagebuch 105) und weiter unten.

2) Bekanntlich hat auch Abel eine zeitlang mit diesem Paradoxon gekämpft; vergl. Gundelfinger, Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1898, S. 344.

„Incrementum ingens huius theoriae invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia [1]) nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur."

An Aufzeichnungen über die hier bezeichneten Entdeckungen kommen die folgenden in Betracht.

Einmal die beiden in Bd. VIII, S. 92—94 und S. 96 abgedruckten Fragmente, wo Gauß vom elliptischen Integral erster Gattung ausgeht, und zwar in der ersten bereits oben S. 17 erwähnten Notiz [2]) von

$$\int_{-1}^{z} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \Pi(z),$$

in der zweiten [3]) von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-\mu x^2}} = \varphi.$$

Beiden gemeinsam ist der gewissermaßen formale Ansatz für die Umkehrungsfunktion, die für das erste Integral mit Hilfe des Additionstheorems und der realen Periode untersucht wird, während für das zweite Integral die Darstellung der Umkehrungsfunktion $x = f(\varphi)$ in der Form eines Quotienten von beständig konvergenten Potenzreihen (den Weierstraßschen Funktionen Al) in der Weise gegeben wird, daß das Integral zweiter Gattung in der Form

$$u = \int \mu x^2 d\varphi = \int \frac{\mu x^2 dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-\mu x^2}}$$

eingeführt und dann

$$Q\varphi = e^{-\int u d\varphi}$$

gesetzt wird, ein Verfahren, das lebhaft an Jacobis Einführung der Thetafunktion [4]) erinnert. Analog bildet Gauß dann

$$P\varphi = e^{-\int d\varphi \int \frac{d\varphi}{x^2}}$$

---

1) D. h. also die Theorie der lemniskatischen Funktionen.

2) Diese Notiz befindet sich in einem Umschlag zwischen den Rechnungen, die Werke III, S. 426 ff. abgedruckt sind und die (vergl. die Tagebuchnotiz 112) vom 12. Juni 1800) sicher aus 1800 stammen.

3) Die in einem Buche der Gauß-Bibliothek betitelt: „Maupertuisiana" aufgezeichnet ist.

4) Fundamenta, art. 51, Werke I, S. 198; Jacobis $Z(u)$ ist im wesentlichen mit dem Gaußschen u identisch.

und findet einerseits $x = \frac{P}{Q}$, andererseits mit Hilfe der Differentialgleichungen [1])

$$PP'' = P'^2 - Q^2, \quad QQ'' = Q'^2 - \mu P^2$$

die beständig konvergenten Potenzreihen für P und Q. Wir sehen also hier, daß Gauß zunächst weder die doppelte Periodizität noch den Zusammenhang zwischen P und Q ausnutzt.

Neben diesen von dem Integral ausgehenden Ansätzen, die wohl als erste Versuche anzusprechen sein dürften, erscheinen die auf S. 26 der Scheda Ac beginnenden Untersuchungen [2]) sehr viel tiefergehend.

Gauß setzt daselbst von vornherein — ohne von einem elliptischen Integral auszugehen —

$$(26) \qquad \frac{\pi}{M(1, \sqrt{1+\mu^2})} = \varpi, \quad \frac{\pi}{\mu M\left(1, \sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\right)} = \varpi'$$

und bildet — offenbar nach der Analogie der für den sinus lemniscaticus, der dem Werte $\mu = 1$ entspricht, in der Scheda Aa aufgestellten Entwickelung [3]) — den Ausdruck

$$(27) \quad S(\psi\varpi) = \frac{\pi}{\mu\varpi}\left(\frac{4\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{4\sin 3\psi\pi}{e^{\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \text{etc.}\right).$$

Dies ist die Funktion, die Gauß in der weiter unten zu besprechenden Tagebuchnotiz 108) von Ende Mai 1800 den sinus lemniscaticus universalissime acceptus nennt. Er setzt dann

---

1) Man vergl. die analogen Entwickelungen in Leiste S. 78 (siehe oben S. 20) für die lemniskatischen Funktionen.

2) Dieselben sind Werke III, S. 433—435 abgedruckt; ich bemerke aber, daß das Integral $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin u^2}}$ in diesen Aufzeichnungen überhaupt nicht vorkommt. Ich muß einen Teil dieser Aufzeichnungen hier textgetreu und in der ursprünglichen Aufeinanderfolge wiedergeben, da der von Schering bewirkte Abdruck mehrfach von der Handschrift abweicht.

3) Siehe Werke III, S. 417, Zeile 8, vergl. oben S. 23. — In (26) und ebenso im folgenden schreibt Gauß statt $M(1, \sqrt{1+\mu^2})$ kurz $M\sqrt{1+\mu^2}$ für das agM. In den folgenden Gleichungen (27) ff. habe ich — nach dem Vorgange Scherings — an Stelle des von Gauß benutzten Buchstabens n den Buchstaben ψ gesetzt.

(28) $$S\varphi = \frac{T\varphi}{W\varphi},\quad T90^\circ = \sqrt{\cos v},\quad (\operatorname{tg} v = \mu)$$ [1])

und findet die den lemniskatischen Entwickelungen der Scheda Aa (Werke III, S. 418, [8], vergl. die Gleichung (10) oben S. 23) analogen Darstellungen:

(29) $$\begin{cases} W\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu^2}}\left\{1+\frac{2\cos 2\psi\pi}{e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\frac{2\cos 4\psi\pi}{e^{4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\text{etc.}\right\}, \\ \left(\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu^2}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}} = \sqrt{M(1,\cos v)}\right) \\ T\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)}}\left\{\frac{2\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}-\frac{2\sin 3\psi\pi}{e^{\frac{9}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\text{etc.}\right\} \end{cases}$$

und für den „Terminus Constans" von $(S\psi\varpi)^2$ den Ausdruck:

(30) $$\frac{8\pi^2}{\mu^2\varpi^2}\left\{\frac{e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+4e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+9e^{-9\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-\cdots}{1+2e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+2e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\cdots}\right\}.$$

Auf S. 29 der Scheda Ac folgen nun die lemniskatischen Entwickelungen, die Schering Bd. III, S. 419, [9] abgedruckt hat; S. 30 der Scheda steht eine Herleitung des Additionstheorems des allgemeinen Integrals erster Gattung mit dem Zitat „Lagrange, Théorie des fonctions, p. 82", dann folgt auf S. 31 der (von Schering nicht abgedruckte) überaus charakteristische Ansatz:

(31) $$\begin{cases} (T\varphi)^2 = A(1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+2e^{-\frac{8\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\psi\pi+\text{etc.}) \\ \qquad -2B(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 2\psi\pi+e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 6\psi\pi+\text{etc.}), \\ (W\varphi)^2 = C(1+2e^{-\frac{2\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+\text{etc.})+2D(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 2\psi\pi+\text{etc.}) \end{cases}$$ [2]).

---

1) Es ist also $\varphi = \psi\varpi$. Ferner soll $\varphi = 90^0$ hier die Bedeutung $\varphi = \frac{\varpi}{2}$ haben, Gauß denkt also hier sozusagen „lemniskatisch". Auch im folgenden hat Gauß, ähnlich wie bei den lemniskatischen Formeln (siehe S. 24), wiederholt ϖ mit π verwechselt (vergl. unten (31)).

2) In der Handschrift steht rechter Hand irrtümlicherweise φ statt $\psi\pi$, also wieder ϖ an Stelle von π, vergl. oben bei (28).

und die Koeffizienten A, B, C, D werden (wahrscheinlich durch Spezialisierung von φ) als

$$(32)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\cos v\sqrt{M(1,\cos v)}}{2\cos\frac{1}{2}v}, \quad B = \dfrac{\cos v\sqrt{M(1,\cos v)}}{2\sin\frac{1}{2}v}, \\ C = \dfrac{(1+\cos v)\sqrt{M(1,\cos v)}}{2\cos\frac{1}{2}v} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{M(1,\cos v)}, \\ D = \dfrac{(1-\cos v)\sqrt{M(1,\cos v)}}{2\sin\frac{1}{2}v} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{M(1,\cos v)}, \end{cases}$$

bestimmt. Wir erkennen in dieser Rechnung die vollkommen bewußte Anwendung des heute sogenannten Hermiteschen Transformationsprinzips der Thetafunktionen[1]). Daraus folgen dann die Formeln:

$$(33)\quad \begin{cases} (1-\cos v)(T\varphi)^2 + \cos v\,(W\varphi)^2 \\ \qquad = \dfrac{\cos v}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{M(1,\cos v)}\,(1+2e^{-\frac{2\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 4\psi\pi+\cdots), \\ -(1+\cos v)(T\varphi)^2 + \cos v\,(W\varphi)^2 \\ \qquad = \dfrac{2\cos v}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{M(1,\cos v)}\,(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 2\psi\pi+\cdots), \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} (T(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi))^2 = \cos v\,[(W\varphi)^2-(T\varphi)^2], \\ (W(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi))^2 = \dfrac{\sin^2 v\,(T\varphi)^2+\cos^2 v\,(W\varphi)^2}{\cos v}, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} T\varphi\, W(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi) \\ = \dfrac{\sqrt{\cos v\, M(1,\cos v)}}{\sqrt[4]{4\sin v}}\left\{2e^{-\frac{\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin\psi\pi - 2e^{-\frac{9}{8}\cdot\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\sin 3\psi\pi + 2e^{-\frac{25}{8}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\sin 5\psi - \text{etc}\right. \end{cases}$$

---

1) Eine genauere Ausführung dieser Rechnung findet sich in einem jetzt mit 18 bezeichneten Handbuch, S. 228, abgedruckt Werke III, S. 457. Schering datiert die dortige Entwickelung „nach dem 28. April 1809", was damit stimmt, daß sich jene Rechnung auf die Fünfteilung bezieht, die Gauß zufolge der Tagebuchnotiz 140) am 29. Juni 1809 gefunden hat. Daß diese Rechnung auf das Hermitesche Prinzip gegründet ist, hat P. Günther in seinem Habilitationsvortrag (Götting. Nachrichten, 1894, S. 102) hervorgehoben.

2) Die Formeln (34) haben in der Handschrift auf den linken Seiten $\varpi - \varphi$ statt $\frac{1}{2}\varpi - \varphi$; in (35) steht linker Hand irrtümlich $W\varphi$; auf S. 31 der Scheda Ac fehlt in (35) der konstante Faktor auf der rechten Seite vor der Klammer, auf S. 35 wird er als

Man wird diese Entwickelungen als die in der Tagebuchnotiz 106) bezeichneten anzusehen haben. Wir können ihren Inhalt wie folgt charakterisieren.

Um allen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, die sich damals an die Ermittelung der Perioden des elliptischen Integrals für Gauß knüpfen mußten, setzt er nach der Analogie der lemniskatischen Funktionen und gestützt auf die für das agM. gefundenen Resultate, die Entwickelung des sinus lemniscaticus universalissime acceptus $S\varphi$ an, indem die Perioden ϖ, ϖ' [1]) durch agM., gebildet aus einer Größe μ, definiert werden. Die Funktionen T, W sind nicht die reinen Jacobischen Thetafunktionen, sondern sie unterscheiden sich von diesen noch durch konstante Faktoren. Gauß benutzt nun das Hermitesche Transformationsprinzip um die Quadrate der vier Funktionen $T\varphi$, $W\varphi$, $T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$, $W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$ und das Produkt $T\varphi\, W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$ darzustellen [2]). Was er mit dieser Darstellung bezweckt, ist nicht schwer zu erraten.

$$\frac{\cos v\, M(1, \cos v)}{\sqrt[4]{4 \sin v}}$$

angegeben und die Reihe in der Klammer hatte ursprünglich $e^{-\frac{\varpi'\pi}{4\varpi}}$, was aber in einigen Gliedern in $e^{-\frac{\varpi'\pi}{8\varpi}}$ verbessert ist. Auch steht in (33), (35) rechter Hand wieder φ statt $\psi\pi$. In berichtigter Form sind die Formeln (34), (35) Werke III, S. 434, wiedergegeben.

1) Eigentlich sind ϖ und $\sqrt{-1}\,\varpi'$ die Perioden.

2) Zur Bequemlichkeit für den Leser gebe ich die Gaußschen Formeln hier in modernen Bezeichnungen wieder, wobei ich mich an H. Webers „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen" (Braunschweig 1891) anschließen will. Setzt man $q = e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}$, so ist, da $\varphi = \psi\varpi$,

$$W\varphi = \sqrt{M(1, \cos v)}\; \vartheta_{00}(\psi|q) \qquad \vartheta_{00}(\psi|q) = 1 + 2q \cos 2\psi\pi + 2q^{4} \cos 4\psi\pi + 2q^{9} \cos 6\psi\pi + \cdots$$

$$T\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{M(1, \cos v)}\; \vartheta_{11}(\psi|q) \qquad \vartheta_{11}(\psi|q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \psi\pi - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\psi\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\psi\pi + \cdots$$

$$T(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{M(1, \cos v)}\; \vartheta_{10}(\psi|q) \qquad \vartheta_{10}(\psi|q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \psi\pi + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\psi\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\psi\pi + \cdots$$

$$W(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \sqrt{M(1, \cos v)}\; \vartheta_{01}(\psi|q) \qquad \vartheta_{01}(\psi|q) = 1 - 2q \cos 2\psi\pi + 2q^{4} \cos 4\psi\pi - 2q^{9} \cos 6\psi\pi + \cdots$$

Die Formeln (31), (32) geben also $\vartheta_{11}^2(\psi|q)$, $\vartheta_{00}^2(\psi|q)$ dargestellt durch $\vartheta_{00}(2\psi|q^2)$ und $\vartheta_{10}(2\psi|q^2)$, die Formeln (33) sind den folgenden (siehe Weber, a. a. O. S. 79, 80) aequivalent:

Das einemal ergeben die aufgestellten Relationen für die Nullwerte

$$W(0), \quad T(\tfrac{1}{2}\varpi), \quad W(\tfrac{1}{2}\varpi)$$

die Relationen des Algorithmus des agM., also eine Verifikation der Formeln (24), (25), die Gauß in der sogleich zu besprechenden folgenden Aufzeichnung zusammengestellt hat. Hieraufbezieht sich offenbar die Bemerkung der Tagebuchnotiz 106): „per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum a[rithmetico-] g[eometri]corum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur."

Aber noch ein zweites wird durch jene Transformationsformeln ermöglicht. Man kann nämlich mit Hilfe derselben verifizie-

---

$$(33')\begin{cases} 2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{00}(2\psi|q^2) = \vartheta_{00}^2(\psi|q) + \vartheta_{01}^2(\psi|q), & \text{(Weber (16), S. 80)} \\ 2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{10}(2\psi|q^2) = \vartheta_{10}^2(\psi|q) - \vartheta_{11}^2(\psi|q), & \text{(Weber (14), S. 80)} \end{cases}$$

wobei die Gleichungen (34), die die Quadrate der Funktionen $\vartheta_{10}(\psi|q)$, $\vartheta_{01}(\psi|q)$ durch die der Funktionen $\vartheta_{00}(\psi|q)$, $\vartheta_{11}(\psi|q)$ darstellen (vgl. Weber a. a. O. S. 54), heranzuziehen sind. Die Gleichungen (33′) bezw. (33) stellen also die sogenannte Landensche Transformation dar. Dem gegenüber gibt die Gleichung (35) die Darstellung von $\vartheta_{11}(\psi|q^{\frac{1}{2}})$ durch das Produkt $\vartheta_{11}(\psi|q)\;\vartheta_{01}(\psi|q)$ nämlich:

$$(35') \qquad \vartheta_{10}(0|\sqrt{q})\;\vartheta_{11}(\psi|\sqrt{q}) = 2\,\vartheta_{01}(\psi|q)\;\vartheta_{11}(\psi|q), \quad \text{(Weber (10), S. 79)}$$

also die sogenannte Gaußsche Transformation (Determ. attractionis etc.). In Bezug auf die Konstanten haben wir (vergl. die zweite Gleichung (28), $T\left(\frac{\varpi}{2}\right) = \sqrt{\cos v}$, die im wesentlichen auf die in Leiste aufgezeichnete Gleichung (15) hinauskommt; man beachte, daß unser q gleich z^2 ist!)

$$(*) \qquad \frac{1}{M(1, \cos v)} = \vartheta_{00}^2(0|q), \quad \frac{\cos v}{M(1, \cos v)} = \vartheta_{01}^2(0|q), \quad \frac{\sin v}{M(1, \cos v)} = \vartheta_{10}^2(0|q)$$

und die Relationen

$$(**) \qquad \begin{cases} \vartheta_{00}^2(0|q^2) + \vartheta_{10}^2(0|q^2) = \vartheta_{00}^2(0|q), \\ \vartheta_{00}^2(0|q^2) - \vartheta_{10}^2(0|q^2) = \vartheta_{01}^2(0|q), \\ 2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\;\vartheta_{10}(0|q^2) = \vartheta_{10}^2(0|q), \end{cases}$$

die für

$$\begin{array}{l|l} a_0 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{00}^2(0|q) & a_1 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{00}^2(0|q^2) \\ b_0 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{01}^2(0|q) & b_1 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{01}^2(0|q^2) \\ c_0 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{10}^2(0|q) & c_1 = M(a_0, b_0)\;\vartheta_{10}^2(0|q^2) \end{array}$$

den Relationen des agM.:

$$a_0 = a_1 + c_1, \quad b_0 = a_1 - c_1, \quad c_0 = 2\sqrt{a_1 c_1}$$

entsprechen.

ren[1]), daß der sinus lemniscaticus universalissime acceptus $S\varphi$ die Umkehrungsfunktion des Integrals

$$\psi\varpi = \varphi = \int \frac{dS}{\sqrt{1-S^2 \,.\, 1+\mu^2 S^2}},$$

also des Integrals

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}} \qquad (S = \sin u)$$

ist, das Gauß offenbar um die hier in Rede stehende Zeit auf das Titelblatt der Scheda Ac gesetzt hat[2]). Diese Verifikation findet sich in der Scheda Ac nicht, Gauß hat sie aber in einer aus viel späterer Zeit stammenden Aufzeichnung[3]) tatsächlich durchgeführt, was immerhin zeigt, daß sie sich in seinen Gedankengang einfügt. Man wird demnach auf diese Verifikation die erste Bemerkung der Tagebuchnotiz 108) (datiert: Mai. ult. Jun. 2, 3) beziehen können, die also lautet: „Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit.“

Gauß schlägt also den Weg ein, den auch Jacobi in seinen Vorlesungen[4]) gewählt hat, um den Schwierigkeiten auszuweichen, die die für eine direkte Untersuchung des elliptischen Integrals notwendige Integration im komplexen Gebiete darbietet, d. h. er geht von den Thetafunktionen aus. Aber Gauß verfährt im Jahre 1800 sozusagen moderner als Jacobi 1835, indem Gauß das elegante „funktionentheoretische“ Verfahren von Hermite benutzt, während Jacobi die Transformationsformeln zweiten Grades der Thetafunktionen in etwas umständlicher Weise mit Hilfe der Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadraten herleitet[5]).

---

1) Vergl. z. B. Weber, a. a. O. S. 108, 109.

2) Auf S. 33 der Scheda Ac steht das Additionstheorem für dieses Integral.

3) Dieselbe findet sich auf S. 111—112 des Handbuchs 16 (angefangen 1801 November) und ist von Schering, Werke III, S. 401, 402 gekürzt und mit nicht unerheblichen Änderungen gegen die Handschrift abgedruckt. Ich gebe sie im Anhang 2. wieder. Diese Aufzeichnung steht in dem Handbuche nach flächentheoretischen Betrachtungen, die Herr Stäckel, Werke VIII, S. 407 auf 1825 datiert. Auf S. 137—145 desselben Handbuchs steht die Werke III, S. 470 ff. abgedruckte Abhandlung, die von Gauß Hand das Datum 1827, Aug. 6. zeigt.

4) 1835/36 ausgearbeitet von Rosenhain, und 1839/40 ausgearbeitet von Borchardt, vergl. Jacobis Werke I, S. 497 ff.

5) Diese von Jacobi angewandte Methode findet sich bei Gauß ebenfalls, aber erst später, in dem Handbuch 19 (begonnen Mai 1809), S. 147, siehe Werke III, S. 384.

Wir fahren jetzt in dem Bericht über die Scheda Ac fort.

Auf S. 34 der Scheda finden wir in eleganter Darstellung die Anwendung der Relationen (31) bis (35) zur Verifikation und zum weitern Ausbau der schon früher gefundenen Formeln für das agM.[1]), die zugleich als die Grundformeln für die Theorie der Modulfunktion gelten können. Es heißt daselbst[2]):

[Scheda Ac, S. 34]

Sit

$$\text{(37)}\qquad \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\frac{M(1,\cos\varphi)}{M(1,\sin\varphi)}}} = z \qquad \text{[vergl. oben Gl. (24)]}$$

$$\text{(38)}\qquad \left\{\begin{aligned} 1 + 2z^4 + 2z^{16} + 2z^{36} + \cdots &= p \\ 2z + 2z^9 + 2z^{25} + \cdots &= q \end{aligned}\right.$$

eritque

$$\text{(39)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{M(1,\cos\varphi)} &= p^2 + q^2 \\ \frac{\sin\varphi}{M(1,\cos\varphi)} &= 2pq \\ \frac{\cos\varphi}{M(1,\cos\varphi)} &= p^2 - q^2 \end{aligned}\right. \qquad \text{[vergl. oben Gl. (25)]}$$

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\text{(40)}\qquad \left\{\begin{aligned} \varpi &= \frac{\pi\cos\varphi}{M(1,\cos\varphi)}, \\ \varpi' &= \frac{\pi\cos\varphi}{M(1,\sin\varphi)}, \end{aligned}\right. \qquad \text{[vergl. oben Gl. (26)]}$$

$$\text{(41)}\qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{M\left(1,\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)}{M\left(1,\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)} = \log\frac{1}{z}$$

$$\text{(42)}\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{M(1,\cos\varphi)}} = p, \quad \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{M(1,\cos\varphi)}} = q$$

---

1) Gauß hat später (1809) aus diesen Relationen einen neuen Algorithmus aufgebaut, der den des agM. als speziellen Fall in sich begreift; wir kommen darauf im Abschnitt 6, c) zurück.

2) Einige der folgenden Formeln hat Herr Klein in der Anmerkung zu den Tagebuchnotizen 105)—111) wiedergegeben, die übrigen sind noch ungedruckt. Man vergl. zum folgenden die Gleichungen (*) und (**) in der Fußnote auf S. 46.

Si ψ ita accipitur ut sit $\sin\psi = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ erit

$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\frac{M(1,\cos\psi)}{M(1,\sin\psi)}}} = z^2 \tag{43}$$

$$\left\{\begin{aligned} p' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q^2} \\ q' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q^2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Die hier mit φ bezeichnete Größe war oben mit v bezeichnet worden. Wir sehen in der Formel

$$\sin\psi = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \tag{45}$$

hier zum ersten Male den Modul der sogenannten Landenschen Transformation auftreten.

Dann kommt auf S. 43 der Scheda die von Schering, Werke III, S. 434, Zeile 10 v. u. ff. abgedruckte Rechnung, die zu der berühmten Identität zwischen den unendlichen Reihen- und Produktdarstellungen der Thetafunktionen führt, der Identität, die wir oben S. 9 Gl. (8) aus den „Fundamenta" Jacobis reproduziert haben, und auf die Gauß (vergl. oben l. c.) später noch vielfach zurückgekommen ist. Wahrscheinlich hat sie Gauß durch Grenzübergang in ähnlicher Weise wie später Cauchy abgeleitet; auf den S. 40, 41 der Scheda finden sich solche auf die Transformation von Produkten in Reihen bezügliche Rechnungen. Auf S. 45 folgt dann die Bestimmung der Nullstellen der Funktionen $T\varphi$ und $W\varphi$ (siehe Werke III, S. 435, Zeile 9—11) und endlich S. 51 die Produktdarstellung dieser beiden Funktionen (Werke III, S. 435, Zeile 12—14) in der definitiven Form[1]).

Man wird diese Entwickelungen mit dem zweiten Satze der Tagebuchnotiz 108) in Verbindung zu bringen haben: „simul omnium functionum lemniscaticarum quae excogitari possunt evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius." In der Tat ist Gauß zufolge jener Identität im Stande, die aus der Auffindung der Nullstellen einer beliebigen Thetafunktion hervorgehende Produktentwickelung in eine Reihenentwickelung umzusetzen.

---

1) In Zeile 12 hat ε die Bedeutung $\sqrt{-1}$.

Die Worte „omnium .... quae excogitari possunt" scheinen darüber hinausgehend aber auch noch anzudeuten, daß Gauß sich des Umstandes bewußt war, daß er einerseits für jedes elliptische Integral erster Gattung, d. h. für jeden beliebigen Wert von $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ mit Hilfe des agM. die Perioden ϖ, ϖ' zu definieren im Stande sei (siehe die Gl. (26)), und daß sich andererseits auch umgekehrt für beliebige ϖ, ϖ' ein zugehöriges μ herstellen läßt, daß er also die Bedeutung der Modulfunktion für die Lösung des Umkehrproblems in ihrer ganzen Tragweite erfaßt hatte. An diese Feststellung schließt sich die Tagebuchnotiz 109) unmittelbar an. Ehe wir jedoch auf diese eingehen, haben wir noch den letzten Satz der Tagebuchnotiz 108) zu erörtern, der wie folgt lautet:

„Praeterea iisdem diebus principia deteximus secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent ita, ut terminos in progressione data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit".

So wie der Übergang von einem Gliede a_n, b_n des Algorithmus des agM. zum nächstfolgenden a_{n+1}, b_{n+1} dem Übergang von z^{2^n} zu $z^{2^{n+1}}$ also der Multiplikation einer Periode mit 2 entspricht, so wird, bei der Interpolation von Gliedern mit einem beliebigen rationalen Index, die eine Periode durch eine ganze Zahl zu teilen sein. Gauß hat also die Gleichungen für die Teilung der Perioden entdeckt. Auch hierüber enthält die Scheda Ac keinerlei Aufzeichnung; Gauß scheint diese Scheda überhaupt gegen Ende Mai 1800 abgeschlossen zu haben.[1]). Im selben Jahre hat er dann ein Handbuch (15) begonnen, dem die Werke III, S. 361—374 abgedruckte Abhandlung über das agM. entstammt, auf die wir weiter unten zurückkommen. Zwischen dem Abschluß der Scheda Ac und dem Beginn dieses Handbuchs hat Gauß wohl anderweitige Notizen gemacht, die aber leider zum größten Teil verloren zu sein scheinen. Es ist dies umso beklagenswerter, als wir dadurch in bezug auf die Tagebuchnotizen 109)—111) mehr oder weniger auf Vermutungen angewiesen sind. Wir wenden uns jetzt diesen Notizen zu.

---

1) Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch, daß die letzten Seiten der Scheda Ac eine Aufzeichnung mit der Überschrift „Motus solidi a nullis viribus sollicitati" enthalten, in der das Problem bis zu dem dabei auftretenden elliptischen Integral geführt wird. Vergl. Schering, Werke III, S. 495.

5. Die nachgelassene Abhandlung über das agM., Modulfunktion.

a) Einleitendes über die Tagebuchnotizen 109—110.

Am 3. Juni 1800 schreibt Gauß in sein Tagebuch: [109.] „Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico-geometrici tum harmonico-geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.“ [1])

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Werte von $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ die Perioden ϖ, ϖ' anzugeben, führt auf die Bestimmung der beiden agM. $M(1, \cos\varphi)$, $M(1, \sin\varphi)$. Gauß scheint — wie oben bemerkt — in der Tagebuchnotiz 108) andeuten zu wollen, daß diese Bestimmung für jeden Wert von μ möglich ist, und soweit es sich um die Herstellung dieser Mittel $M(1, \cos\varphi)$, $M(1, \sin\varphi)$ handelt, hat Gauß auch alle erforderlichen Entwickelungen teils in der oben S. 18 wiedergegebenen Aufzeichnung von S. 34 der

---

1) Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen a, b ist die durch die Gleichung $a_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$ definierte Größe. Demnach wäre der Algorithmus des harmonisch-geometrischen Mittels durch die Gleichungen

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right), \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; a_0 = a, \; b_0 = b)$$

definiert. Es ist also

$$\lim_n \frac{1}{a_n} = \lim_n \frac{1}{b_n} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

und folglich

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = \frac{ab}{M(a, b)},$$

wodurch das harmonisch-geometrische Mittel auf das agM. zurückgeführt ist (vergl. Th. Lohnstein, Zeitschrift für Math. u. Physik **30** (1888), S. 316). In bezug auf dieses Mittel findet sich S. 20 der Scheda Ac die folgende Notiz:

„Terminus constans expressionis

$$\frac{A\, d\varphi}{\sqrt{f + 2g\cos\varphi + 2h\cos\varphi^2}}$$

est medium harmonico-geometricum inter

$$\frac{A}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{(f+h)^2 - 4g^2} + f - h}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{A}{\sqrt[4]{(f+h)^2 - 4g^2}}.\text{“}$$

Scheda Ac, teils in der Abhandlung „De origine proprietatibusque generalibus numerorum arithmetico-geometricorum", die aus dem Jahre 1800 stammt[1]), ausgeführt. Über diese Entwickelungen wird weiter unten im Zusammenhang zu berichten sein.

Mit der bloßen Herstellung der ϖ, ϖ' ist jedoch das in Rede stehende Problem noch nicht erledigt. Es handelt sich noch um die Bildung der Funktionen T und W, die erfordert, daß zur Sicherung der Konvergenz der in Betracht kommenden Reihen der reale Teil von

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{M(1, \cos\varphi)}{M(1, \sin\varphi)} \tag{46}$$

einen positiven Wert habe. Gauß hatte also in jenen ersten Junitagen des Jahres 1800 jedenfalls das Bestreben, der hiermit bezeichneten Schwierigkeit Herr zu werden.

Daß ihm dies alsbald gelungen, zeigt die Tagebuchnotiz 110) vom 5. Juni, worin es heißt: „Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas[2]) immediate applicavimus", wobei der Nachdruck auf das iam ... immediate zu legen wäre. Denn diese Notiz

1) Handbuch 15 (Ba) abgedruckt Werke III, S. 361—374. Gauß schreibt an Schumacher im April 1816 (G.-Schum. Briefw. I, S. 125): Ich habe zwar außer jenem [nämlich dem richtigen agM.] auch noch andere arithmetisch-geometrische Mittel betrachtet, die aber ganz elementarisch sind. Jenes ist das wahre, worüber Sie hier [nämlich in Göttingen, wo sich Schumacher 1808/09 Studien halber aufgehalten hat] auch eine im Jahre 1800 von mir angefangene kleine Abhandlung gelesen haben (in einem blauen Oktavbande, Varia betitelt, worin noch von Ihrer Hand eine Restitutio in Integrum einiger durch einen Dintenfleck unkenntlich gewordener Stellen zu sehen ist)." Dieser „blaue Oktavband" ist das jetzt mit 15 (Ba) bezeichnete Handbuch, die 1800 begonnene Abhandlung, die im Text genannte, in deren Handschrift die Spuren der von Gauß erwähnten Tintenflecke noch deutlich zu erkennen sind. Im Artikel 7. dieser Abhandlung (Werke III, S. 368) wird der Artikel 162. der Disquisitiones arithmeticae (erschienen 1801) zitiert. Man braucht darum der von Gauß gegebenen Datierung kein Mißtrauen entgegenzubringen; denn, wie Gauß an Bolyai schreibt (siehe Briefw. G.-Bolyai, S. 35), hat er am 16. Dezember 1799 in Helmstedt die Korrektur des 18. Bogens der Disqu. arithm. erhalten, der Artikel 162 (S. 176 der Originalausgabe) war also 1800 längst gedruckt. Ein Fragment einer deutschen Redaktion dieser Abhandlung findet sich im Nachlaß (Ff).

2) Transcendentes ellipticae sind elliptische Integrale erster Gattung; in der oben S. 40 wiedergegebenen Zettelaufzeichnung spricht Gauß inbezug auf das Integral $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ auch von der elliptischen Funktion. Das vollständige bezw. allgemeine Integral zweiter Gattung bezeichnet Gauß stets als quadrans oder peripheria bezw. rectificatio ellipseos, vergl. auch die Tagebuchnotiz 111).

besagt eben nichts anderes, als daß Gauß jetzt bewiesen habe, daß der in der Scheda Ac (vergl. die Gleichungen (27)—(29)) definierte sinus lemniscaticus universalissime acceptus, die Umkehrung eines beliebigen Integrals (36) mit willkürlich vorgeschriebenem μ liefert.

Wie Gauß diesen Beweis geliefert hat, lehrt der Umstand, daß die den vollendeten Beweis verkündende Tagebuchnotiz 110) zwei Tage nach der Notiz 109) gemacht worden ist. Die letztere Notiz besagt in moderner Ausdrucksweise, daß Gauß die Fundamentaleigenschaft der Modulfunktion, nämlich ihren Automorphismus entdeckt habe; er wird also die Tatsache, daß der reale Teil des Quotienten $\frac{\varpi'}{\varpi}$ positiv sei für ein willkürliches μ oder φ, mit Hilfe der Theorie der Modulfunktion bewiesen haben.

Daraus kann man nun wieder rückwärts auf die Tragweite der Notiz 109) schließen! Gauß muß in der Zeit zwischen dem 3. und 5. Juni alle die Eigenschaften der Modulfunktion erkannt haben, die zum Beweise des Satzes, daß der reale Teil von $\frac{\varpi'}{\varpi}$ positiv ist, erforderlich sind, er muß also kurz gesagt die wesentlichsten Resultate der Theorie der Modulfunktion entwickelt haben.

Daß es sich am 3. Juni in der Tat um eine große Entdeckung handelte, geht aus der Wendung „felicitas nobis est facta" hervor, und wenn auch die Möglichkeit, ja sogar die Wahrscheinlichkeit vorliegt, daß die in diesen Tagen des Jahres 1800 gefundenen Resultate später ergänzt und vertieft worden sind, so dürfen wir doch die Prinzipien alles dessen, was uns von Gauß über die Theorie der Modulfunktion erhalten ist, für die hier in Rede stehende Zeit in Anspruch nehmen. Wir wollen also diese Entwickelungen — auf die Gefahr hin, einzelne erst nach 1800 gefundene Details schon hier einzuordnen — im Zusammenhange besprechen, zumal für die meisten der einschlägigen Aufzeichnungen eine genaue Datierung zur Zeit nicht möglich ist.

Wir wenden uns nun zur Besprechung der im Zusammenhange mit den Tagebuchnotizen 109), 110) erwähnten Aufzeichnungen, wobei wir die in der Überschrift dieses Abschnittes angegebene Reihenfolge festhalten wollen.

b) Die nachgelassene Abhandlung zur Theorie des agM.

Die schier unübersehbare Fülle von neuen Resultaten und Gesichtspunkten, die die Jahre 1799 und 1800 bei Gauß gezeitigt

haben, mögen in ihm den Entschluß gereift haben, einiges aus dem Schatze der erlangten Einsichten für die Veröffentlichung zu redigieren. In der Tat macht die Abhandlung, über die hier zu berichten ist, in den Artikeln 1—9, einen völlig druckreifen Eindruck. Daß Gauß gerade mit dem elementaren Algorithmus des agM. beginnt, ist durchaus verständlich; daß er später diese Abhandlung abgebrochen und nicht veröffentlicht hat, werden wir nachher zu erklären versuchen.

In der Pars prima wird zunächst das agM. definiert und an Beispielen erläutert, es folgt die Ableitung der Reihenentwickelungen für $M(1+x, 1)$[1], $M(1+x, 1-x)$ und endlich für

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})};$$

die letztere Reihenentwicklung ist uns schon in den Leisteaufzeichnungen begegnet[2]. Im Art. 8 wird mit Hilfe dieser Reihenentwicklung die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hergeleitet, der

(47) $$\frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})} \quad \text{und} \quad \frac{1}{M(1, x)}$$

genügen[3] und auch gezeigt, daß

(48) $$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \frac{\pi}{M(1, \sqrt{1-x^2})}$$

ist[4]. Hieraus ergibt sich nun, daß das konstante Glied der Ent-

1) Diese findet sich (vergl. oben S. 25, 26) auch auf dem ältesten auf das agM. bezüglichen Zettel, der uns erhalten ist.

2) Eine interessante Verifikation dieser letzteren Entwickelung findet sich auf zwei Zetteln (Ff), die ich im Anhang 1. abdrucken lasse.

3) Gauß sagt (Werke III, S. 370) „Hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt.“ Man könnte hiernach die Tagebuchnotiz 102) auch so deuten, daß sie sich auf die Herstellung der linearen Differentialgleichung für den reziproken Wert des agM. bezieht. Die vollständige Konkordanz der Tagebuchnotizen 100)—102) mit den Aufzeichnungen der Scheda Ac spricht aber gegen diese und für die von uns vertretene Auffassung. Übrigens ist diese Frage für die Tatsache, daß Gauß den Zusammenhang zwischen agM. und dem vollständigen Integral erster Gattung vor Ende des Jahres 1799 nicht gekannt hat, insofern ohne Belang, als diese Tatsache schon aus der Tagebuchnotiz 98) mit Sicherheit erschlossen werden kann.

4) Eine ganz direkte und sehr elegante Herleitung der Gleichung (48) gibt Gauß in der Determinatio attractionis (1818, Werke III, S. 352, 353), wo er das agM. als Hilfsmittel für die Berechnung eines kompletten elliptischen Integrals erster Gattung einführt: „Lectoribus autem gratum fore speramus,“ heißt dort,

wicklung von $\sqrt{\beta - \gamma \cos^2 \varphi}$ nach Kosinus der Vielfachen von φ durch den reziproken Wert der agM. zwischen $\sqrt{\beta - \gamma}$ und $\sqrt{\beta}$ gegeben wird. In der Scheda Ac hat Gauß diesen Zusammenhang direkt bewiesen (vergl. oben Gl. (19) und „Fragmente" [42]—[44]) und daraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und π die Gleichung (48) erschlossen. Auf die Betrachtung der Entwickelungs-Koeffizienten von Ausdrücken der Form $\sqrt{\beta - \gamma \cos^2 \varphi}$ scheint Gauß durch Fragen der Störungstheorie geführt worden zu sein (vergl. den Schlußsatz des art. 8, Werke III, S. 371 und auch einen Brief an Olbers vom 3. Sept. 1805 [1])).

„si hacce occasione determinationem harum aliarumque transcendentium [elliptische Integrale] per algorithmum peculiarem expeditissimum explicemus, quo per multos iam abhinc annos frequenter usi sumus, et de quo alio loco copiosius agere propositum est".

1) Briefwechsel Gauß-Olbers I, S. 269; es heißt daselbst: „Ich werde beiher meine angefangenen Arbeiten über die Störung der Planeten fortsetzen, sowohl was zur allgemeinen Theorie als zur Anwendung auf die Asteroïden gehört. In jener ist es von besonderer Wichtigkeit, die Koeffizienten, die aus

$$(a^2 + a'^2 - 2\,aa' \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} = A^0 + 2A' \cos \varphi + 2A'' \cos 2\varphi + 2A''' \cos 3\varphi \text{ etc.}$$

entspringen, leicht angeben zu können." Diesem Briefe an Olbers legte Gauß einen Brief an Bessel bei, den Olbers an den Adressaten befördern sollte, in dem (Briefw. G.-Bessel, S. 10) auch von dieser Entwickelung die Rede ist. Gauß schreibt daselbst: „Nun bin ich im Besitz von besonderen, zum Teil auf ganz heterogen scheinenden Untersuchungen gegründeten Kunstgriffen, jene Koeffizienten [nämlich $A^0, A', A'', \ldots$] zu bestimmen." Es wird also hier auf die von Gauß zu jener Zeit noch geheim gehaltene Methode des agM. angespielt. Aus noch früherer Zeit wie diese beiden Briefe (wahrscheinlich Oktober 1802) dürfte eine Aufzeichnung herrühren, die sich in dem Handbuche 17 betitelt „Astronomische Untersuchungen und Rechnungen vornehmlich über die Ceres Ferdinandea (1802)" auf S. 24 in eine astronomische Untersuchung verflochten vorfindet und Werke VII, S. 384 abgedruckt ist. Es heißt daselbst:

„Man macht $$\frac{1}{\sqrt{(aa + a'a' - 2aa' \cos \omega)}} = \tfrac{1}{2} P + P' \cos \omega + P'' \cos 2\omega + \&c.$$

$$\frac{aa'}{(aa + a'a' - 2\,aa' \cos \omega)^{2:3}} = \tfrac{1}{2} Q + Q' \cos \omega + Q'' \cos 2\omega + \text{etc.}$$

Man macht $\tfrac{1}{2}(a + a') = x$, $\pm \tfrac{1}{2}(a - a') = y$ und bildet die Reihen

x	y	z	auf folgende Art	$x' = \tfrac{1}{2}(x + y)$	$y' = \sqrt{xy}$
x'	y'	z'		$x'' = \tfrac{1}{2}(x' + y')$	$y'' = \sqrt{x'y'}$
x''	y''	z''		&c.	&c.
	&c.				

Für uns besonders interessant ist der Ausspruch von Gauß: (a. a. O. Werke III, S. 371): „Denique monemus, in sequentibus demonstrationem multo generaliorem eorundem theorematum ex principiis magis genuinis datum iri; praetereaque mox etiam omnes reliquos coëfficientes Q, R, S etc. per methodos aeque expeditas eruere docebimus“. Diese Andeutung kann sich nämlich nur auf die Verallgemeinerung der hier für die Reihe

$$(49)\qquad \frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \cdots$$

entwickelten Resultate auf Reihen allgemeineren Charakters beziehen.

Gauß scheint also schon damals, wo er eben das Gebiet der Theorie der elliptischen Funktionen erobert hatte, die Verallgemeinerung seiner Untersuchungen auf die Funktionen in Angriff genommen zu haben, die der jetzt sogenannten Gaußschen Differentialgleichung genügen. Man wird dabei auch an einen Einfluß von J. Fr. Pfaff zu denken haben, der in seinen „Disquisitiones analyticae (Helmstedt, 1797)“ in dem Kapitel „Nova disquisitio de integratione aequationis differentio differentialis

$$x^2(a + bx^n)\,ddy + x(c + ex^n)\,dy\,dx + (f + gx^n)\,y\,dx\,dx = X\,dx\,dx\text{“}$$

diese auf Euler zurückgehende Differentialgleichung behandelt, und dessen Hausgenosse Gauß vom Dezember 1799 bis Ostern 1800 in Helmstedt gewesen ist.

In der Tat enthält die Einleitung zu der Abhandlung über die

$$z = xx - yy = aa'$$

$$(x'-x)^2 = z' = x'x' - y'y' = \left(\frac{z}{4x'}\right)^2 = \tfrac{1}{4}aa \text{ vel } \tfrac{1}{4}a'a' \text{ prout } a < \text{vel} > a'$$

$$z'' = x''x'' - y''y'' = \left(\frac{z'}{4x''}\right)^2$$

Alsdann ist

$$P^0 = \frac{1}{x^\infty} = \frac{1}{y^\infty}; \quad P' = \frac{2P^0}{z}(z' + 2z'' + 4z''' + 8z^{IV} + \&c)$$

$$= \frac{P^0}{2}\frac{a'}{a}\left(1 + \frac{2z''}{z'} + \frac{4z'''}{z'} + \&c\right)$$

oder $\frac{a}{a'}$ minor in num. maior in denom.“

Eine vollständige Bestimmung aller Koeffizienten P', P'' ... aus $P = P^0$ gibt Gauß in dem Handbuche 19, S. 42, in einem Entwurfe der Abhandlung über die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, auf den wir im 7. Abschnitt zurückkommen. Man vergl. auch die Werke VIII, S. 84, 85 abgedruckte Notiz über denselben Gegenstand, die Herr Fricke auf 1813 datiert.

Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$[1]) die Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung

$$(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^{-n} = A + 2A'\cos\varphi + 2A''\cos 2\varphi + \text{etc.},$$

und auch die Methode, nach der Gauß 1800 die Differentialgleichung für die Reihe (49) ableitet, ist dieselbe wie die, deren er sich in der „Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis[2])“ zur Herleitung der Differentialgleichung für die allgemeine Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bedient. Ich bin auch geneigt anzunehmen, daß Gauß die Redaktion der Abhandlung von 1800 darum abgebrochen hat, weil er seinen Redaktionsplan änderte und statt von dem Algorithmus des agM. von der allgemeinen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ausgehn wollte, wie er es in der Tat 1812 getan hat.

Die Pars altera der hier besprochenen Abhandlung von 1800 enthält noch Entwickelungen für $dM(x, y)$ in schnell konvergierende Reihen. Die eine dieser Reihen, nämlich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{x - x'}{x'} + \frac{1}{8}\,\frac{x - x'}{x'}\cdot\frac{x' - x''}{x''} + \cdots$$

wo $x', x'', \ldots$ die beim Algorithmus des agM. auftretenden sukzessiven arithmetischen Mittel bedeuten, hängt aufs engste mit der in den Leistenotizen auftretenden Funktion N zusammen („Fragmente“ [12], [13]), die in der Darstellung des Ellipsenquadranten eine Rolle spielt[3]).

Was nun die Frage der Bestimmung von $\frac{\varpi'}{\varpi}$ für einen gegebenen Wert von μ anlangt, so sehen wir, daß für $x = \sin\varphi$ die beiden partikularen Lösungen (47) der von Gauß aufgestellten linearen Differentialgleichung gerade die zur Herstellung des Quotienten (46) erforderlichen Elemente liefern. Die Entwickelung von $\frac{1}{M(1, \sqrt{1 - x^2})}$ nach positiven ganzen Potenzen von x war Gauß geläufig, die Darstellung von $\frac{1}{M(1, x)}$ in der Umgebung von $x = 0$

---

1) 1812, Werke III, S. 123 ff., vergl. art. 6, S. 128.

2) Nachlaß, Werke III, S. 207 ff.

3) Vergl. am Schluß der Determinatio attractionis, Werke III, S. 354, Zeile 5, und am Schluß der „Anzeige“ ebenda, S. 360 die Formel für die Peripherie der Ellipse, ferner Schumacher an Gauß (Briefwechsel G.-Schumacher I, S. 124) und Gauß an Schumacher (ebenda, S. 125); auf diese Briefe kommen wir weiter unten zurück.

folgt aus der Formel [45] der „Fragmente“ [1]) (Scheda Ac); beide Darstellungen konvergieren nur für $|x|<1$. Macht man aber die in der Scheda Ac (siehe oben (45) S. 49) angegebene Landensche Transformation, $\sin\psi = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ oder

$$(50) \qquad x_1 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}},$$

so erhält man durch die für $|x_1|<1$ konvergenten Darstellungen für die reziproken Werte der $M(1, \cos\psi)$, $M(1, \sin\psi)$ (siehe oben Gl. (43)) eine für alle komplexen Werte von x konvergente Darstellung für

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{M(1, \cos\varphi)}{M(1, \sin\varphi)} = \frac{M(1, \cos\psi)}{2M(1, \sin\psi)},$$

und man kann durch wiederholte Anwendung dieser Transformation (die ja auf die Bildung der agM. aus $a = 1$, $b = \sin\varphi$ hinauskommt) immer besser konvergierende Darstellungen erzielen, ein Umstand, den z. B. Weierstraß [2]) ausgenutzt hat. Mit dieser Bemerkung dürfte auch die Bedeutung der oben wiedergegebenen Aufzeichnung (37)—(44) aus der Scheda Ac ins rechte Licht gerückt sein. Später [3]) hat Gauß durch unendlich oft wiederholte Anwendung der Transformation (50) und Ausführung des Grenzübergangs eine Darstellung der oben mit z bezeichneten Größe in der Form eines unendlichen Produkts gegeben (vergl. Abschnitt **6**, c)).

Wenn auf diese Weise eine Lösung z der Gleichung

$$(51) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2pq}{p^2-q^2}\ ^{4)}$$

---

1) Es ist dies die Formel

$$M(x, 1) = \frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\gamma x^{-5}-\ldots)}{\log(4x-ax^{-1}-bx^{-3}-cx^{-5}-\ldots)},$$

die numerischen Koeffizienten siehe a. a. O. Man hat in dieser Formel, die für $|x|>1$ gültig ist, nur $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x zu setzen, um die Darstellung von $M(1, x)$ in der Umgebung von $x = 0$ zu erhalten.

2) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1883, Werke III, S. 257 ff. Vergl H. Weber a. a. O. S. 144.

3) Wohl zuerst in einer weiter unten wiederzugebenden Aufzeichnung der Scheda An, die aus den Jahren 1805—1806 stammen dürfte, dann noch wiederholt, siehe z. B. Werke III, S. 448, 468.

4) In den Bezeichnungen der Aufzeichnung (37)—(42); in moderner Bezeichnungsweise (vergl. die Fußnote 2) auf Seite 45), indem wir wieder $z^2 = q$ setzen:

$$(51)' \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\vartheta_{00}^2(0|q^2)\,\vartheta_{10}^2(0|q^2)}{\vartheta_{00}^4(0|q^2)-\vartheta_{10}^4(0|q^2)} = \frac{\vartheta_{10}^2(0|q)}{\vartheta_{01}^2(0|q)}.$$

stets bestimmt ist, so entsteht nunmehr die Frage nach allen Lösungen, d. h. nach allen Werten der agM. $M(1, \cos\varphi)$, $M(1, \sin\varphi)$, deren Beantwortung Gauß in der Tagebuchnotiz 109) vom 3. Juni ankündigt. Diese führt uns in Tiefen der Theorie der Modulfunktion, der wir uns jetzt zuzuwenden haben.

c) Theorie der Modulfunktion.

Wir müssen in diesem Abschnitt den streng historischen Standpunkt, den innezuhalten wir bisher bemüht waren, aufgeben und uns auf eine Exposition des Inhaltes der hier in Betracht kommenden, zum Teil sicher aus sehr viel späterer Zeit stammenden, Aufzeichnungen beschränken. Aber auch diese Aufgabe ist insofern erschwert, als die gedachten Aufzeichnungen nicht erkennen lassen, von welcher Seite her Gauß den Zugang zu den darin enthaltenen Resultaten genommen hat. Nur soviel scheint festzustehn, daß er den „nexum mutuum infinite multorum terminorum mediorum ... inter duos numeros datos" nicht auf elementarem Wege, d. h. nicht von dem Algorithmus der agM. ausgehend gefunden[1]), sondern daß er sich dabei der Eigenschaften der Funktionen p, q, d. h. der Thetanullreihen bedient hat.

Die in Betracht kommenden Aufzeichnungen sind die folgenden.

1) Zwei Zettel, aus denen einzelne Auszüge in Werke III, S. 378, 379, VIII, S. 99, III, S. 385—386, VIII, S. 100—101 veröffentlicht sind, die ich aber des Zusammenhangs wegen im Anhang 3. in extenso wiedergebe. Diese Zettel stammen, wie aus dem inhaltlichen Zusammenhang hervorgeht, ziemlich aus derselben Zeit; der eine zeigt im Wasserzeichen die Jahreszahl 1810, der andere hat die Fouriersche Bezeichnung $\int\limits_0^\pi$ Beide dürften etwa 1825 geschrieben sein.

2) Die Stelle Werke III, S. 386 Zeile 5—1 v. u., die Gauß auf die letzte Einbandseite seines Handexemplars (2) der Disquisitiones arithmeticae eingetragen hat.

3) Die Notiz [3] Werke VIII, S. 99—102, die in dem Handbuch 25, S. 25 aufgezeichnet ist und wohl auch aus dem Jahre 1825 stammen dürfte.

4) Eine Aufzeichnung in der Scheda An (teilweise veröffentlicht in Werke VIII, S. 103) die ich weiter unten im Texte wiedergebe, und die wohl auf 1805 anzusetzen ist.

---

1) Ein solcher elementarer Weg ist übrigens bis heute noch nicht entdeckt.

5) Die Werke III, S. 470—480 abgedruckte Abhandlung aus Handbuch **16**, S. 137—145, die von Gauß aus dem August 1827 datiert ist; namentlich der Art. [12] Werke III, S. 477, 478 (Handbuch **16**, S. 142, 143).

Mit der Tagebuchnotiz 109) im unmittelbaren Zusammenhange steht die Aufzeichnung auf dem einen (gelblichen) Zettel, namentlich die Formel (siehe S. 125 im Anhang).

$$\frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda} \tag{52}$$ [1])

mit dem Beispiele für einen imaginären Wert des agM., die direkt die in 109) bezeichnete Entdeckung wiedergibt.

Über die Art und Weise, wie Gauß diese Formel (52) hergeleitet haben mag, sind wir auf Vermutungen angewiesen. Es liegt ja nahe anzunehmen, daß die Bedeutung von $\frac{1}{\mu}$ und $\frac{i}{\lambda}$ als Perioden der elliptischen Funktion $S\varphi$ ihn dazu geführt hat. Der handschriftliche Nachlaß bietet jedoch keinen Anhaltspunkt hierfür. Schering deutet (Werke III, 377, 378) einen Weg an, wie man mit Hilfe von Kontinuitätsbetrachtungen zu dieser Formel gelangen könnte. Nach dem Inhalt der beiden Zettel 1) ist es aber wahrscheinlicher, daß Gauß (auch 1800) die in Rede stehende Formel mit Hilfe der Thetanullreihen gefunden hat.

Von diesen handelt nämlich schon S. 4 des ersten Zettels, während der zweite Zettel eine vollständige Theorie der linearen Transformation dieser Reihen und den Zusammenhang dieser Theorie mit der Lehre von den quadratischen Formen, also mit den zahlentheoretischen Untersuchungen von Gauß gibt. Gauß gibt daselbst für die drei Thetanullreihen

$$\left\{\begin{aligned} p(t) &= 1+2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}+2e^{-9\pi t}+\cdots,\\ q(t) &= 1-2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}-2e^{-9\pi t}+\cdots,\\ r(t) &= 2e^{-\frac{1}{4}\pi t}+2e^{-\frac{9}{4}\pi t}+2e^{-\frac{25}{4}\pi t} \end{aligned}\right. \tag{53}$$ [2])

das Verhalten bei ganzzahliger linearer Transformation von t

1) Der allgemeinste Wert des agM. zwischen zwei Zahlen m, n, den Gauß a. a. O. mit (μ) bezeichnet, wird durch zwei zusammengehörige Werte $\mu = M(m, n)$ und $\lambda = M(m, \sqrt{m^2-n^2})$ in der Form

$$\frac{1}{(\mu)} = \frac{4l+1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda} \tag{52$'$}$$

dargestellt, wo l, k beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten. Vergl. weiter unten.

2) Auf dem zweiten Zettel wird M statt t benutzt.

(54) $$t' = \frac{\alpha t - \beta i}{\delta + \gamma t i}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

in den sechs verschiedenen Fällen modulo 2, und es läßt sich auf Grund dieser Formeln ein sehr plausibel erscheinender Gedankengang herstellen, der, wenn auch nicht in allen Einzelheiten, so doch in seinen wesentlichen Zügen, dem von Gauß befolgten entsprechen dürfte. Wir rekonstruieren diesen Gedankengang wie folgt:

Setzt man

(55) $$t = \frac{M(m, n)}{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})},$$

so ist:

(56) $$m = M(m, n) p^2(t), \quad n = M(m, n) q^2(t), \quad \sqrt{m^2 - n^2} = M(m, n) r^2(t);$$

also ist für

(57) $$t' = \frac{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})}{M(m, n)} = \frac{1}{t},$$

wo $m, \sqrt{m^2 - n^2}, n$ an die Stelle von $m, n, \sqrt{m^2 - n^2}$ getreten ist,

(58) $$m = M(m, \sqrt{m^2 - n^2}) p^2\left(\frac{1}{t}\right), \quad \sqrt{m^2 - n^2} = M(m, \sqrt{m^2 - n^2}) q^2\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$n = M(m, \sqrt{m^2 - n^2}) r^2\left(\frac{1}{t}\right).$$

Aus (56) und (58) folgen sofort die Relationen

(59) $$p\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\, p(t), \quad q\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\, q(t), \quad r\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\, r(t),$$

die Gauß auf S. 4 des ersten (gelblichen) Zettels für die Funktion pt mit den aus den Reihendarstellungen (53) direkt folgenden

(60) $$p(t + i) = q(t), \quad q(t + i) = p(t), \quad r(t + i) = \frac{1}{\sqrt{i}} r(t)$$

aufgezeichnet hat[1]).

Daß sich aus den beiden Transformationen $t + i$ und $\frac{1}{t}$ die allgemeinste Transformation (54) zusammensetzen läßt, war für Gauß auf Grund seiner zahlentheoretischen Arbeiten nicht schwer zu sehen, und die Herstellung der Tabelle auf S. 1 des zweiten Zettels (siehe S. 129, 130 des Anhangs) für die sechs Fälle der

1) Vergl. auch die weiter unten mitzuteilende Aufzeichnung aus der Scheda An (1805).

linearen Transformation (54) modulo 2 erscheint nun ganz naturgemäß[1]). Gauß hat dabei den Zusammenhang mit der Aequivalenztheorie der quadratischen Formen mit negativen Determinanten hervorgehoben und ausgenutzt (siehe S. 130 desAnhangs), indem er direkt darauf ausgeht, die Funktionen $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ durch solche darzustellen, in denen t „die einfachste Form" hat. Man wird hiernach die Reduktionstheorie der quadratischen Formen geradezu als eine der Wurzeln bezeichnen müssen, aus denen bei Gauß die Theorie der Modulfunktion herauswächst.

Gauß bildet nämlich für $t = g + hi$ die quadratische Form

$$\left(\frac{1}{g}, \ \frac{h}{g}, \ \frac{g^2+h^2}{g}\right)$$

mit dem Determinanten -1, und zwar zuerst für den Fall, wo g, h rational sind, dann auch, wenn diese nicht rational sind, und bestimmt durch den bekannten Reduktionsalgorithmus die äquivalente reduzierte Form (a, b, c), deren Wurzel

$$\frac{1+bi}{a}$$

dann jenen „einfachsten" Wert von t liefert. Die Elemente des Reduktionsalgorithmus lassen entscheiden, „welche Funktion von $\frac{1+bi}{a}$ mit der gegebenen von t so zusammenhängt, daß die letztere in $i^\alpha \sqrt{(\delta + \gamma i t)}$ multipliziert werden muß", wenn $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ die Substitution bedeutet, die die Reduktion auf die reduzierte Form vermittelt.

Die Herstellung der Relation (52) vollzieht sich nun ohne jede Schwierigkeit[2]). Die Gleichung

$$(61) \quad m:n:\sqrt{m^2-n^2} = p^2(t):q^2(t):r^2(t) = p^2(t'):q^2(t'):r^2(t')$$

besteht für ein mit t durch die Transformation (54) verknüpftes t' dann und nur dann, wenn

$$(62) \qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 4$$

---

1) Es muß übrigens a. a. O. (vergl. Werke III, S. 386) für $h = i^\alpha \sqrt{(\delta + \gamma t)}$ der reziproke Wert genommen werden, wie schon P. Pepin, Memorie Accad. Pont. dei Nuovi Lincei IX, 2 (1893), S. 103 bemerkt hat.

2) Ich benutze im folgenden eine Betrachtung, die Herr L. v. Dávid auf meine Veranlassung hin ausgeführt hat, vergl. Mathem. naturw. Berichte aus Ungarn 1909, S. 171.

ist[1]). Für diese ergibt sich aus der Tabelle S. 1 des zweiten Zettels (S. 130 des Anhangs)

$$p^2(t') = (\gamma i t + \delta) p^2(t)$$
$$q^2(t') = (\gamma i t + \delta) q^2(t),$$

also, wenn

$$m = (\mu) \,.\, p^2(t'), \qquad n = (\mu) \,.\, q^2(t')$$

gesetzt wird, durch Vergleichung mit (56)

$$(\mu) = \frac{M(m, n)}{\gamma i t + \delta},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Gleichung (55)

$$\frac{1}{(\mu)} = \frac{\delta}{M(m, n)} + \frac{\gamma i}{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})}, \qquad \delta \equiv 1,\ \gamma \equiv 0 \pmod 4,$$

was mit (52)' übereinstimmt.

Es ist nicht von der Hand zu weisen, daß Gauß einen ersten Anhaltspunkt dafür, daß $\frac{1}{(\mu)}$ eine lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten der

$$\frac{1}{M(m, n)}, \quad \frac{1}{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})}$$

sein müsse, durch die Erwägung gewonnen haben mag, daß $\frac{1}{(\mu)}$ derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leistet wie $\frac{1}{M(m, n)}$ und $\frac{1}{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})}$ (vergl. die Abhandlung über das agM. von 1800, Werke III, besonders S. 370, Zeile 15: „eiusdem aequationis integrale completum est

$$\frac{\mathfrak{A}}{M(1 + x, 1 - x)} + \frac{\mathfrak{B}}{M(1, x)}.\text{“} \Big).$$

Aus der Reduktion von t auf die „einfachste Form“ und der

---

1) Vergl. S. 4 des ersten Zettels (S. 128 des Anhangs); für die daselbst betrachteten Transformationen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

ist im allgemeinen nur

$$\frac{q^4(t)}{p^4(t)} = \frac{q^4(t')}{p^4(t')},$$

siehe die Abhandlung aus Handbuch 16, Werke III, S. 478 (1827).

linearen Transformation der summatorischen Funktionen[1]) hat Gauß (siehe a. a. O.) die Aufgabe abgeleitet „Sind nämlich die Formen (a, b, c), (A, B, C) aequivalent, so ist die Function f in Betracht zu ziehen, wo $f(t) \equiv f(u)$ so wohl wenn $\frac{t-u}{i}$ ganze Zahl als wenn $t = \frac{1}{u}$." Diese Funktion, die sich übrigens in keiner der Aufzeichnungen 1)—5) explizite angegeben findet, ist also nichts anderes als die absolute Invariante der Modulgruppe aller linearen Substitutionen (54). Sie wurde, nachdem sie Herr Dedekind[2]) unter Bezugnahme auf die hier in Rede stehende Stelle des Gaußschen Nachlasses als Valenz eingeführt hatte, durch Herrn Klein in den Mittelpunkt seiner Theorie der Modulfunktion gerückt. Daß diese Funktion $f(t)$ jeden Wert einmal und nur einmal annimmt, wenn t z. B. auf die Wurzeln mit positivem realem Teil der reduzierten Formen beschränkt wird, hat Gauß so ausgesprochen: „Jeder Klasse entspricht dann ein bestimmter Wert von $f\left(\frac{1+bi}{a}\right)$[3])".

Wie man sieht, ist damit das Fundamentaltheorem der Theorie der Modulfunktion gewonnen; Gauß brauchte jetzt nur noch die Werte $\frac{1+bi}{a}$ in der Zahlenebene zu repräsentieren, um den Fundamentalbereich der Modulgruppe oder der Funktion $f(t)$ zu erhalten. Aber auch ohne diese Interpretation ist er jetzt im Besitze des Beweises, daß die durch die Gleichung (55) dargestellte Größe t für jeden Wert des Verhältnisses $\frac{n}{m}$ einen positiven realen Teil hat, also des Beweises, der, nach unserer Auffassung, der Tagebuchnotiz 110) zu Grunde liegt (vergl. oben S. 53).

Die erwähnte geometrische Interpretation findet sich, wie es scheint, zum ersten Male in der Scheda An, einem Oktavheftchen betitelt „Cereri, Palladi, Junoni sacrum, Febr. 1805"; dem die Werke VIII, S. 103 abgedruckte Notiz 4) entstammt. Daselbst findet sich auf S. 6 die Kettenbruchsentwickelung

---

1) So nennt Gauß die Funktionen p, q, r in 2), Werke III, S. 386.

2) Crelles Journal 83 (1877), S. 265 ff.

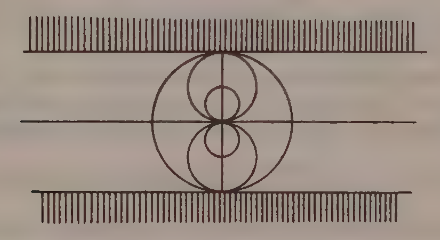
3) A. a. O. Werke III, S. 386. Gauß schreibt daselbst $f\left(\frac{\sqrt{p}+bi}{a}\right)$, indem er nämlich quadratische Formen mit dem Determinanten $-p$ in Betracht zieht, während wir hier anschließend an die Festsetzungen des zweiten Zettels (siehe S. 131 des Anhangs) den Determinanten -1 zu Grunde legen.

$$\frac{[\alpha, \beta, \ldots, \nu]\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \nu] i}{-i[\alpha, \beta, \ldots, \mu]\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \mu]}$$

für eine beliebige Substitution (54) der Modulgruppe, die deren Zusammensetzung aus den beiden Fundamentalsubstitutionen $t+i$, $\frac{1}{t}$ liefert, mit der Ausführung von zwei Beispielen, und auf S. 7 findet sich die berühmte Figur, die Werke VIII, a. a. O. genau nach dem Original wiedergegeben ist. Ich möchte diese Figur aber hier in Verbindung mit einigen sie umrahmenden und einigen auf S. 8 der Scheda befindlichen Formeln, mit einer durch eben diese Formeln gebotenen leichten Abänderung, reproduzieren, weil mir jene Formeln insofern von Wichtigkeit zu sein scheinen, als sie deutlich erkennen lassen, was Gauß im Auge hatte, als er jene Figur hinzeichnete. Es heißt Scheda An S. 7:

„[I] $y < 2$

[II] $y < 2xx + 2yy$



[III] $xx + y(y-1)$ posit.

[IV] $(y+\frac{1}{2})^2 + xx \geqq \frac{1}{4}$ "

und Scheda An, S. 8:

„Setzt man $1 + 2e^{-\alpha\pi} + 2e^{-4\alpha\pi} + \text{etc.} = (\alpha)$
so ist

1) $(\alpha + 2ki) = (\alpha)$

2) $(\alpha + i) \quad = 2(4\alpha) - (\alpha)$

3) $\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad = (\alpha)\sqrt{\alpha}$ "

Zur Erläuterung dieser Aufzeichnungen bemerken wir folgendes.

Die Ungleichungen [III], [IV] stellen, wenn man $\alpha = x + yi$ setzt, die Außengebiete der beiden Kreise dar, die um die Punkte $\frac{i}{2}$ bez. $-\frac{i}{2}$ der lateralen Achse mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschrieben sind. Die Ungleichung [I] bezieht sich offenbar auf eine etwas

andere Anordnung der Figur, sie müßte lauten $-1 < y < 1$; die Ungleichung [II] gibt das Außengebiet des oberen kleinsten Kreises der Figur, dessen Mittelpunkt im Punkte $\frac{i}{4}$ liegt und dessen Radius gleich $\frac{1}{4}$ ist. Der Umstand, daß Gauß auch den Kreis $x^2+y^2=1$ hingezeichnet hat, beweist, daß er nicht nur den Fundamentalbereich der Gruppe

$$\frac{pt+2gi}{r+2sti} \quad (pr+4qs=1) \tag{63}$$

(in dieser Form erscheint diese Gruppe auf S. 4 des ersten Zettels S. 128 des Anhangs) d. h. der zu der Modulfunktion

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{q^4(t)}{p^4(t)} \tag{64}$$

gehörigen „Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe" im Auge hatte, sondern, daß er auch den Fundamentalbereich der Modulgruppe (54) betrachtet hat.

Die Tatsache, daß weder in den Formeln noch in der Figur die Bedingung $x > 0$ hervortritt, läßt vermuten, daß Gauß beim Entwerfen jener Figur rein zahlentheoretisch den geometrischen Ort der Wurzelpunkte $t=\frac{\pm 1+bi}{a}$ der reduzierten quadratischen Form (ohne Beschränkung auf die Wurzel mit positivem realem Teil) aufgesucht und nicht etwa funktionentheoretisch gedacht hat. Daß er aber hinterher die funktionentheoretische Bedeutung der Figur in betracht zog, zeigt die Aufzeichnung auf S. 8 der Scheda. Denn die Formel 1) bezieht sich auf das invariante Verhalten der Funktion $(\alpha)=p(\alpha)$ bei der einen Fundamentalsubstitution der Gruppe (63), während die Formeln 2), 3) das Verhalten eben dieser Funktion bei den Fundamentalsubstitutionen der Gruppe (54) darstellen, also mit den Formeln für pt auf S. 4 des ersten Zettels d. h. mit den ersten Gleichungen des Formelsystems (59), (60) übereinstimmen[1]. Es erscheint nach der Anlage der, in der Handschrift nur skizzierten, Figur nicht ausgeschlossen, daß Gauß auch die Einlagerung des Fundamentalbereichs der Modulgruppe (54) in den der Gruppe (63) ins Auge gefaßt und damit die sechs Fälle der Substitutionen (54) modulo 2 geometrisch interpretiert hat.

1) In der Tat ist $2(4\alpha)-(\alpha)$ oder $2p(4\alpha)-p(\alpha)=q(\alpha)$.

Das Werke VIII, S. 99—102, abgedruckte Fragment [3] stammt aus dem 1815/1816 benutzten Handbuche 25, es enthält die Auflösung der Gleichung

$$\frac{q(t)}{p(t)} = A,$$

indem $A^2 = \frac{n}{m}$ gesetzt und dann ein Wert von t durch die Formel (55) bestimmt wird. Die übrigen, sagt Gauß, sind in der Formel (63) „enthalten", was ja durchaus richtig ist, aber die Formel (63) gibt — wie Herr Fricke a. a. O. bemerkt — nicht nur diese Werte, sondern auch alle Lösungen der Gleichung (64).

Die Aufzeichnungen 5), die wir auch gleich hier besprechen möchten, stammen, wie bereits bemerkt, aus dem Jahre 1827. Wir sehen daselbst zunächst die Figur, die den Fundamentalbereich der zu der Gruppe (63) gehörigen Modulfunktion (64) darstellt, u. z. diesmal nur in der durch $x > 0$ charakterisierten Halbebene gezeichnet[1]), Gauß charakterisiert sie arithmetisch dadurch, daß „der imaginäre Theil von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegt." Er hebt dann hervor, daß wenn t auf diesen Bereich beschränkt wird, der reale Teil von $\frac{q^2(t)}{p^2(t)}$ positiv sei. Daraus folgt, daß wenn man aus

$$\mu p^2(\tfrac{1}{2}t), \quad \mu q^2(\tfrac{1}{2}t)$$

das „einfachste agM." bildet[2]), dieses den Wert μ hat, vorausgesetzt, daß t in jenem Bereiche gelegen ist. Der entsprechende

1) Die Art, wie Schering diese und die auf der folgenden Seite (Werke III, S. 478) befindliche Figur wiedergibt, zeigt, daß er die Bedeutung dieser Figuren nicht erkannt hat. Die Bedeutung derselben hat zuerst Herr Klein hervorgehoben (vergl. Mathem. Annalen 21, S. 215 und Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Bd. I, 1890, S. 278, Fußnote). In korrekter Zeichnung hat sie Herr Fricke, Werke VIII, S. 105, reproduziert. Riemann hat in einer Vorlesung vom W.S. 1858/59 dieselbe Figur gegeben; diese Vorlesung ist aber erst gegen Ende der neunziger Jahre durch eine Nachschrift von v. Bezold in weiteren Kreisen bekannt geworden (vergl. Riemanns Werke, Nachträge, herausgegeben von Noether und Wirtinger, 1902, S. 93). Da Riemann den Gaußschen Nachlaß zur Bearbeitung übernommen hatte (vergl. Hattendorf: Die elliptischen Funktionen in dem Nachlasse von Gauß; Hannover, Schmorl & v. Seefeld, 1869), ist es wohl möglich, daß er diese Figur bei Gauß kennen gelernt hat.

2) D. h. dasjenige, wo bei den geometrischen Mitteln $\sqrt{m_{\nu-1}\, n_{\nu-1}}$ das Vorzeichen so gewählt wird, daß der reale Teil von $\frac{\sqrt{m_{\nu-1}\, n_{\nu-1}}}{m_{\nu-1}}$ positiv ausfällt.

Bereich von $\frac{1}{2}t$ ist dann der durch die Figur Werke III, S. 478, angedeutete, der durch die Ungleichungen

$$x^2 + (y \pm \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{16} > 0, \quad -\tfrac{1}{2} < y < \tfrac{1}{2}, \quad x > 0$$

bestimmt wird. In diesem Bereiche nimmt die Funktion $\frac{q^4(t-\frac{i}{2})}{p^4(t-\frac{i}{2})}$ [1]) jeden Wert einmal und nur einmal an.

Wahrscheinlich war Gauß, abgesehen von der wohl erst nach 1805 gefundenen geometrischen Repräsentation des Fundamentalbereichs, im Juni 1800 bereits im Besitz aller dieser Eigenschaften der Modulfunktion.

Nach der Tagebuchnotiz 111) „Rectificatio Ellipsis tribus modis diversis absoluta" hat Gauß dann noch die Rektifikation der Ellipse, d. h. die Bestimmung des Integrals zweiter Gattung mit variabler oberer Grenze mit Hilfe seiner neuen Transzendenten durchgeführt. In den bisher veröffentlichten Teilen des Nachlasses ist nichts zu finden, was sich auf diesen Gegenstand bezieht; ich gebe darum im Anhang 4. eine Aufzeichnung wieder, die zwei Methoden für die Berechnung des Ellipsenbogens enthält (welches die dritte in der Tagebuchnotiz 111) erwähnte gewesen sein mag, konnte ich nicht feststellen) und die sich in der angewandten Methode den Erörterungen der Determinatio attractionis (1818, Werke III, S. 331 ff. vergl. besonders S. 353 ff.) und den weiter unten Abschnitt 6, c)) wiedergegebenen Aufzeichnungen aus der Scheda An anschließt. Eine genaue Zeitbestimmung für jene Aufzeichnung über die Rektifikation der Ellipse, die sich auf einigen Zetteln findet, ist nicht möglich. Der Inhalt ist ohne jeden Kommentar verständlich, wir bemerken, daß Gauß seine Methode auf die Berechnung der Bogenlänge eines Erdmeridians angewandt hat [2]).

Gauß scheint dann längere Zeit hindurch die jetzt zu einem gewissen Abschluß gebrachte Theorie der elliptischen Funktionen nicht weiter verfolgt zu haben. Wir werden sehen, daß Gauß seinen hier geschilderten Untersuchungen auch später keine wesentlich neuen Gedanken hinzugefügt hat, daß er namentlich

---

1) Nicht, wie a. a. O. irrtümlich angegeben ist, $\frac{q^2(t)}{p^2(t)}$.

2) Der darin angewandte Wert für die Abplattung ($a = 302{,}78000$, $b = a - 1$) würde auf eine spätere Zeit hinweisen. Vergl. Briefwechsel Gauß-Olbers II, S. 182 (April 1822), S. 133 (Juli 1824), S. 471 (März 1827).

immer an der Theorie des agM. und der Thetafunktionen haften blieb und eine direkte funktionentheoretische Untersuchung weder für das Integral erster Gattung noch für seine Umkehrungsfunktion angestellt hat. In Bezug auf diese letztere Untersuchung hat er also den Arbeiten von Jacobi, Abel, Puiseux und Riemann nicht vorgegriffen. Dagegen ist er, wie schon oben angedeutet wurde, insofern sehr bald über die Theorie der elliptischen Funktionen hinausgegangen, als er die allgemeineren Transzendenten, die durch die Gaußsche Differentialgleichung definiert werden, in den Kreis seiner Betrachtungen zog.

Während also bei Abel und Jacobi die Theorie der elliptischen Integrale im Vordergrunde steht und demgemäß der weitere Fortschritt nach der Seite der Integrale der allgemeinen algebraischen Funktionen hin erfolgt, wird Gauß durch seinen in der Theorie des agM. wurzelnden Gedankengang von der Theorie der elliptischen Funktionen nach der Seite der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hin gelenkt und erscheint so als Bahnbrecher und Vorläufer für die funktionentheoretische Forschung der letzten Dezennien des neunzehnten Jahrhunderts.

In wie weit Gauß seine Untersuchungen zum Ausgangspunkt allgemeiner funktionentheoretischer Betrachtungen genommen haben mag, läßt sich aus seinem Nachlaß nur unvollkommen feststellen. Daß er im Jahre 1800 mit Funktionen komplexer Variabeln gearbeitet, daß er die komplexe Veränderliche geometrisch repräsentiert hat, ist gewiß; aber das wenige an nachgelassenen Notizen und Briefschaften, das uns einen Einblick gewährt in den Umfang seiner funktionentheoretischen Kenntnisse, stammt aus späterer Zeit, so daß wir den Bericht über diesen Gegenstand auf einen folgenden Abschnitt verschieben müssen.

6. Die Jahre 1801—1810.

a) Die Jahre 1801—1808. Zahlentheoretische Anwendungen der elliptischen Funktionen.

Im Vergleich zu den sich auf erstaunlich kurze Zeiträume zusammendrängenden Resultaten, über die wir in den vorhergehenden Abschnitten zu berichten hatten, erscheint der Ertrag der analytischen Forschungen, die Gauß in den folgenden Jahren angestellt hat, nicht allzu reichlich. Wir werden sehen, daß er

namentlich zu Anwendungen seiner neuen Transzendenten auf Probleme der Zahlentheorie übergegangen ist; in wie weit freilich in diese Jahre noch Vorarbeiten für später veröffentlichte oder wenigstens aufgezeichnete Untersuchungen fallen, entzieht sich unserer Kenntnis. Von zahlentheoretischen Anwendungen sind es vorwiegend drei, die hier zu besprechen sein werden:

1) Der noch in den Juni 1800 fallende calculus numerico-exponentialis, siehe die Tagebuchnotiz 112).
2) Der Zusammenhang der linearen Transformation der summatorischen Funktionen mit der Lehre von den quadratischen Resten, 1801—1805.
3) Die Anwendung der lemniskatischen Funktionen auf die Theorie der kubischen und biquadratischen Reste, 1805—1807.

Schon im Leiste und in der Scheda Aa hat Gauß zum Zwecke numerischer Induktionen, die in den lemniskatischen Thetareihen auftretenden Potenzen von e berechnet und dabei Methoden der additiven Zahlentheorie angewendet (vergl. oben S. 22). Die Tagebuchnotiz 112) „calculum numerico-exponentialem omnino novum invenimus", bezieht sich wohl (vergl. die Anmerkung von F. Klein, Mathem. Annalen 57, S. 27) auf die Anwendung der von Gauß erdachten Methoden, die Faktoren großer Zahlen zu finden, wie sie in den Werke III, S. 426—431 abgedruckten Rechnungen an Beispielen auseinandergesetzt sind.

Die Tagebuchnotiz 118) vom Mai 1801 ist schon in dem Aufsatze von Herrn Bachmann[1]) eingehend erläutert worden. Ich kann mich daher darauf beschränken, darauf hinzuweisen, daß Gauß möglicherweise von vornherein einen Zusammenhang zwischen der bei Auswertung der sogenannten Gaußschen Summen in Frage kommenden Vorzeichenbestimmung und der Bestimmung der achten Einheitswurzel (siehe oben S. 62 das i^α), die bei der linearen Transformation der summatorischen Funktionen $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ auftritt, vermutet haben könnte. Die vier Jahre hindurch fortgesetzten Bemühungen (vergl. die Tagebuchnotiz 123) vom 30. Aug. 1805) die Gauß der Bestimmung jenes Vorzeichens gewidmet hat, haben ihn sicherlich veranlaßt, alle ihm zu Gebote stehenden Hilfsmittel heranzuziehen, und wenn man bedenkt, daß Hermite[2]) die Bestimmung der achten Einheitswurzel bei der linearen Transformation

1) Materialien I, S. 34 ff.
2) Liouvilles Journal (2), t. 3, = Oeuvres I, S. 486.

gerade auf die Gaußschen Summen zurückgeführt hat, so würde man es kaum begreifen können, daß Gauß bei den hier in Rede stehenden Fragen seine Untersuchungen über die Funktionen p, q, r nicht herangezogen haben sollte, zumal die Identitäten zwischen Reihen und Produkten, wie sie in der 1808 erschienenen Abhandlung „Summatio quarundam serierum singularium“[1]) auftreten, direkt an die Methoden anknüpfen, mit denen in der Scheda Ac operiert wurde. Die Bemerkung, nach Herleitung der Formel

$$1 + x + x^3 + x^6 + \text{etc.} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}\;{}^{2)}$$

„haec aequalitas inter duas expressiones abstrusiores, ad quas alia occasione reveniemus, valde sane est memorabilis“, kann sich auf nichts anderes beziehen, als auf das von Gauß projektierte Werk über die „Transzendenten Funktionen“. Ferner haben wir, allerdings aus späterer Zeit[3]) herrührend, eine die elliptischen Funktionen betreffende Aufzeichnung von Gauß, in der direkt auf die „Summatio quarundam serierum“ Bezug genommen wird. Gauß hat also den Zusammenhang zwischen den Reihen, die in dieser Abhandlung auftreten, und den elliptischen Funktionen sicher gekannt.

In dem im November 1801 begonnenen Handbuche (**16**) finden sich Aufzeichnungen zur Theorie der lemniskatischen Funktionen, die Werke III, S. 405, art. [4] und S. 409 beginnend Zeile 5 v. u. bis S. 412 untermischt mit Aufzeichnungen aus anderen Handbüchern (**17** und **19**) abgedruckt sind. Man wird wohl die Entstehungszeit dieser Aufzeichnungen mit dem Beginn von Gauß Untersuchungen zur Theorie der höheren Potenzreste also[4]) etwa auf 1805—1807 anzusetzen haben.

In der Tat enthalten diese Notizen nicht nur eine Rekapitulation der älteren (in Leiste und Scheda Aa befindlichen) Potenzreihenentwickelungen für den sin lemn. und dessen Zähler und Nenner, sowie der Formeln für die ganzzahlige Multiplikation, sondern auch die Formeln für die komplexe Multiplikation der Zähler und Nenner von sin lemn. und cos lemn. und am Schluß eine

---

1) Werke II, S. 9 ff., vergl. besonders artt. 8, 9, S. 19—21.

2) a. a. O. S. 20; Jacobi hat diese Formel in art. 66 der „Fundamenta“ hergeleitet und zitiert daselbst die Summatio quarundam serierum, vergl. oben S. 9.

3) Hundert Theoreme über die neuen Transzendenten, Werke III, S. 461 ff. Diese Abhandlung stammt jedenfalls aus der Zeit nach 1818, weil darin (auf S. 467) die Determinatio attractionis zitiert wird.

4) Siehe Bachmann, a. a. O. S. 39 ff.

bemerkenswerte zahlentheoretische Anwendung (diese stammt von S. 63 und 72 des Handbuchs **16**), die als Vorarbeit für die in der Tagebuchnotiz 146) vom 9. Juli 1814 enthaltene „Observatio ... theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens“ anzusehen ist.

Damit würden wohl die auf die Jahre 1801—1807 zu datierenden Untersuchungen über Gegenstände der Analysis, soweit sich im Nachlaß Spuren von ihnen finden, erschöpft sein, wenn wir noch die bereits oben besprochene Notiz zur Theorie der Modulfunktion aus der Scheda An hinzunehmen. Gauß hat eben in diesen Jahren den größten Teil seiner Zeit astronomischen Arbeiten gewidmet, sagt er doch selbst im Tagebuch 122): „Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.“

Mit diesen astronomischen Arbeiten im Zusammenhang steht auch die „Theoria interpolationis methodo nova tractata“, die aus dem Nachlasse Werke III, S. 265—327 abgedruckt ist und die wir hier darum erwähnen, weil nach Angabe von Schering (ebenda S. 328) ein erster Entwurf dieser Abhandlung aus dem Jahre 1805 stammen soll[1]).

b) Das Jahr 1808. Beginn der Korrespondenz mit Schumacher. Die Aufgabe des Pedrayes. Wiederaufnahme der Arbeiten über elliptische Funktionen.

Schering berichtet[2]), daß sich „in einem Handbuche unmittelbar nach den in der Theoria motus corporum coelestium, [Gotha 1809] wiedergegebenen Hilfstafeln“ die Abhandlung[3]) „Zur Theorie

1) Vergl. dazu die folgenden Stellen eines Briefes von Schumacher an Gauß (Briefwechsel I, S. 128) vom 8. Juni 1816: „Ich habe in der Hoffnung, Sie würden dadurch Veranlassung finden, Ihre Theorie der Interpolation, die ich handschriftlich habe, bekannt zu machen, die Preisfrage unserer Gesellschaft für 1817 so abfassen lassen: ....“ und eines früheren Briefes (ebenda I, S. 9) vom 8. Nov. 1809: „Sie haben hier [d. h. in Altona] einen Kragen vergessen, auch hat meine Mutter noch Ihr Manuskript über Interpolation ...“.

2) Werke III, S. 494, vergl. Klein, Anmerkung zur Tagebuchnotiz 140).

3) Werke III, S. 436 ff.; die Abhandlung ist dem Handbuch **16** (begonnen Nov. 1801) entnommen, wo sie etwa 14 Seiten (S. 40—53) einnimmt. Der Abdruck ist unvollständig; so folgen in der Handschrift nach dem, was Werke III, S. 440, Art [4] abgedruckt ist, noch etwa 5 eng beschriebene Seiten, die Schering weggelassen hat. Auch sogleich im Art [1] sind wichtige und charakteristische Stellen unterdrückt. Ein Neudruck dieser Abhandlung erscheint unabweislich.

der transzendenten Funktionen gehörig" findet, die „wohl dem Jahre 1808 angehören und die Veranlassung zu einer Mitteilung an Schumacher gewesen sein" wird.

Der Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher, der sich von 1808—1850, also über einen Zeitraum von 42 Jahren erstreckt, wird durch einen Brief Schumachers vom 2. April 1808 eingeleitet, in dem Schumacher Gauß auffordert, die Aufgabe zu lösen, die der Spanier Pedrayes gestellt hatte. Wir wollen zunächst über diese Aufgabe und über ihren Autor einige Angaben machen, natürlich nur soweit sie zum Verständnis des folgenden erforderlich sind[1]).

Augustinus Pedrayes (1744—1817) war 1769—1791 Lehrer am Pagenkollegium (später adliges Seminar genannt) in Madrid; er veröffentlichte 1796 eine Aufgabe in der Form eines Programms[2]) die im wesentlichen folgendermaßen lautet:

„Problema invenire aequationem integralem respondentem huic differentiali:

$$\frac{ar^2dx}{\sqrt{(r-x)x}}+\frac{br^2dx}{\sqrt{(4r-x)x}}+\frac{cr^2du}{\sqrt{(r-u)u}}+\frac{er^2du}{\sqrt{(4r-u)u}}+\frac{fr\,dx\sqrt{4r^2-rx}}{\sqrt{(r-x)x}}$$

$$+\frac{hr\,dx\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{(4r-x)x}}+\frac{kr\,du\sqrt{4r^2-ru}}{\sqrt{(r-u)u}}+\frac{gr\,du\sqrt{r^2-ru}}{\sqrt{(4r-u)u}}$$

$$+\frac{lr\,dx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{mr\,du\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}+\frac{nr\,dx\sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{pr\,du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}$$

$$+\frac{qr\,dx\sqrt{(4r-u)(r-u)}}{\sqrt{rx}}+\frac{sr\,du\sqrt{(4r-x)(r-x)}}{\sqrt{ru}}+\frac{tru\,dx}{\sqrt{rx}}+\frac{zrx\,du}{\sqrt{ru}}$$

$$=dY."$$

Hierin bedeuten $r, a, b, c, \ldots, z$ Konstanten.

Dem Abdruck in Hindenburgs Archiv sind Bemerkungen von Wilhelm Pfaff (Professor der Mathematik in Dorpat, später in Erlangen) angeschlossen, die eine Lösung der Pedrayesschen Aufgabe von J. Fr. Pfaff (dem bekannten und bereits erwähnten Helm-

1) Ausführlichere Notizen über Pedrayes (die ich zum Teil gütigen Mitteilungen des Herrn Zoel G. de Galdeano in Zaragoza verdanke) und seine Aufgabe sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.

2) Erschienen in lateinischer und spanischer Sprache: Ex typographia Regia in Madrid; abgedruckt lateinisch im 9. Hefte 1799 von Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik, S. 85 ff. und in deutscher Übersetzung von H. Murhardt in den Göttinger Nachrichten von 1798.

stedter Professor, Wilhelms Bruder) enthalten. Es heißt daselbst, daß „die Integration des 1., 2., 3., 4. Teiles von der Quadratur des Kreises, des 5., 6. von der Rektifikation der Ellipse, des 7., 8. von der Rektifikation der Hyperbel abhängt [1]); die übrigen Teile können angesehen werden als Differentiale von Flächen krummer Linien, deren Beschaffenheit sich nach dem Verhalten zwischen u und x richtet. Es kommt nun eigentlich — wie ich glaube — bei der Aufgabe darauf an, u und x durch einander oder durch eine dritte Größe φ so zu bestimmen, daß, obgleich die eigentlichen Integralteile transzendent sind, doch das gesamte Integral algebraisch werde. Dies wird nicht bei allen Werten $a, b, \ldots, z$ tunlich sein, daher müssen noch ferner die Werte dieser Konstanten bestimmt werden, bei welchen es angeht.“ — Die Lösung von J. F. Pfaff bezieht sich auf $u = x$.

Der Pariser Akademie wurden eingereicht eine aus Berlin stammende Lösung, die aber als unzureichend erklärt wurde, und die Lösung von Pedrayes selbst, in bezug auf die beschlossen wurde, das Urteil der Akademie nicht zu veröffentlichen. 1805 erschien dann die Pedrayessche Lösung unter dem Titel: „Opusculum primum. Solutio problematis propositi anno 1797 [sic!]; a subscriptorum societate literaria pervulgata.“

In seinem Briefe (vom 2. April 1808) erwähnt Schumacher sowohl die Auflösung von Pfaff als auch die eigene Auflösung des Pedrayes. Auch Gauß bezieht sich in seinem Antwortschreiben (vom 17. Sept. 1808) auf die von Pfaff gegebene Lösung und fährt dann fort:

„Vielleicht wäre ich im Besitz von Wahrheiten, die zur Entscheidung dieser Sache dienen könnten .... Mit Kreisfunktionen und Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehn, wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Funktionen enthält, ist noch fast ganz Terra Incognita. Ich habe darüber ehemals sehr viel gearbeitet und werde dereinst ein eigenes großes Werk darüber geben, wovon ich bereits in meinen Disquisitiones arithm. p. 593 [2]) einen Wink gegeben habe. Man gerät in

---

1) Pedrayes hebt dies in seinen Erläuterungen zu dem Problem selbst hervor.

2) Werke I, S. 412, 413; art. 335. Es ist vielleicht angebracht, diese berühmte Stelle hier wörtlich wiederzugeben. Sie lautet:

„Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur [sc. l. aequationum circuli sectiones definientium], multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt, e. g. ad eas, quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$

Erstaunen über den überschwenglichen Reichtum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Funktionen darbieten (wohin u. a. auch diejenigen gehören, mit denen die Rektifikation der Ellipse und Hyperbel zusammenhängt). Es könnte wohl sein, daß gerade aus diesen Untersuchungen die Beantwortung der Pedrayes-Aufgabe sich entnehmen ließe, vorausgesetzt, daß sie eine Auflösung zuläßt, die wirklich einen Wert hat: allein wenn ich auch klarer sähe, daß die ganze Aufgabe zu etwas führen könnte, als das bis jetzt der Fall ist, würde ich doch jetzt von dieser Untersuchung abstrahieren müssen, da ich mich erst dann in diese weitaussehende Materie wieder hinein werfen werde, wenn ich an die Ausarbeitung jenes großen Werkes werde denken können. Dazu bin ich aber jetzt noch mit zu vielen andern, mir nicht minder interessanten Untersuchungen überhäuft."

Aus der Bemerkung Scherings scheint hervorzugehen, daß er annimmt, die Aufforderung Schumachers, die Lösung der Pedrayesschen Aufgabe zu versuchen, hätte den äußern Anstoß dazu gegeben, daß Gauß 1808 die Arbeiten an den elliptischen Transzendenten wieder aufgenommen habe. Obwohl die Schlußwendung der brieflichen Äußerung von Gauß diese Auffassung nicht gerade bestätigt, hat dieselbe doch viel Wahrscheinliches; jedenfalls bringen die Jahre 1808 und 1809 wieder eine Reihe von Beiträgen zu der in Rede stehenden Theorie[1]).

Die oben erwähnte Abhandlung „zur Theorie der transzendenten Funktionen gehörig" beginnt mit der Entwickelung der Formel für die lineare Transformation der von beiden Argumenten abhängigen Thetafunktion,

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k+\omega)^2}$$

die Gauß erhält, indem er diese Funktion T in eine nach Kosinus der Vielfachen von $2\pi\omega$ fortschreitende Reihe entwickelt und die Koeffizienten in der heute nach Fourier benannten Weise durch

pendent, ...: sed quoniam de illis functionibus transcendentibus amplum opus peculiare paramus, ..., hoc loco solas functiones circulares considerare visum est."

1) Vergl. auch Jacobi, Werke I, S. 394, Brief an Legendre, wo es heißt: M. Gauß ayant appris de celui-ci [Jacobis Arbeiten in den Astronomischen Nachrichten von 1827, Jacobis Werke I, S. 29—48] m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections, et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien interessante." Vergl. Legendre ebenda S. 398, Jacobi ebenda S. 416, Legendre ebenda S. 418, 428.

Integration zwischen den Grenzen $\omega = 0$ bis $\omega = 1$ bestimmt[1]).

1) In moderner Bezeichnungsweise (vergl. oben S. 45) ist:

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k+\omega)^2} = e^{-\alpha\omega^2} \vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i} \middle| e^{-\alpha}\right)$$

und die von Gauß entwickelte Formel (Werke III, S. 437, Zeile 6)

$$\sum e^{-\alpha(k+\omega)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\alpha\omega\omega} \sum e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k+\frac{\alpha\omega i}{\pi}\right)^2} \tag{65}$$

lautet:

$$e^{-\alpha\omega^2} \vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i} \middle| e^{-\alpha}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \vartheta_{00}\left(\omega \middle| e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}}\right),$$

also, wenn man $e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}} = q = e^{\tau\pi i}$ setzt (vergl. etwa Weber, Ellipt. Funkt. 1891, S. 78, Gl. (11)),

$$e^{-\frac{\pi i\omega^2}{\tau}} \vartheta_{00}\left(\frac{\omega}{\tau} \middle| e^{-\frac{\pi i}{\tau}}\right) = \sqrt{-i\tau}\, \vartheta_{00}\left(\omega \middle| e^{\tau\pi i}\right). \tag{65'}$$

Aus (65) ergibt sich, daß die von Gauß a. a. O. mit P bezeichnete Größe den Wert 2π hat. In derselben Bedeutung tritt P auch im art. [5] S. 441 auf. Eine Verifikation der in dieser Abhandlung gegebenen Formeln findet sich in der Abhandlung des P. Pepin, Mem. Accad. Pont. dei Nuovi Lincei IX, 2 (1893), S. 94 ff. Wie Hattendorf a. a. O. bemerkt, enthalten die beiden letzten Gleichungen des art. [1] S. 437 zwei aus der Handschrift übernommene Versehen. Es muß nämlich Zeile 11 heißen $+ i \sin(2k + 2\omega)\omega'\pi$ und Zeile 13 rechts vom Gleichheitszeichen im zweiten Gliede $-e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}} \sin 3\omega P$. In der Handschrift folgt auf die Formel der Zeile 13:

„Das arithmet.-geom. Mittel zwischen $(1 + 2x + \cdots)^2$ und $(2x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{9}{4}} + \cdots)^2$ ist $\dfrac{\pi}{\log \frac{1}{x}}$ "

und dort wo der art. [1] abbricht, hat die Handschrift noch die Bemerkung:

„Das Integral $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(aa\cos\varphi^2 + bb\sin\varphi^2)}}$ wird gleich dem Integrale $\int \frac{d\varphi'}{\sqrt{(a'a'\cos\varphi'^2 + b'b'\sin\varphi'^2)}}$ beide von φ und $\varphi' = 0$ gerechnet, wenn man $a' = \frac{1}{2}(a + b)$, $b' = \sqrt{ab}$ und

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{a+b}{2a}\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{a-b}{2a}\sin\varphi'$$

$$\sin\varphi' = \frac{a - \sqrt{(aa\cos\varphi^2 + bb\sin\varphi^2)}}{(a-b)\sin\varphi} = \frac{(a+b)\sin\varphi}{a + \sqrt{(aa\cos\varphi^2 + bb\sin\varphi^2)}}\text{"}$$

[setzt]. Am Rande stehen mit anderer Schrift und Tinte noch die Formeln:

Der letzte Satz des art. [1] läßt vermuten, daß Gauß bestrebt war, von der Thetafunktion zu einer Funktion überzugehen, die für die lineare Transformation invarianten Charakter zeigt (vergl. oben S. 64); allein es findet sich keine Durchführung dieses Gedankens. Gauß bezeichnet im art. [8] (S. 442) die Theorie der linearen Transformation als „die schönen Lehrsätze der Reciprocität", wohl weil es sich dabei um den Übergang von

$$x = e^{-\frac{m}{n}\pi}, \quad y = e^{\frac{1}{n}\pi}$$

zu

$$x' = e^{-\frac{n}{m}\pi}, \quad y' = e^{\frac{1}{m}\pi i}$$

handelt[1]). Die artt. [2], [3], [4] beziehen sich auf die Umformungen der Produkte in Reihen, wobei die schon in der Scheda Ac aufgestellte fundamentale Identität aufs Neue abgeleitet wird[2]). Da Gauß diese Umformungen in einer späteren Aufzeichnung (Hundert Theoreme etc. Werke III, S. 461) ausführlich behandelt, gehen wir an dieser Stelle nicht näher darauf ein. Der art. [6] behandelt die Siebenteilung, der art. [7] die Dreiteilung der Perioden, was mit der oben (Fußnote) wiedergegebenen Mitteilung, die Gauß an Jacobi hatte gelangen lassen, übereinstimmt. Die Fünfteilung hatte Gauß 1808 noch nicht ausgeführt, sondern, nach der Angabe der Tagebuchnotiz 140) vom 29. Juni 1809: „Quinquesectionem pro mediis arithmetico-geometricis absolvimus", erst ein Jahr später. Wir wenden uns jetzt zu dieser Notiz 140), der am 20. Juni 1809 eingetragenen Tagebuchaufzeichnung 139): „Series ad media arithmetico-geometrica pertinentes fusius evolutae" und zu den damit zusammenhängenden Aufzeichnungen.

c) Die Jahre 1809—1810. Der bilineare Algorithmus.

Die von Schering Werke III, S. 446—460 abgedruckte Abhandlung stammt aus dem im Oktober 1805 begonnenen Handbuche 18 (Bd), wo sie S. 221—233 unmittelbar nach einer astronomischen

---

„$\frac{a-b}{a+b} = \mu'$, $\sqrt{\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)} = \mu$, $\frac{2\sqrt{\mu'}}{1+\mu'} = \mu$, $\frac{2}{\mu \sin\varphi} = \sin\varphi' \sqrt{\mu'} + \frac{1}{\sin\varphi' . \sqrt{\mu'}}$"

Wir haben also hier die Landensche Transformation, vergl. die im Anhang 4. abgedruckten Zettel und die Determinatio attractionis (1818), Werke III, S. 332.

1) Vergl. a. a. O. S. 443, 444. Die Größe, die Gauß hier mit x bezeichnet, ist das Jacobische q.

2) Auf diese Umformungen beziehen sich auch die von Schering weggelassenen Teile der Handschrift.

Rechnung aufgezeichnet ist, der die Bemerkung beigefügt ist „geendiget d. 28. April 1809". Da sie mit den Worten beginnt: „Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Produkte, welche zu der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels gehören, ordnen wir so:" ist ihr Zusammenhang mit der Tagebuchnotiz 139) unverkennbar, ferner beweist die Behandlung der Fünfteilung der Perioden auf S. 456—460, daß die Schlußpartie dieser Abhandlung um die Zeit der Tagebuchaufzeichnung 140) entstanden ist. Die Darstellung dieser Abhandlung ist so deutlich, daß sie jeden Kommentar überflüssig macht[1]), dagegen möge hier eine Aufzeichnung wiedergegeben werden, die sich in der Scheda An auf S. 37 ff. findet und die einesteils durch ihren nahen Zusammenhang mit den Formeln Werke III, S. 448, andererseits dadurch, daß sich auf S. 35 der Scheda An am Schluß einer astronomischen Rechnung die Bemerkung findet: „geendigt d. 2. May 1809" mit Sicherheit auf die Zeit der Tagebuchnotizen 139), 140) zu datieren ist. Diese Aufzeichnung, die bisher nicht veröffentlicht ist, lautet wie folgt:

[Scheda An S. 37.]

Es sind gegeben vier Größen a, b, A, B
man bildet daraus nach folgender Ordnung

$$2a' = a + b, \quad b'b' = ab, \quad cc = aa - bb, \quad c = \tfrac{1}{2}('a - 'b), \quad cc = 4a'c',$$
$$2a'' = a' + b', \quad b''b'' = a'b', \quad c'^2 = a'^2 - b'^2, \quad c' = \tfrac{1}{2}(a - b), \quad c'^2 = 4a''c'',$$
$$2a''' = a'' + b'', \quad b'''^2 = a''b'', \quad c''^2 = a''^2 - b''^2, \quad c'' = \tfrac{1}{2}(a' - b'), \quad c''^2 = 4a'''c'''$$

etc.

Grenze $= h$

Man macht

$$(66) \quad \begin{cases} x^3 = \dfrac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \dfrac{ca'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{4a'a''^{\frac{1}{2}}a'''^{\frac{1}{4}}\ldots} \\ \qquad = \dfrac{c}{4a'}\left(\dfrac{a'}{a''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots \\ \qquad = \dfrac{cb'^{\frac{1}{2}}b''^{\frac{1}{4}}\ldots}{4b''b'''^{\frac{1}{2}}\ldots} \end{cases}$$

$$x^4 = \frac{a-b}{8a''}\left(\frac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ \&c.,}$$

---

1) In der bereits erwähnten Abhandlung des P. Pepin werden die Formeln von Gauß auf S. 23 ff. verifiziert.

so ist

$$(67)\qquad \begin{cases} a = h(1+2x^4+2x^{16}+2x^{36}+\cdots)^2 \\ b = h(1-2x^4+2x^{16}-2x^{36}+\cdots)^2 \\ c = h(2x+2x^9+2x^{25}+\cdots)^2. \end{cases}$$

Ferner

$$(68)\qquad \begin{cases} A' = \tfrac{1}{2}(A+B), \quad B' = \dfrac{2ABa'}{b'(A+B)} \\ A'' = \tfrac{1}{2}(A'+B'), \quad B'' = \dfrac{2A'B'a''}{b''(A'+B')} \\ A''' = \tfrac{1}{2}(A''+B''), \quad B''' = \dfrac{2A''B''a'''}{b'''(A''+B'')} \end{cases}$$

etc.

Man bestimme H durch die Gleichung

$$(69)\qquad H = \frac{h\,A'^{\frac{1}{2}}\,A''^{\frac{1}{4}}\,A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{a'^{\frac{1}{2}}\,a''^{\frac{1}{4}}\,a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{ch\,A'^{\frac{1}{2}}\,A''^{\frac{1}{4}}\,A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{4x}$$

und y [unleserliches Zeichen], so ist

$$(70)\qquad \begin{cases} A = H\left(1+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\dfrac{1}{yy}\right)x^{16}+\text{etc.}\right)^2 \\ B = H\left(1-\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\dfrac{1}{yy}\right)x^{16}+\text{etc.}\right)^2 \end{cases}$$

[Scheda An S. 38]

$$\frac{b}{a} = \cos 2M, \quad \frac{a'}{a} = \cos M^2$$

$$\frac{b'}{a'} = \cos 2M'$$

etc.

$$\operatorname{tg} M^2 = \sin 2M'$$

$$a^\infty = a\cos M^2 \cos M'^2 \cos M''^2 \text{ etc.}$$

$$(71)\qquad \begin{cases} \sin\varphi\sqrt{\sin 2M} = \operatorname{tg}\psi \\ \sin\varphi'\sqrt{\sin 2M'} = \operatorname{tg}\psi' \\ \sin\varphi''\sqrt{\sin 2M''} = \operatorname{tg}\psi'' \\ \qquad\text{etc.} \\ \sin 2\psi' = \operatorname{tg}\psi\sqrt{\sin 2M} \end{cases}$$

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{\cos M^2}{\cos\psi'^2}$$

(72) $$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi^\infty &= \sin\varphi \frac{\cos M^2 . \cos M''^2 . \cos M'''^2 \ldots}{\cos\psi'^2 . \cos\psi''^2 . \cos\psi'''^2 \ldots} \\ &= \frac{a^\infty \sin\varphi}{a \cos\psi'^2 . \cos\psi''^2 . \cos\psi'''^2 \ldots} \end{aligned}\right.$$

[folgt ein Beispiel $2M = 75°$]

[Scheda An. S. 39]

(73) $$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{\sin 2M}{4\cos M^2 . \cos M' . \cos M''^{\frac{1}{2}} . \cos M'''^{\frac{1}{4}} \ldots} \\ &= \frac{\operatorname{tg} M}{2\cos M' . \cos M''^{\frac{1}{2}} . \cos M'''^{\frac{1}{4}} \ldots} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{2x + 2x^9 + \cdots}{1 + 2x^4 + \cdots} = \sqrt{\sin 2M}$$

$$\frac{1 - 2x^4 + 2x^{16} + \cdots}{1 + 2x^4 + 2x^{16} + \cdots} = \sqrt{\cos 2M}$$

$$\frac{\left(y + \frac{1}{y}\right)x + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)x^9 + \cdots}{1 + \left(yy + \frac{1}{yy}\right)x^4 + \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right)x^{16} + \cdots} = \operatorname{tg}\psi$$

(74) $$y + \frac{1}{y} = 2\sin\varphi^{(\infty)}$$

[folgen Zahlenrechnungen]

[Scheda An. S. 40]

Eine andere Manier:

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{(1 - \sin 2M^2 \sin\varphi^2)}$$

$$\operatorname{tg}\omega' = \operatorname{tg} 2\omega . \sqrt{\cos 2M} = \operatorname{tg} 2\omega \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\operatorname{tg}\omega'' = \operatorname{tg} 2\omega' . \sqrt{\cos 2M'} = \operatorname{tg} 2\omega' \sqrt{\frac{b'}{a'}}$$

$$\operatorname{tg}\omega''' = \operatorname{tg} 2\omega'' \sqrt{\cos 2M''} = \operatorname{tg} 2\omega'' \sqrt{\frac{b''}{a''}}$$

etc.

Dann ist φ^{∞} das letzte Glied der Reihe ω, $\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{4}\omega''$, $\frac{1}{8}\omega'''$ etc.

$$(75)\qquad \sin\varphi = \frac{1+2x^4+\cdots}{2x+2x^9+\cdots}\,\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

$$\sqrt{(1-\sin 2M^2.\sin\varphi^2)} = \\ \frac{\sqrt{(1-2xx+2x^8+\cdots)}\sqrt{\left(1-xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\cdots\right)}}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

[Es folgen Umformungen der hier auftretenden Reihen in Produkte, die in der Abhandlung Werke III, S. 446 ff. viel ausführlicher und übersichtlicher dargestellt sind, und die wir darum nicht reproduzieren; auf derselben Seite steht noch unten die Formel:]

$$(75\text{a})\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{\left(y+\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}\cdot\frac{1-2x^4+2x^{16}-\cdots}{1+2x^4+2x^{16}+\cdots}$$

Zur Erläuterung dieser Aufzeichnungen bemerken wir das folgende:

Die durch (66) eingeführte Größe x ist mit der in der Scheda Ac (siehe oben Gln. (24), (37)) durch z bezeichneten Größe identisch; es ist

$$x^4 = e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}}.$$

Die Darstellung (66) ergibt sich durch bis ins Unendliche wiederholte Anwendung der Landenschen Transformation (vgl. oben S. 58), sie findet sich auch in der oben erwähnten Abhandlung aus Handbuch 18, Werke III, S. 448, wo aber die hier mit x bezeichnete Größe mit $\sqrt[4]{x}$ bezeichnet ist. Die Formeln (67), wo $h = M(a,b)$ ist, sind uns schon von der Scheda Ac her bekannt. Das wesentlich neue, was uns hier entgegentritt, ist der Algorithmus (68). Gauß erhält denselben offenbar durch folgenden Gedankengang.

Die Gleichungen (70) lauten in moderner Bezeichnungsweise (vergl. oben S. 45 Fußnote)

$$(76)\qquad A = H.\vartheta_{00}^2(v|q),\quad B = H.\vartheta_{01}^2(v|q);\quad v = e^{2\pi i y},\ q = x^4.$$

Es ist also

$$(77) \qquad \frac{B}{A} = \frac{\vartheta_{01}^2(v|q)}{\vartheta_{00}^2(v|q)}.$$

Gauß bildet nun ähnlich, wie aus

$$(78) \qquad \frac{b}{a} = \frac{\vartheta_{01}^2(0|q)}{\vartheta_{00}^2(0|q)}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{\vartheta_{01}^2(0|q^2)}{\vartheta_{00}^2(0|q^2)}$$

gebildet ist, aus (77)

$$(79) \qquad \frac{B'}{A'} = \frac{\vartheta_{01}^2(2v|q^2)}{\vartheta_{00}^2(2v|q^2)}.$$

Nach den in der Scheda Ac enthaltenen Formeln für die Transformation 2. Ordnung (siehe oben die Gleichungen (33), (35), (33)', (35)')

$$2\vartheta_{00}(0|q^2)\ \vartheta_{00}(2v|q^2) = \vartheta_{00}^2(v|q) + \vartheta_{01}^2(v|q),$$
$$\vartheta_{01}(0|q^2)\ \vartheta_{01}(2v|q^2) = \vartheta_{00}(v|q) \cdot \vartheta_{01}(v|q)$$

ergibt sich aus (77), (78), (79)

$$(80) \qquad \frac{B'}{A'} = \frac{AB}{\left(\frac{A+B}{2}\right)^2} \cdot \frac{a'}{b'}.$$

Zur Sicherung der kräftigen Konvergenz des so zu bildenden Algorithmus setzt Gauß nun fest, daß wie beim agM.

$$A' = \frac{A+B}{2}$$

sein soll; dann folgt aber aus (80) direkt

$$B' = \frac{2AB}{A+B} \cdot \frac{a'}{b'}.$$

Dieser Algorithmus wird von Schering, Werke III, S. 389, wohl erwähnt, Schering hat auch erkannt, daß Gauß diesen Algorithmus mit gutem Vorbedacht gerade so bildet, um eine gute Konvergenz zu erzielen (vergl. die Bemerkungen S. 389, Zeile 8, 7 v. u. und S. 390, Zeile 7, 8); trotzdem hat Schering an Stelle des Gaußschen einen überhaupt nicht von Gauß herrührenden Algorithmus von vier Größen α, β, γ, δ in Werke III, S. 387 ff. artt. 18—25 entwickelt, der bisher, da Schering seine Autorschaft nicht besonders hervorhebt, stets als der Gaußsche gegolten hat. Die Beziehungen zwischen dem Gaußschen und dem Scheringschen Algorithmus sind ja sehr einfach, indem die Scheringschen

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ direkt den Quadraten der vier Thetafunktionen, $\vartheta_{00}^2(v|q)$, $\vartheta_{01}^2(v|q)$, $\vartheta_{10}^2(v|q)$, $-\vartheta_{11}^2(v|q)$, proportional sind, aber Schering opfert der äußerlichen Glätte seiner Anfangsformeln die gute Konvergenz und erweckt durch seine Darstellung überdies den Anschein, daß für Gauß dieser Algorithmus das prius gewesen, und daß er mit Hilfe desselben zu den Thetafunktionen vorgedrungen sei[1]). Wir wissen jetzt, daß Gauß schon 9 Jahre im Besitze der Thetafunktionen war, als er von den Transformationsformeln zweiter Ordnung dieser Funktionen ausgehend, wahrscheinlich nur zum Zwecke einer für numerische Rechnungen gut brauchbaren Entwickelung, den Algorithmus (68) aufstellte.

Auf eine weitere Erläuterung der Gaußschen Formeln können wir verzichten, da sie sich mit Hilfe der Theorie der Thetafunktion leicht verifizieren lassen[2]), wir bemerken nur noch, daß die in (71) festgesetzte Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden $\varphi, \varphi', \dots$ sich in der Form

$$(81) \qquad \sin\varphi = \frac{a}{c}\,\frac{2\sin\varphi'\sqrt{\frac{c'}{a'}}}{1+\sin^2\varphi'\cdot\frac{c'}{a'}} = \frac{2a\sin\varphi'}{(a+b)+(a-b)\sin^2\varphi'}$$

darstellen läßt[3]). Es ist dies die sogenannte Gaußsche Transformation, die uns bei der Analyse der „Determinatio attractionis" (1818) wiederbegegnen wird. Die Darstellung von $\sin\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ durch Thetafunktionen steht in (75), (75a), die Bestimmung von y durch den Grenzwert der Folge $\varphi, \varphi'\ \varphi'', \dots$ steht in (74)[4]).

1) Aus den Angaben P. Günthers (Gött. Nachr. 1894, S. 94 u. 104) geht hervor, daß sich auch Weierstraß durch die Darstellung Scherings hat irreführen lassen.

2) Vergl. die von den Thetafunktionen ausgehende Darstellung des Scheringschen Algorithmus, die Herr v. Dávid 1903 auf meine Veranlassung hin gegeben hat, Mathem. Naturw. Berichte aus Ungarn XXV (1907), S. 153 ff. Die historischen Angaben dieser Arbeit sind natürlich nach dem obigen zu berichtigen.

3) Es ist nämlich $\sin 2M = \frac{c}{a}$; vergl. auch die aus Scheda Ac herrührende Formel (35) und die Abhandlung aus Handbuch 18, oben S. 76.

4) Schering bemerkt Werke III, S. 390 (wohl in Bezug auf die vorstehende Aufzeichnung), daß die Bestimmung von y „durch eine Lücke unvollendet gelassen" sei. In der Tat befindet sich (siehe oben nach Gl. (69)) an der Stelle, wo die Erklärung von y folgen sollte, ein Zeichen, dessen Bedeutung ich nicht enträtseln konnte; aber die Gl. (74) gibt die exakte Bestimmung von y, die wie man sich durch einfache Rechnung überzeugt, im Wesentlichen mit der von Schering a. a. O. angegebenen übereinstimmt. Vergl. auch weiter unten die im Anhang 4. wiedergegebenen Aufzeichnungen.

Wir sehen, daß Gauß in seinen auf die elliptischen Transzendenten bezüglichen Arbeiten aus den Jahren 1808—1809 sich im wesentlichen in demselben Gedankenkreise bewegt, wie in der Zeit der gewaltigen Produktivität, in die uns die Scheda Ac einen Einblick gewährt hat. Es wird manches geglättet, vieles Neue kommt hinzu, aber es ist doch eine Tätigkeit, die mehr sammelnd und ordnend die vorhandenen Schätze in gangbare Münze umprägen, als in den Tiefen nach neuen Goldadern schürfen will. Vielleicht soll schon das Material für das große Werk über die transzendenten Funktionen bereit gestellt werden, nachdem in der Theoria motus (1809) einige Früchte der astronomischen Arbeit der letzten Jahre der Öffentlichkeit übergeben worden sind.

Diese Vermutung wird durch den (bisher meines Wissens noch in keiner Publikation hervorgehobenen) Umstand bestätigt, daß sich in dem Handbuch 18, im unmittelbaren Anschluß an die oben erwähnte, Werke III, S. 446—460 abgedruckte Abhandlung, auf S. 234—235 eine Aufzeichnung über die Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.n}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.n.n+1}xx+\cdots \qquad = \left\{\alpha,\beta,n\right\} = P$$

findet, die einige Relationes inter functiones contiguas, ferner die Differentialgleichung zweiter Ordnung, der P genügt und Ansätze für die Kettenbruchentwickelungen des Quotienten zweier kontiguer Funktionen enthält. In demselben Handbuche folgt dann auf S. 244 eine Aufzeichnung (wo schon die Bezeichnung $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für jene Reihe und die Bezeichnung Π für die später ebenso bezeichnete Funktion benutzt werden), in der Gauß durch numerische Rechnung die Werte spezieller F-Reihen für $x=1$ mit den entsprechenden Werten des Quotienten von Π-Funktionen vergleicht [1]), und wo auch die in der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 153, Gleichung [61] gegebene Formel für $\log \Pi(z+\omega)$ angedeutet wird. Eine erste vollständig ausgearbeitete Abhandlung über die Gaußsche Reihe findet sich auf S. 36—46 (fortgesetzt S. 67, 68 und 289—294) des im Mai 1809 begonnenen Handbuchs **19**; wir kommen auf diese Abhandlung (deren Abdruck sehr zu wünschen

1) **Nämlich:**

$$F(-\tfrac{1}{5},-\tfrac{1}{5},10,1) = 1{,}0041288638 = \frac{\Pi 9\,.\,\Pi 9{,}4}{\Pi 9{,}2\,.\,\Pi 9{,}2}$$

$$F(-\tfrac{1}{5},-\tfrac{1}{5},10\tfrac{1}{5},1) = 1{,}0040454154 = \frac{\Pi 9{,}2\,.\,\Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}4\,.\,\Pi 9{,}4}$$

$$F(\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5},11,1) = 1{,}0038882487 = \left[\frac{\Pi 10\,.\,\Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}8\,.\,\Pi 9{,}8}\right].$$

ist) im Zusammenhang mit der Besprechung der Abhandlung von 1812 zurück, der wir uns jetzt zuwenden.

7. Das Jahr 1811. Gaußsche Reihe. Funktionentheorie.

a) Korrespondenz mit F. W. Bessel 1810—1811.

Unter den Männern, mit denen Gauß Jahrzehnte hindurch in regelmäßigem Briefwechsel gestanden hat, war Bessel derjenige, der seinen mathematischen Interessen zufolge Gauß am meisten zu bieten und demgemäß auch von ihm am meisten zu empfangen vermochte. So sind uns namentlich die Briefe, die zwischen dem 28. August 1810 und dem Ende des Jahres 1811 zwischen beiden Männern gewechselt wurden, im hohen Grade wertvoll, da sich Gauß in ihnen über Gegenstände der Analysis ausgesprochen hat, über die wir keine andere Äußerung von ihm besitzen.

Angeregt durch das Erscheinen von Soldners Werk über den Integrallogarithmus[1]) hatte sich Bessel mit dieser schon von Euler und Mascheroni untersuchten Funktion beschäftigt und berichtet über seine Resultate[2]) an Gauß, weil dieser (siehe S. 119) einmal den Wunsch geäußert hatte „die Funktion li x für sehr große x zu kennen, um die schöne Bemerkung des Zusammenhanges mit den Primzahlen daran prüfen zu können". Nachdem Bessel seine Mitteilungen am 19. Oktober 1810 fortgesetzt hatte, antwortet Gauß am 21. Oktober, indem er kurz von dem Wege spricht, den er eingeschlagen hat.

Am 10. März 1811[3]) berichtet Bessel abermals über eine mathematische Untersuchung, die sich auf die, wie er sich ausdrückt, „berüchtigten" Kramp'schen Fakultäten bezieht. Auf diese Mitteilung erwidert Gauß (6. April 1811, a. a. O. S. 143), daß er noch nicht Zeit gehabt habe, Bessels Bemerkungen durchzugehn, und nachdem Bessel (16. Oktober 1811, a. a. O. S. 150) nochgeschrieben, daß er seine Untersuchungen über die Fakultäten ganz umgearbeitet habe und sie für interessant halte, folgen zwei Briefe von Gauß vom 21. Nov. (a. a. O. S. 151 ff.) und vom 18. Dezember (a. a. O. S. 155 ff.) in denen sich, veranlaßt durch kritische Bemerkungen zu Bessels Arbeiten über Fakultäten und Integrallogarithmus, äußerst wichtige Aussprüche von Gauß finden.

---

1) J. Soldner, Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante. München, 1809.

2) Briefwechsel Gauss-Bessel, S. 113—121, Brief vom 26. August 1810.

3) A. a. O. S. 138—143.

„Ich arbeite nämlich jetzt“ — schreibt Gauß am 21. November — „an einer Abhandlung für unsere Societät, die in etwa sechs Wochen vollendet sein wird und die Reihe

$$(82)\quad 1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1.1.2}x^2+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

betrifft und auch die Funktionen, die mit Kramps Fakultäten zusammenhängen, berührt“.

Ehe wir nun auf eine Analyse der damit zusammenhängenden Untersuchungen von Gauß eingehn, müssen einige historische Bemerkungen vorausgeschickt werden.

b) Die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Konvergenzfragen.

Im II. Bande der „Institutiones calculi integralis“, Sectio I. Cap. VIII, Problema 123 behandelt Euler die Differentialgleichung

$$(83)\qquad x^2(a+bx^n)\,ddy+x(c+ex^n)\,dy\,dx+(f+gx^n)\,y\,dx\,dx = 0,$$

indem er ihre Integration durch unendliche Reihen, die nach steigenden oder fallenden Potenzen von x fortschreiten, gibt. Die allgemeinere Differentialgleichung, die aus (83) hervorgeht, wenn auf der rechten Seite $X dx^2$ steht, bildet — wie schon oben angegeben wurde — den Gegenstand eines Abschnitts von J. Fr. Pfaffs „Disquisitiones analyticae (1797)“. Im XII. Bande der Nova Acta Petropolitana (erschienen 1801) befindet sich (S. 58—70) eine am 3. Sept. 1778 eingereichte Abhandlung Eulers „Specimen transformationis singularis serierum“ (Eneström, 710), wo es heißt: „Contemplatus sum hanc seriem

$$(84)\quad s = 1+\frac{a.b}{1.c}x+\Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}x^2+\Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3+\cdots$$

ubi more solito Π designat coefficientem termini praecedentis“. Auf S. 60 wird gezeigt, daß diese Reihe s die Differentialgleichung

$$(85)\qquad 0 = x(1-x)\,dds+(c-(a+b+1)\,x)\,ds\,dx-ab\,s\,dx\,dx$$

befriedigt. Euler macht dann die Substitution

$$(86)\qquad z = s(1-x)^{a+b-c}$$

und beweist, daß z einer analogen Differentialgleichung genügt, wo an Stelle von a, b, c die Größen $c-a,\ c-b,\ c$ getreten sind.

Gauß hat also unzweifelhaft die Reihe (82), die er in der am 30. Januar 1812 der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

vorgelegten Abhandlung[1]) mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnet, der oben genannten Abhandlung Eulers entnommen, ebenso die Differentialgleichung, der diese Reihe genügt, und die Gauß vollständig in derselben Form wie Eulers Gleichung (85) in den oben erwähnten Aufzeichnungen der Handbücher **18** und **19**, ferner in dem Briefe an Bessel vom 21. Nov. 1811 (Briefw. S. 153), in dem etwa gleichzeitigen Briefe an Olbers (vom 17. Oktober 1811, Briefw. Gauß-Olbers I, S. 482) und in der aus dem Nachlaß herausgegebenen Abhandlung[2]) angibt.

Verschiedene Umstände mögen Gauß zu der Beschäftigung mit dieser Reihe veranlaßt haben. Wir haben schon oben darauf hingewiesen, wie die Wurzeln zu dieser Arbeit bis in die neunziger Jahre des XVIII. Jahrhunderts zurückreichen; zu jener Zeit mag sich Gauß besonders dafür interessiert haben, daß die Reihenentwickelungen der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung nach Potenzen des Moduls als spezielle Fälle dieser Reihe erscheinen. Die Bedeutung der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für die Astronomie tritt sowohl in den Entwickelungskoeffizienten des Ausdrucks[3]).

$$(87) \qquad (a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varphi)^{-n}$$

als auch in den Kettenbruchentwickelungen im art. 90 der Theoria motus[4]) zu Tage. Den Einfluß von Joh. Friedr. Pfaff haben wir auch schon oben erwähnt. Daß die Korrespondenz mit Bessel über die Fakultäten zur Beschleunigung der Ausarbeitung der Abhandlung beigetragen hat, ist sehr wahrscheinlich, aber einen Einfluß auf den Inhalt hat diese Korrespondenz sicher nicht gehabt, da ja die Grundzüge der Abhandlung, wie die Aufzeichnungen in den Handbüchern **18**, **19** zeigen, schon vor 1810 festgelegt waren.

Wenn wir noch darauf hinweisen, daß die Definition, die Gauß für die sogenannte inexplicable Funktion $\Pi x = 1.2, \ldots x$ gewählt hat, und die er in dem Briefe an Bessel vom 21. November (Briefw. S. 152) und in der Abhandlung selbst (art. 18, Werke III, S. 144) gibt, nämlich

---

1) Disquisitiones circa seriem infinitam etc. Pars prior. Werke III, S. 123.

2) Werke III, S. 207 ff.

3) Disquisitiones, art. 6, Werke III, S. 128, vergl. auch die Abhandlung über das agM. von 1800, Werke III, S. 370, 371, ferner Gauß an Bessel, 3. Sept. 1805, Briefw. S. 10 ff.

4) Siehe die Angaben von Gauß, Disquisitiones, art. 14, Werke III, S. 137, Anzeige, ebenda S. 200.

$$(88)\quad \Pi(x) = \lim_{k=\infty} \Pi(k,x), \qquad \Pi(k,x) = \frac{1.2.3\ldots k}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+k)}k^x,$$

auf Euler zurückgeht[1]), so haben wir wohl die historischen Quellen der Gaußschen Untersuchung sämtlich aufgezeigt, und können uns nun der ersten Frage, die Gauß behandelt, zuwenden, der Frage der Konvergenz.

Bei den ältern Analysten und ebenso auch noch bei Gauß schwankt einmal die Bedeutung des Wortes Reihe (series) und im Zusammenhang damit auch die des Wortes Konvergenz. Series heißt ursprünglich das, was wir jetzt gewöhnlich „Folge" nennen; so sagt Gauß z. B. Disquisitiones, art. 16 (Werke III, S. 139) „Hanc disquisitionem generalius adaptabimus seriei infinitae M, M', M'', M''' etc." Die Reihe $M+M'+M''+\cdots$ ist dann die „summa seriei, cuius termini sunt M, M', ..." (siehe z. B. Disquisitiones, a. a. O., S. 141, IV). In diesem Sinne heißt eine Series konvergent, wenn ihre Glieder nach dem Grenzwerte Null hin abnehmen; so sagt Gauß z. B. Disquisitiones art. 3 (Werke III, S. 126) „Series certo, si non statim ab initio, tamen post certum intervallum, convergens erit, atque [sic!] ad summam finitam ex asse determinatam perducet". Es kann also auch eine series convergens eine summam infinitam haben; so heißt es z. B. Disquisitiones, art. 15 (Werke III, S. 139): „Ostendemus autem ... tertio, coëfficientes in infinitum decrescere, quoties fuerit $\alpha+\beta+\gamma-1$ quantitas negativa; quarto, summam seriei nostrae pro $x = 1$, non obstante convergentia in casu tertio, infinitam esse, quoties fuerit $\alpha+\beta-\gamma$ quantitas positiva vel 0."

---

1) Euler bedient sich (Brief an Goldbach vom 13. Oktober 1729, vergl. Institutiones calculi differentialis II, Cap. XVII, S. 834) zur Definition von $x!$ des unendlichen Produkts:

$$\frac{1^{1-x}.2^x}{1+x}\cdot\frac{2^{1-x}.3^x}{2+x}\cdot\frac{3^{1-x}.4^x}{3+x}\cdots$$

(citiert in Pringsheims Encyklopädieartikel I, A. 3, S. 112); Gauß weist (Disquisitiones, art. 20, Werke III, S. 145, 146) selbst — allerdings ohne Euler zu nennen — auf die Identität seiner Definition von Πx mit der Eulerschen hin: „Definimus itaque functionem Πz per valorem producti

$$\frac{1.2.3\ldots k.k^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+k)}$$

pro $k=\infty$, aut si mavis per limitem producti infiniti

$$(89)\qquad \frac{1}{1+z}\cdot\frac{2^{z+1}}{1^z(2+z)}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\cdot\frac{4^{z+1}}{3^z(4+z)}\text{ etc."}$$

Im Gegensatz zu dieser Bedeutung der Worte series und convergentia benutzt Gauß z. B. gleich in der Überschrift das Wort series infinita in dem uns geläufigen Sinne einer „unendlichen Reihe", und art. 3 (Werke III, S. 126) heißt es „patet itaque ... disquisitionem natura sua restrictam esse ad casus eos, ubi series revera convergat, adeoque quaestionem ineptam esse, quinam sit valor seriei pro valore ipsius x unitate maiori", wo also die Konvergenz ebenfalls in dem uns geläufigen Sinne zu verstehen ist. Ganz in demselben Sinne heißt es in der Anzeige (Werke III, S. 198) „Hier gilt eben die Reihe selbst als Ursprung der transzendenten Funktionen ... Die erstere Erzeugung macht, ihrer Natur nach, die Einschränkung auf die Fälle notwendig, wo die Reihe konvergiert, also wo das vierte Element x, positiv oder negativ den Wert 1 nicht überschreitet" und ebenso in dem Briefe an Bessel (Briefw. S. 152): „Eine Reihe, die nicht immer konvergiert, wie meine obige, kann auch nur innerhalb der Schranken, wo sie konvergiert, als Definition gelten."

Wenn so, wie gesagt, auch bei Gauß der Sprachgebrauch für series und convergentia noch schwankt, so muß jedoch hervorgehoben werden, daß für Gauß über die Bedeutung einer unendlichen Reihe, sowie über die Sache, ob dieselbe einen endlichen oder unendlich großen Grenzwert besitzt, keinerlei Zweifel oder Unklarheit vorhanden ist; seine Untersuchung ist tatsächlich — wie Herr Pringsheim bemerkt — das erste Beispiel einer exakten Konvergenzuntersuchung im modernen Sinne.

Die Frage der Konvergenz behandelt Gauß auch noch in zwei Handschriften, die sich im Nachlaß (Fa) befinden und die dadurch besonders charakteristisch sind, daß die eine aus sehr früher, die andere aus sehr später Zeit stammt. Die eine betitelt „Grundbegriffe der Lehre von den Reihen" enthält auf 6 Quartseiten Untersuchungen über obere und untere Grenzwerte von Mengen, die ganz merkwürdig modern anmuten. Sie stammt anscheinend aus den Jahren 1800—1801, da sich auf der letzten Seite Rechnungen finden, die sich auf die Bestimmung des Osterfestes beziehen (vergl. Tagebuch 107) und 117)); wir geben diese Handschrift weiter unten im Anhang 5. Die andere ist ein in fünf verschiedenen Fassungen vorliegender Entwurf zu einer Abhandlung: „(Bestimmung der) Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Functionen einer veränderlichen Größe entwickelt werden", und stammt, da darin (vergl. oben S. 32, Fußnote) die Götting. gelehrten Anzeigen von

1831 zitiert werden, sicher aus später Zeit, wahrscheinlich aus den vierziger Jahren des XIX. Jahrhunderts[1]).

Über seine Auffassung von Konvergenz und Divergenz spricht sich Gauß in einem Briefe an Schumacher vom 1. September 1850 (Briefwechsel VI, S. 107—109) in folgender Weise aus:

„Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Altertum), daß durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltesten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reduziert werden ... Wie oft wird jener Hebel [aber] nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugnis dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen impliziert. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Kalküls, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewußt bleiben, und alle Produkte des Mechanismus niemals über die klare Befugnis hinaus als Eigentum betrachten. ... Reihen haben eine klare Bedeutung, wenn sie konvergieren; diese Klarheit der Bedeutung fällt weg mit dieser Bedingung, und es ändert im Wesentlichen Nichts, ob man sich des Wortes Summe oder Wert bedient. ... [Prehn][2]) meint, die Gültigkeit des Gebrauchs der divergenten Reihen sei allgemein unbedenklich anerkannt, noch in den ersten Dezennien des gegenwärtigen Jahrhunderts. Ich habe sie nie anerkannt; zwar niemals ex professo dagegen geschrieben, aber überall wo eine Veranlassung war, die Zulässigkeit der Reihen nur unter der Bedingung der Konvergenz als sich von selbst verstehend entschieden ausgesprochen. In diesem Augenblick würde ich nur hinweisen auf meine Schrift von 1799, p. 12[3]). Meine Schrift von 1812 über die Reihe $1 + \frac{\alpha\beta}{1 . \gamma} x$ etc. Die Anzeige meiner Schrift über die Anziehung der elliptischen Sphäroide in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1813, p. 547[4])."

c) Analyse der Abhandlung von 1812.

Wir hatten schon oben S. 84 einen anscheinend aus 1808 stammenden ersten Entwurf zu der Abhandlung über die Gauß-

1) Diese Handschrift soll sobald als tunlich veröffentlicht werden. Wir kommen auf dieselbe unten (S. 115) noch einmal zurück.

2) Verfasser einer Arbeit, die in Crelles Journal 41 (1850) veröffentlicht worden ist und die Gauß durch Schumacher zur Beurteilung vorgelegt worden war.

3) Werke III, S. 9—10, Absatz 3.

4) Werke V, S. 281 oben. Ein allgemeines Konvergenzkriterium gibt Gauß in dem Briefe an W. Bolyai vom 20. April 1848, Briefwechsel, S. 133, 134; vergl. die zugehörige Anmerkung von P. Stäckel, ebenda S. 196.

sche Reihe erwähnt, der sich in dem Handbuch **18** (begonnen Oktober 1805) befindet. Ein sehr viel ausführlicherer zweiter Entwurf ist in dem Handbuche **19** (angefangen im May 1809) S. 36—46, wahrscheinlich 1809, aufgezeichnet und S. 67, 68 sowie S. 289—294 desselben Handbuchs durch Nachträge ergänzt. Der letzte dieser Nachträge scheint aus sehr später Zeit zu stammen (jedenfalls nach 1847). Endlich liegt (in Fc) ein in lateinischer Sprache verfaßtes Manuskript vor (die vorher erwähnten Entwürfe sind deutsch) mit der Überschrift:

Disquisitiones generales
circa functiones transcendentes a serie infinita

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

pendentes

auctore Carolo Friderico Gauss
Societati regiae traditae Nov. 1811.

Dieses Manuskript hat weder die Bezeichnung „Pars prior" der 1812 gedruckten Abhandlung, noch die Einteilung in „Sectiones". Es ist vielmehr wie folgt gegliedert:

Observationes generales, artt. 1—5.

Relationes inter functiones contiguas, artt. 6—10.

Fractiones continuae, artt. 11—13.

De summa seriei [darunter steht durchstrichen: de valore functionis] nostrae statuendo $x = 1$, artt. 14—27.

Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis, artt. 28—42.

Quaedam theoremata specialia, artt. 43—47.

Die Artikel 28—47 dieses Manuskripts bilden die in Bd. III, S. 205 ff. abgedruckte nachgelassene Abhandlung; die Artikel 1—27 sind von Gauß umgearbeitet und 1812 als Pars prior veröffentlicht worden. Wie aus der Fassung des Titels in dem ursprünglichen Manuskript hervorgeht, hatte Gauß die Absicht, seine Abhandlung schon im November 1811 der Societät der Wissenschaften vorzulegen. Er schreibt am 5. Mai 1812 an Bessel (Briefwechsel S. 169): „Meine Abhandlung über transzendente Funktionen habe ich, weil ihr Umfang zu groß wurde, teilen müssen, ... Den zweiten Teil meiner Abhandlung hoffe ich auch bald vollenden zu können [1]". Charakteristisch ist auch die Änderung, die Gauß im Titel vorgenommen hat; es heißt in der gedruckten Arbeit statt

---

1) Vergl. auch die Anzeige, Werke III, S. 198 unten.

„circa functiones transcendentes a serie infinita ... pendentes“ einfach „circa seriem infinitam“.

Man wird wohl annehmen dürfen, daß für die Teilung nicht nur der äußerliche Grund des allzugroßen Umfangs maßgebend war, sondern daß sowohl die Verzögerung der Mitteilung an die Societät um zwei Monate, als auch der Entschluß, die Arbeit vorläufig gerade an der Stelle abzubrechen, wo die Differentialgleichung zweiter Ordnung auftreten sollte, durch innere, sachliche Ursachen bedingt waren. Diese Ursachen können wieder nichts anderes gewesen sein, als Schwierigkeiten funktionentheoretischer Natur. Wir werden diesen Punkt weiter unten noch eingehender zu erörtern haben, jetzt wenden wir uns zur Analyse einmal der 1812 veröffentlichten Abhandlung, an die wir sogleich auch die der nachgelassenen Fortsetzung anknüpfen wollen. Auf Grund der Erörterungen in dem vorhergehenden Abschnitt werden wir bei dieser Analyse den Begriff der Konvergenz stets im modernen Sinn gebrauchen.

Die Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für beliebige konstante α, β, γ untersucht Gauß (art. 3) für beliebige komplexe Werte von $x = a + b\sqrt{-1}$ durch Vergleichung mit der geometrischen Reihe und findet, daß die Reihe (sofern γ keine negative ganze Zahl ist) für $a^2 + b^2 < 1$ stets konvergent, für $a^2 + b^2 > 1$ stets divergent ist. Der Fall $a^2 + b^2 = 1$, speziell $a = 1$, $b = 0$ wird (im III. Abschnitt) besonders untersucht. Es folgt (art. 4) die Formel für die Differentiation der Reihe nach x, dann (art. 5) die Aufzählung von 23 speziellen Fällen, in denen die Reihe bekannte Funktionen darstellt und (art. 6) die Darstellung der Koeffizienten der Entwickelung von $(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^{-n}$ nach Kosinus der Vielfachen von φ durch die Reihe F. Auf diese Darstellung bezieht sich offenbar die Bemerkung der abgebrochenen Abhandlung über das agM. von 1800 (Werke III, S. 371): „Denique monemus, in sequentibus demonstrationem multo generaliorem eorundem theorematum ex principiis magis genuinis datum iri“. Wir können hieraus den Schluß ziehen, daß Gauß die Redaktion der 1800 begonnenen Abhandlung darum abgebrochen hat, weil ihm[1]) der Ausgangspunkt zu speziell erschien, und daß wir in der Abhandlung circa seriem den ersten Teil des geplanten großen Werkes über die transzendenten Funktionen vor uns haben, das auch die ganze Theorie der elliptischen Funkti-

---

1) Vielleicht nachdem er die 1801 erschienene Abhandlung Eulers aus Bd. XII der Nova Acta Petrop. kennen gelernt hatte.

onen in sich begreifen sollte. Diese Auffassung wird durch die folgenden Äußerungen von Gauß bestätigt:

1. In der Anzeige der Abhandlung circa seriem (Werke III, S. 197) heißt es: „Professor Gauß hat sich mit Untersuchungen über dergleichen höhere transzendente Funktionen schon seit vielen Jahren beschäftigt ... Einen verhältnismäßig freilich nur sehr kleinen Teil derselben, der gleichsam als Einleitung zu einer künftig zu liefernden Reihe von Abhandlungen angesehen werden kann, hat er am 30. Januar unter der Aufschrift Disquisitiones etc. ... der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften übergeben".

2. Die Briefstelle (Gauss an Schumacher, April 1816, Briefwechsel I, S. 125, 126): „In dem zweiten Teile der Abhandlung Disquisitiones Generales circa Seriem infinitam $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x$ etc. (welche ich vielleicht bald gebe) werde ich einen Teil meiner Untersuchungen über die Ar[ithmetisch-]geom[etrischen] Mittel bekannt zu machen anfangen[1])."

Den Grund, weshalb Gauß mit der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ den Anfang macht, gibt er in der Anzeige[2]) selbst mit folgenden Worten an: „Allein eben diese erste Erzeugungsart [der Funktion durch die Reihe] führt schon zu einer Menge merkwürdiger Wahrheiten auf einem bequemen und gleichsam mehr elementarischen Wege, und deswegen hat der Verf. damit den Anfang gemacht". Man kann sich hiernach den Plan, der Gauß vorgeschwebt, einigermaßen rekonstruieren. Die Theorie der agM. sollte gleichsam den Mittelpunkt bilden, indem sie einmal als spezieller Fall der an den Anfang gestellten Theorie der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ erscheint, während andererseits von dem agM. d. h. also von der Theorie der Modulfunktion aus wieder nach der Seite der doppeltperiodischen Funktionen hin generalisiert werden sollte, deren Theorie sonach den Abschluß gebildet hätte. Vielleicht ließe sich dieses Programm heute, nach hundert Jahren, im Sinne von Gauß verwirklichen; die neuere Entwickelung der Funktionentheorie fordert geradezu zu einem Versuche, nach dieser Richtung hin, heraus!

---

1) In dem im Handbuch 19 enthaltenen Manuskript über die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ wird die Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{(aa+a'a'-2aa'\cos\varphi)}} = \tfrac{1}{2}A^0 + 2A'\cos\varphi + 2A''\cos 2\varphi + \ldots$$

eingehend behandelt (S. 42—45) und bei der Bestimmung von A^0 das agM. ausdrücklich eingeführt und benutzt.

2) Werke III, S. 199.

Der erste Abschnitt der Abhandlung (artt. 7—11) gibt die relationes inter functiones contiguas, d. h. die linearen Beziehungen mit von x abhängenden Koeffizienten, die zwischen je drei Reihen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x); \quad F(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \gamma+\nu; x), \quad F(\alpha+\lambda', \beta+\mu', \gamma+\nu', x)$$

bestehen, wenn $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ die Werte $0, +1, -1$ haben (art. 11). Aus diesen Beziehungen ist der für die neuere Theorie der linearen Differentialgleichungen so bedeutungsvolle Riemannsche Klassenbegriff hervorgegangen.

Im zweiten Abschnitt (artt. 12—14) werden Kettenbruchentwickelungen für den Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

mit Anwendung des auf Lambert[1]) zurückgehenden Divisionsverfahrens hergeleitet, ohne daß jedoch in eine Erörterung der Konvergenzfrage eingetreten wird[2]). Hier werden die in der Theoria motus, art. 90 gegebenen Formeln eingeordnet.

Der dritte Abschnitt bringt (artt. 15—18) die Konvergenzuntersuchung von $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, die auch durch Reihenvergleichung (nämlich mit der Reihe

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \cdots = \frac{n-1}{h},$$

Werke III, S. 142) geführt wird. Um den Wert von $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ als Funktion der α, β, γ darstellen zu können, wird dann (artt. 18—20) auf Eulersche Weise (vergl. oben) die Funktion $\Pi(z)$ eingeführt, wobei die exakte Konvergenzuntersuchung des Produkts (88) besonders erwähnt werden mag. Da $\Pi(z)$ für jedes reale z bekannt ist, wenn man seine Werte für $0 < z < 1$ kennt[3]) (art. 23), wird eine Tafel der letzteren Werte auf 20 Dezimalstellen für die Hundertteile des Intervalls $0 \ldots 1$ gegeben. Es folgt (art. 24) die Darstellung von $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ durch die Π-Funktion, (artt. 25, 26) die beiden Funktionalgleichungen für $\Pi(z)$, (art. 27) das sogenannte Eulersche Integral erster Gattung (die Legendresche B-Funktion) mit Anwendung auf die Berechnung der lemniskatischen Periode[4]), (art. 28) das Eulersche Integral zweiter Gattung, (art. 29)

1) Histoire de l'Acad. de Berlin 1761 (1768) S. 268.

2) Konvergenzuntersuchungen siehe bei Thomé, Crelles Journal, **66** (1865), **67** (1867); Riemann-Schwarz, Riemanns Werke, (2. Aufl.) S. 400.

3) Dieses Intervall läßt sich bekanntlich noch weiter reduzieren.

4) Vergl. die Aufzeichnung in der Scheda Aa (1798), abgedruckt Werke III, S. 413 und die Aufzeichnung auf dem Deckel des Leiste, siehe oben S. 11.

die semikonvergente Reihe für $\log \Pi(z)$[1]), (art. 30, 31) die Einführung der Funktion

$$\Psi(z) = \frac{d \log \Pi(z)}{dz}$$

und Berechnung der Euler-Mascheronischen Konstanten $-\Psi(0)$ durch die semikonvergente Entwickelung, (art. 32, 33) einige Anwendungen der Funktion Ψ, (art. 34, 35) ihre Integraldarstellung, endlich (art. 36, 37) eine Konvergenzuntersuchung der für Π, $\Pi\Psi$ und Ψ gefundenen Integrale.

Überblicken wir diesen Inhalt der Disquisitiones, so drängen sich zwei Bemerkungen auf. Erstens vermissen wir die Eulersche Darstellung von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral für beliebige Werte der α, β, γ; zweitens muß uns, die wir Gauß nicht nur nach seinen Publikationen, sondern nach seinen handschriftlichen Aufzeichnungen kennen, die ganze Art der Darstellung befremdlich erscheinen, die ganz im Stile des XVIII. Jahrhunderts gehalten ist und mit ängstlicher Scheu allem aus dem Wege geht, was eine prinzipielle Anwendung der komplexen Variabeln erfordern würde. Ja, wir werden wohl nicht fehlgehn, wenn wir die Teilung der Abhandlung gerade an dieser Stelle, mit dem Umstande in Verbindung bringen, daß, wie wir sogleich sehen werden, der erste Artikel der von Gauß nicht mehr veröffentlichten Fortsetzung wenigstens andeutungsweise mit Wegen der Variabeln x im komplexen Gebiete operiert. Vielleicht wird sich eine Erklärung dieser beiden Tatsachen ermöglichen lassen, wenn wir versuchen, uns über den Umfang von Gauß' funktionentheoretischen Kenntnissen zu orientieren. Wir nehmen zu dem Ende den Bericht über die Abhandlung, bezw. deren nachgelassene Fortsetzung jetzt wieder auf.

d) Die nachgelassene Fortsetzung der Disquisitiones. Funktionentheoretisches.

Am Schluß des art. 3 der Disquisitiones heißt es: „Infra autem, inde a Sectione quarta, functionem nostram altiori principio superstruemus, quod applicationem generalissimam patiatur". Dieses Prinzip finden wir in dem ersten nicht veröffentlichten Artikel 38 (Werke III, S. 207), es ist die Differentialgleichung (85), die Gauß als besonderen Fall der relationes inter functiones contiguas in der Form von Euler (vergl. oben):

---

1) In Bezug auf diese Art von Reihen heißt es (Werke III, S. 152): „Ceterum negari nequit theoriam talium serierum divergentium adhuc quibusdam difficultatibus premi, de quibus forsan alia occasione pluribus commentabimur".

$$(85)' \qquad 0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx} - (x - xx)\frac{d^2P}{dx^2}$$

ableitet. Diese sei — so sagt Gauß — als die exaktere Definition seiner Funktion anzusehen, der jedoch noch die für $P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ geltenden Anfangsbedingungen

$$P = 1, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad \frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$$

für $x = 0$ hinzuzufügen seien. „Ita“ — fährt er fort — „pro quovis valore ipsius x, ad quem a valore $x = 0$ per gradus continuos transiisti, ita tamen, ut valorem $x = 1$, pro quo $x - xx = 0$, non attigeris, P erit quantitas perfecte determinata; sed manifesto hoc modo ad valores reales ipsius x positivas unitate maiores pervenire nequis nisi transeundo per valores imaginarios, quod quum infinitis modis diversis absque continuitatis praeiudicio fieri possit, hinc nondum liquet, annon eidem valori ipsius x plures, quin adeo infiniti multi valores discreti ipsius P respondeant, sicuti in pluribus functionibus transcendentibus magis notis evenire constat.“ Fast mit denselben Worten spricht sich Gauß in dem Briefe an Bessel vom 21. Nov. 1811 (Briefw. S. 152, 153) aus, und fügt dort als Beispiel jener „functiones magis notae“ noch den Logarithmus hinzu, dessen Definition er mit Acunha[1]) durch Inversion der Reihe für die Exponentialfunktion zu geben vorschlägt. Nach dieser prinzipiellen Bemerkung, auf die sich Gauß vorbehält später ausführlich zurückzukommen, wird x wieder nicht größer als Eins vorausgesetzt und P weiter als die Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ angesehen.

Gauß bemerkt (art. 39), daß die Differentialgleichung (85)′ durch eine lineare Transformation von x mit der allgemeineren Differentialgleichung

$$0 = AP + (B + Cy)\frac{dP}{dy} + (D + Ey + Fyy)\frac{ddP}{dy^2}$$

identifiziert werden kann. Die Transformation $x = 1 - y$ liefert ein von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ linear unabhängiges Integral

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

die Eulersche Substitution $P = (1-x)^{\mu}P'$ (art. 40) liefert für

1) Wahrscheinlich ist gemeint José Anastasio Cunha (1744—1787), von dem posthum zwei Schriften: Principios mathematicos (Lisbao 1790) und Ensaio sobre os principios de mechanica (London 1807) erschienen sind.

$\mu = \gamma - \alpha - \beta$

$$F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\alpha + \beta - \gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

die Substitution $P = x^{1-\gamma} P'$ (art. 41) endlich das Integral

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

und nun wird die lineare Relation zwischen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$
$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$$

aufgestellt, und ihre Koeffizienten werden durch die Π-Funktion ausgedrückt (artt. 42—44).

Die letztere Relation dient dazu, für Werte von x zwischen 0,5 und 1, wo die Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ schwach ist, eine stärkere Konvergenz zu erzielen, jedoch versagt dieses „remedium“ für ganzzahlige Werte von γ, wo jene Relation illusorisch wird (art. 44). Diese Fälle werden dann (artt. 45, 46) nach der Methode von d'Alembert erledigt; es tritt der Logarithmus auf und als Beispiel wird die Reihe $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x)$ behandelt, die (was Gauß a. a. O. nicht erwähnt) den reziproken Wert von $M(1, \sqrt{x})$ darstellt. Die Gleichung [90] Werke III, S. 217:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\log \frac{1}{16} x \,.\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + \frac{1}{2} x + \frac{21}{64} xx + \frac{185}{768} x^3 + \cdots\right\}$$

ist ihrem Inhalte nach geradezu mit der Gleichung (22) (oben S. 38) der Scheda Ac identisch und ergibt insbesondere für $x = 0$ die Gleichung (18) S. 29.

Es folgen (art. 47) die Transformationen

$$x = \frac{y}{y-1}, \quad P = (1-y)^{\mu} P', \quad \mu = \alpha, \beta$$

und (art. 49)

$$x = \frac{1}{y}, \quad P = y^{\mu} P', \quad \mu = \alpha, \beta,$$

die weitere lineare Relationen zwischen F-Reihen liefern, dann (artt. 51, 52) einige quadratische bezw. bilineare Relationen und endlich (artt. 53—55): „Quaedam theoremata specialia“ für spezielle Werte der α, β, γ, die auf die „paradoxe“ Gleichung (Werke III, S. 226)

$$F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, y) = F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 1-y)$$

führen. Um diese zu erklären, bemerkt Gauß: „meminisse oportet, quod probe distinguendum est inter duas significationes characteristicae F, quatenus scilicet vel repraesentat functionem, cuius indoles exprimitur per aequationem differentialem (85)', vel solam summam seriei infinitae. Posterior, quamdiu elementum quartum inter -1 et $+1$ situm est, semper exhibet quantitatem ex asse determinatam ... Prior vero significatio repraesentat functionem generalem, quae quidem secundum legem continuitatis semper mutatur, si elementum quartum fluxu continuo mutatur, sive ipsi valores reales sive imaginarios tribuas, si modo semper valores 0 et 1 evites. Hinc patet, in posteriori sensu functionem pro aequalibus elementi quarti valoribus (transitu seu potius reditu per quantitates imaginarios facto) valores inaequales adipisci posse, e quibus is quem series F repraesentat unicus est". Die paradoxe Gleichung ist also auf ähnliche Weise entstanden „ac si ex Arc sin $\tfrac{1}{2} = 30°$, Arc sin $\tfrac{1}{2} = 150°$ concluderes $30° = 150°$."

Wir sehen hieraus, daß Gauß zu jener Zeit über die Unendlichvieldeutigkeit der Funktionen komplexer Variabeln, über ihre Wertänderung bei Umläufen (er prägt selbst das Wort reditus) um singuläre Punkte vollständige Klarheit hatte. Für seine damaligen Kenntnisse in der Funktionentheorie kommt nun noch die berühmte Stelle in dem Briefe an Bessel vom 18. Dezember 1811 [1]) in Betracht. Aus dieser geht hervor, daß Gauß die Bedeutung des Integrals

$$\int \varphi(x)\,dx$$

wenn $x = a + bi$ ist, bekannt war, und daß er den „sehr schönen Lehrsatz" besaß, „daß das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ nach zwei verschiedenen Übergängen immer einerlei Wert erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentierenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi(x) = \infty$ wird" wenn noch vorausgesetzt wird, „daß $\varphi(x)$ selbst eine einförmige Funktion von x ist, oder wenigstens für deren Werte innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur ein System von Werten, ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird".

Gauß hat also auch die Mehrdeutigkeit eines Integrals einer eindeutigen Funktion aufgefaßt als Funktion der oberen Grenze bei der Integration im komplexen Gebiete gekannt. Dagegen scheint er einerseits die Integration einer mehrdeutigen Funktion im komplexen Gebiete, namentlich die Theorie der Verzweigungs-

1) Briefwechsel S. 156, 157, abgedruckt Werke VIII, S. 90.

punkte, nicht gekannt und andererseits auch für die Erscheinung, daß ein Integral zwischen bestimmten Grenzen von der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(z, x)\, dz$$

eine unendlich vieldeutige Funktion des Parameters x sein kann, keine Erklärung besessen zu haben. Diese Annahme würde es begreiflich erscheinen lassen, daß er die Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrals erster Gattung nicht direkt studiert, ferner, daß er für die Perioden, also für das agM. die Darstellung durch das vollständige elliptische Integral und allgemeiner für $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Eulersche Darstellung durch das Integral

$$\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}\, dz$$

nicht benutzt hat, während er — wie oben erwähnt wurde — in den Disquisitiones von den sogenannten Eulerschen Integralen erster und zweiter Gattung, die eindeutige Funktionen der Parameter sind, Gebrauch macht.

Aber noch ein anderes geht aus der Bemerkung des art. 39 hervor! Gauß braucht, um die durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $|x| < 1$ definierte Funktion fortzusetzen, „ein höheres Prinzip", das ihm durch die Differentialgleichung geliefert wird. Vermöge dieser erfolgt dann die Fortsetzung nach dem Gesetze der Kontinuität. Aber er scheint nicht gewußt zu haben, daß ein solches höheres Prinzip überflüssig oder vielmehr von selbst wirksam ist, wenn es sich um eine Funktion einer komplexen Variabeln handelt, d. h. es scheint ihm damals das Prinzip der analytischen Fortsetzung gefehlt zu haben. Aus dem vielleicht unbestimmten aber immerhin vorhandenen Bewußtsein, daß seine Einsichten in die Natur der Funktionen komplexer Veränderlicher noch Lücken aufweisen, ließe sich die Zurückhaltung erklären, die Gauß der Öffentlichkeit gegenüber mit seinen analytischen Arbeiten stets bewahrt hat, und man muß auch sagen, daß es ihm geradezu unmöglich gewesen wäre, die Gesamtheit seiner Untersuchungen über die transzendenten Funktionen zu einem harmonischen Ganzen zu gestalten, wenn er wirklich, um es kurz zu bezeichnen, in der Theorie der Integrale nicht über den Standpunkt Cauchy's hinausgekommen war.

P. Günther berichtet[1]) über eine ihm von Weierstraß mitgeteilte Äußerung Wilhelm Webers, wonach Gauß nicht eher an

1) Gött. Nachrichten 1894, S. 104.

die Veröffentlichung seiner Untersuchungen über die transzendenten Funktionen gehen wollte, „als bis er die verschiedenen Methoden, die ihm den Eingang in ihre Theorie vermittelt hatten, mit einander vollkommen in Einklang gesetzt haben würde“. Das wäre ihm aber nur möglich gewesen, wenn er bis zu dem funktionentheoretischen Standpunkte Riemanns vorgedrungen wäre, und das scheint auch später nicht der Fall gewesen zu sein, wenigstens was die Theorie der Integrale mehrdeutiger Funktionen anlangt[1]. In Bezug auf das Prinzip der analytischen Fortsetzung hat Gauß später alle Hilfsmittel bereit gestellt, die zur Formulierung dieses Prinzips erforderlich sind; wir kommen auch darauf weiter unten zurück.

8. Die Jahre 1813—1827.

a) Die Abhandlungen der Jahre 1813—1816.

Die folgenden Jahre bringen eine Reihe von Veröffentlichungen, die mit dem von uns behandelten Gegenstande in Beziehung stehen.

Zunächst 1813 die „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum[2]“, aus der besonders die im ersten Teile enthaltenen sechs Theoreme über Integrale hervorzuheben sind. Sie enthalten die Reduktion des dreifachen Volumenintegrals auf ein Oberflächenintegral und die Auswertung des die scheinbare Größe einer geschlossenen Fläche darstellenden Integrals

$$\int \frac{ds \cos(M, Q)}{r^2}$$

für Punkte, die innerhalb, außerhalb bezw. in der Fläche selbst gelegen sind. Die Bedeutung, die diesen Sätzen für die Theorie des Potentials und damit auch für die Funktionentheorie zukommt, ist bekannt. In einem Briefe an Olbers[3] schreibt Gauß, daß er den Inhalt dieser Abhandlung bei seinem letzten Aufenthalte in Gotha (also Sommer 1812) gefunden und daß er einen Auszug davon schon im November 1812 an Laplace mitgeteilt habe[4].

Es folgt 1814 die „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi[5]“ in der einzelne Entwickelungen mit den

1) Wir kommen auf Gauß' Auffassung des Integrals im 9. Abschnitt noch einmal zurück.

2) Vorgelegt 28. März 1813, Werke V, S. 1 ff., Anzeige, ebenda S. 279.

3) Briefwechsel I, S. 515.

4) Vergl. auch den Brief an Bessel, Briefwechsel S. 179.

5) Vorgelegt 16. September 1814, Werke III, S. 163, Anzeige ebenda S. 202.

„Disquisitiones circa seriem etc." Berührungspunkte darbieten. Eine Anwendung auf die numerische Berechnung des Integrallogarithmus findet sich im letzten Artikel.

Die ausführliche Anzeige von J. Fr. Pfaffs „Methodus generalis [1])" bezeichnet Gauß in einem Briefe an Bessel [2]) als „nicht sowohl einen Auszug daraus, als vielmehr die Quintessenz der Sache, in einer durchaus verschiedenen Darstellung".

Im Dezember 1815 wird die „Demonstratio nova altera [3])" des Fundamentalsatzes der Algebra, und bald darauf [4]) die für uns besonders wichtige „Demonstratio tertia" vorgelegt. Inbezug auf die letztere schreibt Gauß, 27. Januar 1816, an Bessel[5]), daß er diesen dritten Beweis „erst vor kurzem gefunden" habe, und in einem späteren Briefe an denselben Adressaten (14. Juni 1816) [6]) begleitet er die Zusendung der Separatabdrücke der beiden Abhandlungen mit folgenden Worten: „In der ersten ist manches, dem die Leser nicht ansehen werden, wie viel Nachdenken es mich gekostet hat; dies ist nicht so bei der zweiten, die nachdem die Hauptidee einmal geboren war, sogleich in einem Gusse entstand". In der Tat geht aus der Tagebuchnotiz 141 (vom 29. Febr. 1812) hervor, daß Gauß die „Demonstratio altera" schon im November 1811 gefunden, aber nicht aufgezeichnet hatte; infolgedessen war eine „pars quaedam essentiale" seinem Gedächtnis entschwunden, und er mußte diese später erst wiederentdecken [7]). Es ist dies der von Kronecker besonders hochgestellte „arithmetische" Beweis, der die Wurzelexistenz einer beliebigen algebraischen Gleichung durch Resolventenbildung auf die Wurzelexistenz einer Gleichung ungeraden Grades mit realen Koeffizienten zurückführt.

Die „Demonstratio tertia" ist funktionentheoretischer Natur. Sie gründet sich darauf, daß, wenn die ganze Funktion m-ten Grades von $x = re^{\varphi i}$ mit realen Koeffizienten:

$$X = t + ui = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Lx + M$$

für keinen endlichen Wert von x gleich Null wäre, das über die

1) Juli 1815, Werke III, S. 231.

2) Briefwechsel, S. 213, vergl. auch Brief an Olbers, Briefwechsel I, S. 598.

3) Werke III, S. 31, Anzeige ebenda S. 105.

4) Januar 1816, Werke III, S. 57, Anzeige ebenda S. 107.

5) Briefwechsel S. 230, vergl. auch an Olbers, Briefwechsel I, S. 616, und die einleitenden Sätze der Abhandlung selbst.

6) Briefwechsel Gauß-Bessel S. 240.

7) Vergl. auch den Brief an Olbers vom 19. Februar 1826, Briefwechsel II, S. 439.

Fläche eines Kreises $r = R$ erstreckte Doppelintegral

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} y\, d\varphi,$$

wo y den realen Teil von

$$x \frac{d \log X}{dx}$$

bedeutet, einen endlichen bestimmten Wert haben müßte, was auf einen Widerspruch führt. Gauß macht zwar auch hier von der ihm geläufigen Integration im komplexen Gebiete keinen direkten Gebrauch, es ist jedoch als sicher anzusehen, daß er sich bei der Redaktion von funktionentheoretischen Erwägungen hatte leiten lassen. Ein Vergleich dieses Gaußschen Verfahrens mit dem Ausgangspunkte von Cauchy's „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires (1825)" macht es, wie Gundelfinger[1]) bemerkt, mehr als wahrscheinlich, daß Cauchy durch diesen Gaußschen Beweis zu seinen Untersuchungen über die Integration im komplexen Gebiete angeregt worden ist[2]).

b) Das agM. in der Korrespondenz mit Schumacher (1816) und in der Determinatio attractionis.

Während die vorhin erwähnten Abhandlungen sozusagen spontan, kürzere oder längere Zeit nach ihrem Entstehen von Gauß der Öffentlichkeit übergeben worden sind, bedurfte es stets eines gewissen äußeren Anstoßes, damit Gauß sich entschloß, mit einem Spezimen aus dem von ihm aufgespeicherten reichen Schatze der Theorie der transzendenten Funktionen hervorzutreten. Ein solcher liegt in dem von uns schon wiederholt angeführten Briefe vor, den Schumacher am 5. April 1816[3]) an Gauß gerichtet hat. Schumacher, der nach einem nur wenige Jahre dauernden Aufenthalt in Mannheim, wieder nach Dänemark und zwar nach Kopenhagen zurückgekehrt war, hat daselbst den dortigen Professor der Mathematik Degen kennen gelernt. In dem gedachten Briefe schreibt nun Schumacher: „Ein Landsmann von Ihnen ist hier

1) Berliner Sitzungsberichte 1898, S. 345.

2) Vergl. in Bezug auf die in Rede stehende Gaußsche Abhandlung: Bôcher, American Journal of Mathem. XVII (1895), S. 260 und Bulletin of the Am. Math. Soc. I, S. 205.

3) Briefwechsel I, S. 123 ff.

Professor der Mathematik. Er heißt Degen[1]). Vor einiger Zeit sagte er mir, er beschäftigte sich schon seitdem er Tetens[2]) Schüler sei, mit gewissen Mediis arithmetico-geometricis, die von den Ihrigen verschieden sind. Er nimmt nämlich zwei Größen, von denen a die größere, b die kleinere sein soll (die Stelle ist gleichgültig)

$$\begin{array}{llll} a, & \tfrac{1}{2}(a+b) = a', & \tfrac{1}{2}(a'+b') = a'', & \text{u. s. w.} \\ b, & \sqrt{ab} = b', & \sqrt{a'b'} = b'', & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Er selbst weiß nur, daß diese Reihe einen Limes hat, den man bald findet. Ich habe mich sehr mit diesem Limes beschäftigt und bin so glücklich gewesen, einen Zusammenhang mit der Ellipse zu finden, den ich mir die Freiheit nehme Ihnen vorzulegen. Da der Limes dieser Reihe, so wie ich ihn dargestellt habe, von $\frac{b}{a}$ abhängt, so bezeichne ich ihn mit $M\left(\frac{b}{a}\right)$. Ich nenne ferner die sehr schnell konvergierende Reihe ....

$$(90)\qquad \frac{a-a'}{2a'} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''}\cdot\frac{a''-a'''}{2a'''} + \cdots$$

$\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)$, dann ist

$$(91)\qquad \frac{1}{2}\pi\left\{\frac{a'}{M\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{(a-a')\,\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)}{M\left(\frac{b}{a}\right)}\right\} = \text{Quadrans Ellipseos}\left(\frac{b'}{a'}\right),$$

wo das Zeichen $\left(\frac{b'}{a'}\right)$ eine Ellipse bedeutet, deren große Achse gleich 1, kleine Achse $= \frac{b'}{a'}$ ist. Ich habe nun Degen angezeigt, ich habe seinen Limes gefunden und halte es für billig zu warten, ob er dasselbe findet. Wie ich vor 14 Tagen an Lindenau schrieb, hatte ich den Limes noch nicht. Gewiß haben Sie bei Ihren Mediis auch dieses angesehen, und Sie würden mich sehr durch ein paar Worte darüber verbinden."

Aus dem Antwortschreiben von Gauß haben wir schon S. 5, 52 und 93 einzelne Sätze wiedergegeben, wir wollen dieselben hier

1) Degen war in der Tat (1. Nov. 1766) zu Braunschweig geboren. Biographische Daten findet man in dem „Mémorial" über Abel, Artikel von Holst, S. 14, 15.

2) Joh. Nik. Tetens (geb. 1736, gest. 1807) war 1776—1799 Professor in Kiel, dann Etatsrat in Kopenhagen.

des Zusammenhanges wegen wiederholen. Gauß schreibt (April 1816, a. a. O. S. 125):

„Haben Sie denn wirklich vergessen, daß das arithmetisch-geometrische Mittel, mit welchem Hr. Degen sich beschäftigt, ganz dasselbe ist, womit ich mich seit 1791 beschäftigt habe und jetzt einen ziemlichen Quartband darüber schreiben könnte? Ich habe zwar außer jenem auch noch andere arithmetisch-geometrische Mittel betrachtet, die aber ganz elementarisch sind. Jenes ist das wahre, worüber Sie hier auch eine im Jahre 1800 von mir angefangene kleine Abhandlung gelesen haben (in einem blauen Oktavband, Varia betitelt, worin noch von Ihrer Hand eine Restitutio in Integrum einiger durch einen Dintenfleck unkenntlich gewordener Stellen zu sehen ist). In jener Abhandlung steht teils ein Beweis, daß wenn ein Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{(g+h\cos\varphi)}}$$

in die Reihe

$$A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi+\cdots$$

verwandelt wird, $\left[\frac{1}{A}\right]$ das Medium Arithm. Geom. zwischen dem größten und kleinsten Werte von $\sqrt{(g+h\cos\varphi)}$, d. i. zwischen $\sqrt{(g+h)}$ und $\sqrt{(g-h)}$ ist; teils Beweis, daß

$$d\,\mathrm{Med.}\,(x,y)=\mathrm{Med.}\,(x,y)\times\left\{\begin{array}{l}\frac{dx}{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}+\frac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\text{etc.}\right)\\ \frac{dy}{y}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}-\frac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\text{etc.}\right)\end{array}\right\}$$

Gerade diese Formel unter andern ist von Ihnen selbst restituiert.

Durch die Media und ihre Differentiale kann man dann leicht die übrigen Koeffizienten B, C, D, etc. bestimmen, so wie überhaupt die Koeffizienten von $(g+h\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-k}$, wo k irgend eine ganze Zahl ist (welche Reduktion bekannt genug ist). In dem zweiten Teile der Abhandlung Disquisitiones Generales circa Seriem infinitam $1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x$ etc. (welche ich vielleicht bald gebe) werde ich einen Teil meiner Untersuchungen über die Ar. Geom. Mittel bekannt zu machen anfangen.

Leben Sie wohl, wertester Freund! und vergessen Sie nicht Ihren ergebensten C. F. Gauß.“

Auffallend ist der gereizte Ton dieses Gaußschen Briefes, der auch in der ironischen Schlußwendung „vergessen Sie nicht Ihren u. s. w.“ [1]) nachklingt. Schumacher hatte sich offenbar das was er seinerzeit (1808) über die Media von Gauß gelesen hatte, wohl eingeprägt, aber er wußte nicht mehr, daß er es gelesen hatte und hielt es für seine eigene Erfindung. Solche Fälle kommen bekanntlich nicht selten vor. Besonders auffallend ist die vollständige Übereinstimmung der von Schumacher gegebenen Formel (91) für den Ellipsenquadranten mit der im Leiste von Gauß aufgezeichneten („Fragmente“, Gleichung [11] [2])); sogar die Bezeichnung M für die Reihe (90) ist beiden Formeln gemein. Da es wohl ausgeschlossen ist, daß Gauß die Formel [11] erst nach dem Empfang des Schumacherschen Briefes in den Leiste eingetragen hat [3]), so wird man diese Übereinstimmung entweder dem „Zufall“ zuschreiben oder annehmen müssen, daß Schuhmacher die Formel (91) etwa 1808 bei Gauß gesehen und sie dann 1816 gleichsam aus dem „Unterbewußtsein“ reproduziert hat. Gauß hat sich augenscheinlich gerade über diese Formel geärgert, denn er betont, daß Schumacher jene Reihe (90) in dem Handbuche Varia selbst restituiert habe. Allerdings steht in diesem Handbuche [4]) explicite nichts vom Ellipsenquadranten, aber Schumacher schreibt in seiner Antwort (vom 8. Juni 1816, a. a. O. S. 127): „. . . wie Ihre elementaren Media, über die ich ein paar Zettel von Ihrer Hand immer [als] κειμηλια bewahre . . .“ [5]); er hat also seinerzeit (1808) auch noch

1) Vergl. die Eingangsworte: „Haben Sie denn wirklich vergessen ...“.

2) S. 3 vergl. S. 17.

3) Schon der Umstand, daß die Formel [4] der Fragmente für die Peripheria Ellipseos auch in der Scheda Ac („Fragmente“, Gleichung [58]) und zwar in berichtigter Form auftritt, spricht gegen eine solche Annahme.

4) Es ist (vergl. oben) von dem Handbuche 15 und von der Abhandlung Werke III, S. 361 ff., die Rede.

5) In den im Gaußarchiv befindlichen „Gaussianis“ Schumachers finden sich Aufzeichnungen über jene „elementaren Media“ (für die man etwa Borchardts Abhandlung, Werke, S. 455—462 vergleichen mag), teils von Schumachers teils von Gauß' Hand. Es handelt sich dabei um eine Folge von Größen, die aus zwei beliebigen a, b als erstem und zweitem Element so gebildet werden, daß die aufeinanderfolgenden Elemente wechselweise die arithmetischen und geometrischen Mittel der zwei vorhergehenden sind, also

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{ab+b^2}{2}},\ \frac{a+b+\sqrt{2(ab+b^2)}}{4},\ \ldots;$$

man hat dann als Grenzwert dieser Folge, für $a > b$, den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\log\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)}.$$

andere Handschriften von Gauß als das Handbuch eingesehen. Vielleicht hat auf diesen der quadrans ellipseos gestanden, vielleicht waren es jene verlorenen Uraufzeichnungen, die den Leistenotizen über das agM. zu Grunde lagen?

In diesem Antwortschreiben Schumachers sind auch die literarischen Angaben von Interesse (a. a. O. S. 127), die Schumacher über die von ihm zu Rate gezogenen Hilfsmittel macht. Er zitiert nämlich eine Abhandlung von Woodhouse aus den Philosophical Transactions, 1804 II, in der Abhandlungen von Wallace und Ivory excerpiert seien und wo die „bekannte Umformung von $\int dx\left(\frac{1-eexx}{1-xx}\right)^{\frac{1}{2}}$ auf ähnliche Formen, wo e immer kleiner wird, ins unendliche fortgesetzt wird“. Es ist dies also die Landensche Transformation[1]). Ob Gauß diese Literatur schon früher gekannt, oder ob er sie erst aus diesem Briefe Schumachers kennen gelernt hat, muß dahingestellt bleiben. Auf eine andere Stelle dieses Schumacherschen Briefes, der sich auf Degen bezieht, kommen wir weiter unten zurück.

Die von Gauß ausgesprochene Absicht, den zweiten Teil der „Disquisitiones circa seriem etc.“ mit einem Teil seiner Untersuchungen über das agM. bald zu geben, kommt wieder nicht zur Ausführung. Jedoch scheint er — nach längerer Pause — bald darauf die Untersuchungen über lemniskatische Funktionen wieder aufgenommen zu haben, wenigstens stammen die Werke III, S. 421, art. [41] abgedruckten, dem Handbuche **19** (S. 104) entnommenen Aufzeichnungen aus der Zeit nach dem 29. Febr. 1817 (vergl. die Angabe von Schering, Werke III, S. 494). Sie enthalten die Additionstheoreme der Thetafunktionen im lemniskatischen Falle und das Additionstheorem für das Integral zweiter Gattung $\int(\sin\text{lemn}\, X)^2 dX$. Bemerkenswert ist das erstmalige Auftreten der Zeichen P, Q, R, S für die vier Thetafunktionen, hier natürlich nur im Falle der lemniskatischen Funktion. Jedenfalls verdanken wir es aber dieser Korrespondenz mit Schumacher, daß Gauß bei der nächsten Gelegenheit wenigstens die Grundzüge seiner bis dahin streng geheim gehaltenen Theorie des agM. bekannt macht, in der Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam

1) Die gedachten Abhandlungen von Ivory und Wallace befinden sich in den Bänden IV. bez. V. der Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Sie enthalten in Bezug auf die Landensche Transformation nichts, was wesentlich über Lagranges Abhandlung von 1784/85 (vergl. oben S. 6) hinausgeht.

orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita" [1]). Über die Wichtigkeit des in dieser Arbeit behandelten astronomischen Problems spricht sich Gauß in einem Briefe an Olbers vom 11. Januar 1818 aus [2]), wo er auch angibt, daß er sich „bisher" mit der Arbeit an dieser Abhandlung beschäftigt habe.

Der auf das agM. bezügliche Teil dieser Abhandlung (artt. 16—19) bringt zuvörderst den elementaren Algorithmus für zwei positive Zahlen m, n. Der Beweis, daß $\mu = M(m, n)$ dem reziproken Wert des vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

gleich ist, wird durch Anwendung der uns aus der Scheda An (vergl. oben S. 83) und den Zetteln im Anhang 4. bekannten Transformation

$$(92) \qquad \sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m \sin^2 T'} = \frac{m \sin T'}{m \sin^2 T' + m' \cos^2 T'}$$

geführt, die das Differential

$$\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

invariant läßt. Bildet man durch Wiederholung der Transformation (92) die Folge T', T'', T''', ... so strebt diese einem Grenzwerte θ zu, und es ist

$$\frac{\theta}{\mu} = \int_0^T \frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}},$$

eine Gleichung, die offenbar mit der oben (S. 80) aus der Scheda An wiedergegebenen Gleichung (74) identisch ist. In der Anzeige [3]) fügt Gauß noch hinzu, daß der auf das vollständige Integral bezügliche Satz sich auch so aussprechen läßt, daß in der Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta \cos \psi}} = A + B \cos \psi + C \cos 2\psi + \text{etc.}$$

1) Vorgelegt 17. Januar 1818, Werke III, S. 331, Anzeige ebenda S. 357.
2) Briefwechsel Gauß-Olbers I, S. 679.
3) Werke III, S. 359.

$\frac{1}{A}$ gleich $M(\sqrt{\alpha+\beta}, \sqrt{\alpha-\beta})$ ist, was direkt an die oben wiedergegebene Korrespondenz mit Schumacher erinnert. Das gleiche gilt von dem Satze, den Gauß in der Anzeige als „ein zweites eben so wichtiges Theorem“ bezeichnet, und wonach das vollständige Integral zweiter Gattung

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2T dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}}$$
$$= -\frac{1}{\mu}\left[2\frac{m'^2-n'^2}{m^2-n^2} + 4\frac{m''^2-n''^2}{m^2-n^2} + 8\frac{m'''^2-n'''^2}{m^2-n^2} + \cdots\right]$$

ist. In der Anzeige wird sogar noch besonders die Darstellung des Ellipsenumfangs durch die Reihe

$$\frac{2\pi}{\mu}\left(m'^2 - 2(m''^2 - n''^2) - 4(m'''^2 - n'''^2) - \cdots\right)$$

angegeben, die im wesentlichen auf Schumachers Formel (91) hinauskommt, gleichsam als wollte Gauß hierdurch sein Eigentumsrecht auf diese Formel ausdrücklich betonen. Auch für ein Integral zweiter Gattung mit variabler oberer Grenze gibt Gauß eine Darstellung (art. 18) (vergl. hierzu die Darstellung des Ellipsenbogens im Anhang 4.).

Den Ausspruch am Schluß der Anzeige, wonach Gauß „diese Resultate, wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen von Lagrange und Legendre gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Form darstellen zu müssen geglaubt hat“ wird man was die „ursprüngliche Form“ anlangt cum grano salis aufzufassen haben, denn wir wissen, daß Gauß jedenfalls den Zusammenhang des agM. mit dem vollständigen Integral erster Gattung nicht auf dem in dieser Abhandlung angegebenen Wege gefunden hat.

c) Konforme Abbildung. Hundert Theoreme.

Im Juli 1816 schreibt Gauß an Schumacher[1]) „Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage konferiert, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preise von 100 Dukaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich:

„**Allgemein** eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu proiiciren (abzubilden), daß das Bild dem Originale in den kleinsten Teilen ähnlich werde.“

1) Briefwechsel I, S. 131.

Als Preisfrage der Kopenhagener Societät wurde diese Aufgabe 1820 veröffentlicht[1]). Nachdem sie 1822 wiederholt worden war, wendet sich Gauß ihrer Bearbeitung zu[2]). Die Abhandlung, mit dem Motto „Ab his via sternitur ad maiora" erscheint 1825[3]), sie ist vom Dezember 1822 datiert und in deutscher Sprache verfaßt[4]). Als erste Vorarbeit zu dieser Abhandlung dürfte das Fragment anzusehen sein, das sich in dem (Nov. 1801 begonnenen) Handbuche 16 (S. 70) befindet und Werke VIII, S. 371, abgedruckt ist. Es handelt von der konformen Abbildung einer Ebene auf eine krumme Fläche. Für uns ist hier nur der Umstand von wesentlicher Bedeutung, daß Gauß den Zusammenhang der in Rede stehenden Aufgabe mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln erkannt hat[5]) und daß er das Wesen einer solchen Funktion darin erblickt, daß $P+Qi$ eine Funktion von $p+qi$ ist, wenn für konstantes $p+qi$ auch $P+Qi$ konstant ist (Werke IV, S. 197). In den Beispielen findet sich noch eine Reihe interessanter Ansätze, deren erneute Durcharbeitung wünschenswert erscheint.

Wir wollen hier noch die Besprechung der nachgelassenen Abhandlung „Hundert Theoreme über die neuen Transzendenten" anschließen, die auf einzelnen Blättern (Fi) aufgezeichnet ist und für deren Entstehungszeit sich nur die untere Zeitgrenze 1818 angeben läßt, da darin (S. 467) die „Determinatio attractionis" zitiert wird[6]). Sie enthält nichts wesentlich Neues, nur in eleganter und überaus klarer Darstellung Dinge die uns schon aus der Scheda Ac und Scheda An bekannt sind.

Für die drei ungeraden Thetafunktionen werden, da sie „von großer Wichtigkeit" sind, „besondere Funktionalzeichen" eingeführt:

$$P(x,y) = 1 + x(y+y^{-1}) + x^4(y^2+y^{-2}) + x^9(y^3+y^{-3}) + \text{etc.}$$
$$Q(x,y) = 1 - x(y+y^{-1}) + x^4(y^2+y^{-2}) - x^9(y^3+y^{-3}) + \text{etc.}$$
$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}) + x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}}) + x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}}) + \text{etc.}$$

sodaß also in moderner Bezeichnungsweise für $x = q$, $y = e^{2\pi i v}$,

---

1) Vergl. Schumacher a. a. O. S. 202, Brief vom 20. Jan. 1821.

2) Brief an Schumacher vom 25. Nov. 1822, a. a. O. S. 293.

3) Werke IV, S. 189.

4) Vergl. dazu die Briefstellen Gauß-Schumacher a. a. O. SS. 296, 297, 299, 300, 303, 317, 328, 335.

5) Dieser Zusammenhang ist auch schon bei Lagrange 1779, Oeuvres IV, S. 643 hervorgehoben.

6) Vergl. P. Günther a. a. O. S. 101. Eine Verifikation der Formeln dieser Abhandlung findet sich bei Pepin, a. a. O. S. 59 ff.

$$P(x, y) = \vartheta_{00}(v|q);\quad Q(x, y) = \vartheta_{01}(v|q);\quad R(x, y) = \vartheta_{10}(v|q)$$

ist. Auf Grund der drei ersten Theoreme, die Identitäten zwischen Reihen und Produkten geben, folgt als viertes Theorem die Identität (8) (S. 8), die die Umformung der Reihe für $P(x,y)$ in ein unendliches Produkt liefert, und als fünftes die analoge Identität, die dasselbe für die Funktion $R(x,y)$ leistet. Für $y = 1$ ergeben sich die Thetanullreihen, die durch Px, Qx, Rx bezeichnet werden, und für die durch einfache Umformungen das „höchst wichtige Theorem“ (die Zählung der Theoreme hört hier auf) gewonnen wird: „Das Arithmetisch-Geometrische Mittel zwischen $(Px)^2$ und $(Qx)^2$ ist allemal $= 1$“. Mit der Darstellung

$$x = \frac{m^2 - n^2}{16\, m' m''} \left(\frac{m''}{m'''}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m'''}{m''''}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{m''''}{m^{V}}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots,$$

wo

$$m^{(\lambda)} = \mu\left(Px^{2^\lambda}\right)^2,\ n^{(\lambda)} = \mu\left(Qx^{2^\lambda}\right)^2;\ \mu = M(m, n)$$

ist, die uns aus der Scheda An bereits bekannt ist, bricht die Abhandlung ab.

Auf dieselbe Zeit wie die „Hundert Theoreme“ würde die Notiz zu datieren sein, die Werke III, S. 384, abgedruckt ist und aus dem Handbuch **19** (begonnen November 1809) S. 147 stammt. Es finden sich nämlich (vergl. die Angabe von Schering a. a. O.) auf der vorhergehenden Seite (146) Formeln über die Reihen $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$, also mit denselben Bezeichnungen wie in den „Hundert Theoremen“, aufgezeichnet. Jene Notiz enthält das Theorem: „das Produkt zweier Summen von vier Quadraten ist selbst eine Summe von vier Quadraten“, aus dem bekanntlich Jacobi in seinen Vorlesungen die wichtigsten Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet hat. Ob Gauß wirklich, wie Schering vermutet, mit Hilfe dieses Theorems die Darstellbarkeit von zwei beliebigen Zahlen m, n durch die Funktionen $(Px)^2$, $(Qx)^2$ für

$$\log x = -\pi \frac{M(m, n)}{M(m, \sqrt{m^2 - n^2})}$$

nachgewiesen hat, entzieht sich unserer Kenntnis, jedenfalls hat er diese Darstellbarkeit auf andere Weise gefunden.

Für die zunächst folgenden Jahre versiegen unsere Quellen gänzlich. Wir müssen gleich zu dem Jahre 1827 übergehen, das sich für Gauß dadurch zu einem bedeutungsvollen gestaltet hat, daß Abel und Jacobi in diesem Jahre mit der Entdeckung der Theorie der elliptischen Funktionen hervortraten.

9. Die Jahre 1827—1843.

a) Abels und Jacobis Entdeckungen. Logarithmisches Potential. Integralbegriff.

Die Geschichte der Entdeckung der elliptischen Funktionen durch Abel und Jacobi ist so vielfach und mit Benutzung der sämtlichen zu Gebote stehenden Quellen so ausführlich dargestellt worden, daß es sich erübrigt, hier auch nur andeutungsweise auf dieselbe einzugehen. Auch der ausschlaggebende Einfluß, den die berühmte Stelle im art. 335 der Disquisitiones arithmeticae sowohl auf Abel als auf Jacobi ausgeübt hat, ist anerkannt; wir können in bezug auf Abel nur ein gewisses persönliches Moment den bisherigen Darstellungen[1]) hinzufügen, das, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist.

Es ist nämlich bekannt, daß Abel durch Degen veranlaßt worden ist, sich mit den elliptischen Funktionen zu beschäftigen[2]); Abel war Juli—September 1823 bei Degen in Kopenhagen und beginnt[3]) 1823 sich mit Integralrechnung zu beschäftigen. Nun hat Schumacher, wie er in dem oben erwähnten Briefe an Gauß vom 8. Juni 1816 schreibt[4]), Degen mitgeteilt, daß Gauß sich schon lange mit dem agM. beschäftigt, und es ist sehr wahrscheinlich, daß Degen von diesem Umstande Abel Mitteilung gemacht hat. Es könnte also Gauß außer durch seine Veröffentlichungen durch Vermittelung von Schumacher und Degen gewissermaßen noch persönlich einen Einfluß auf Abel ausgeübt haben, wenn dieser Einfluß auch nur darin bestanden hat, daß er Abel veranlaßte, in Gauß Schriften nach Stellen zu suchen, die sich auf die Theorie der elliptischen Funktionen beziehen. Daß Abel jene Stelle in den Disquisitiones arithm. gekannt hat, geht z. B. aus dem Briefe an Crelle vom 4. Dezember 1826[5]) hervor; für seine Bekanntschaft mit der „Determinatio attractionis" haben wir kein direktes Zeugnis.

Von Gauß selbst besitzen wir eine Reihe von brieflichen Äußerungen über Abel und Jacobi; die eine Briefstelle an Bessel haben wir schon oben (S. 24) wiedergegeben. Wenn Gauß darin

---

1) Siehe Sylow, Mémorial, S. 35, 36.

2) Mémorial, Brief von Degen an Hansteen, 21. Mai 1821, Corresp. S. 97.

3) Siehe Sylow, a. a. O. S. 27.

4) Briefwechsel I, S. 127.

5) Mémorial, Corresp. S. 52, 53.

sagt, Abel „überhebt mich in Beziehung auf etwa ein Drittel dieser Sachen der Mühe“ so wird man dies als eine Bestätigung des von uns aufgestellten Programms für das von Gauß geplante große Werk über die transzendenten Funktionen ansehen können. Das eine Drittel wäre die allgemeine Theorie der aus $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entspringenden Funktionen, das zweite die Theorie des agM. und der Modulfunktion, endlich das dritte, in bezug auf das Abel Gauß zuvorgekommen ist, die Theorie der elliptischen Funktionen im engeren Sinne. Wenn Gauß noch hinzufügt[1]): „Zu meiner Verwunderung erstreckt sich dies [nämlich die Übereinstimmung seiner Resultate mit denen von Abel] sogar auf die Form und zum Teil auf die Wahl der Zeichen, so daß manche seiner Formeln wie eine reine Abschrift der meinigen erscheinen“, so wird man daran zu denken haben, daß Abel die Perioden mit ω, $\tilde{\omega}$ bezeichnet, was in der Tat an Gauß' ϖ, ϖ' erinnert, und daß infolge dessen die Produktentwickelungen der Zähler und Nenner bei Abel fast ebenso aussehen wie bei Gauß.

Die beiden in den Astronomischen Nachrichten von 1827 im Auszug publizierten Briefe Jacobis[2]) an Schumacher hat dieser letztere an Gauß zur Begutachtung geschickt. Gauß schickt sie am 4. bezw. 19. August 1827 zurück[3]) und am 6. August trägt er in das Handbuch **16** (S. 137 ff.) die Werke III, S. 470 ff. abgedruckte Aufzeichnung ein, die (vergl. Werke III, S. 475, art. [9]) am 29. August fortgesetzt wird. Es tritt in dieser Aufzeichnung zu den Charakteristiken P, Q, R für die drei geraden Thetafunktionen noch die Charakteristik $S(x, y)$ für die ungerade Thetafunktion

$$S(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}) - x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}) + \cdots$$

hinzu (Werke III, S. 472).

In dieser, wie wir wohl sagen können, unter dem unmittelbaren Eindruck der Jacobischen Briefe niedergeschriebenen Aufzeichnung (Werke III, S. 470)[4]) finden wir zunächst Formeln für die Transformation 2. und 3. Ordnung der vier Thetafunktionen. Wie in der aus demselben Handbuch **16** stammenden Aufzeichnung Werke III, S. 436 ff. (die nach Schering auf 1808 zu datieren ist und oben S. 75, 76 bereits besprochen wurde) wird auch hier (art. [4], Werke III, S. 472) die allgemeine Funktion

1) Briefwechsel mit Bessel, S. 477.
2) Jacobis Werke I, S. 29 ff.
3) Briefwechsel II, S. 109, 112.
4) Vergl. für diese Abhandlung Pepin, a. a. O. S. 76—89.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta(k+\alpha)^2} = (\theta, \alpha)$$

eingeführt und für sie die Formel

$$(\theta, 2\alpha)(\theta, 2\beta) = (2\theta, \alpha+\beta)(2\theta, \alpha-\beta) + (2\theta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2})(2\theta, \alpha-\beta+\tfrac{1}{2})$$

angegeben, die die Formeln für die Transformation zweiter Ordnung zusammenfaßt. Der folgende Artikel [5] bringt dann die Verifikation, daß für

$$i \sin\theta = \frac{S(x,y)}{P(x,y)} \cdot \frac{Q(x,1)}{R(x,1)}\,^{1)}, \quad y = e^{ui}$$

zwischen θ und u die Differentialbeziehung

$$du = \frac{d\theta}{\sqrt{P(x,1)^4 \sin^2\theta + Q(x,1)^4 . \cos^2\theta}}$$

besteht, d. h. daß $\sin\theta$ in der Tat die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung mit dem Modul $\frac{R(x,1)^2}{P(x,1)^2}$ ist. Diese Verifikation wird auch in der auf S. 111, 112 desselben Handbuchs **16** befindlichen Notiz (Anhang 2) gegeben, worauf schon oben (S. 47 hingewiesen wurde, als von den Aufzeichnungen der Scheda Ac die Rede war.

Es folgt noch (art. [7]) die Transformation 7. Ordnung und, mit dem Datum 29. August versehen, die Transformation 5. Ordnung mit der Modulargleichung. Bemerkenswert ist die Stelle art. [10] (Werke III, S. 476), wo von der allgemeinen Transformation ungerader Ordnung die Rede ist; Gauß hat also wirklich, wie er an Schumacher schreibt[2]), das in dem Jacobischen Briefe „enthaltene Theorem . . . ganz leicht aus [seinen] Untersuchungen über die Transzendenten abgeleitet". Der auf die Theorie der Modulfunktion bezügliche Artikel [12] wurde schon oben (S. 67) besprochen.

Ein ganz neuer Gedanke tritt hier in überraschender Weise in den artt. [16], [17] auf. Diese beziehen sich auf die Laplacesche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

sodaß die Vermutung gerechtfertigt erscheint, Gauß habe zu

1) Gauß bezeichnet die $P(x,1)$, $Q(x,1)$, $R(x,1)$ in dieser Notiz wieder mit p, q, r.

2) Brief vom 19. August 1827, Briefw. II, S. 112.

jener Zeit die Theorie der Funktionen komplexer Variabeln auf die Theorie des logarithmischen Potentials zu gründen versucht. Das in dem Artikel [16] ausgesprochene Theorem, daß eine harmonische Funktion, die auf der Begrenzung eines Gebietes den konstanten Wert A besitzt, auch im Innern überall gleich A ist, bildet die Grundlage für das Prinzip der analytischen Fortsetzung (vergl. Riemann, Inauguraldissert. art. 15, Werke, 2. Aufl., S. 28); der handschriftliche Nachlaß gibt aber keinen Anhaltspunkt für die Entscheidung der Frage, ob Gauß bis zu diesem Prinzip vorgedrungen ist[1]). Gauß beweist dieses Theorem mit Hilfe von Integralsätzen (ein Beweis, der bekanntlich Bedenken unterliegt) und überträgt es sogleich auf den Fall des Newtonschen Potentials, sodaß dieser und der folgende Artikel zugleich als Vorarbeiten für die 1840 veröffentlichte Abhandlung „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte[2])“ gelten können.

Eine eingehende Analyse der letztgenannten Abhandlung muß einem folgenden Hefte dieser „Materialien“ vorbehalten bleiben. Hier möge nur hervorgehoben werden, daß Gauß in den artt. 29 ff. (Werke V, S. 231 ff.) den Beweis für die Lösbarkeit des Randwertproblems für das Innere eines beliebig gestalteten Körpers in der Weise zu geben versucht, daß er die Existenz einer Massenverteilung auf der Oberfläche als evident ansieht, für die das über diese Oberfläche erstreckte Integral

$$\int (V-2U)m\,ds$$

---

1) Demgemäß muß auch die Frage offen bleiben, ob Gauß aus der Tatsache, daß der reale Teil des Quotienten (Gl. (57), S. 61)

$$t=\frac{M(m,n)}{M(m,\sqrt{m^2-n^2})}$$

stets positiv ist, die Folgerung gezogen hat, daß die Modulfunktion (Gl. (64) S. 66)

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{q^4(t)}{p^4(t)}$$

über die laterale t-Achse hinweg nicht fortgesetzt werden kann. Daß diese Funktion ihrer Definition nach nur in der rechts von der lateralen Achse gelegenen Halbebene existiert, war Gauß jedenfalls bewußt. Dies geht einerseits aus der Bedingung für die Konvergenz der Reihen $p(t)$, $q(t)$, andererseits daraus hervor, daß in der aus dem Jahre 1827 stammenden Aufzeichnung des Handbuchs 16 (siehe oben 5) S. 60) der Fundamentalbereich der Modulfunktion nur in der gedachten Halbebene gezeichnet ist. Man vergl. hierzu auch das Polygonnetz in der weiter unten noch zu nennenden Figur Werke III, S. 104.

2) Werke V, S. 195.

ein Minimum wird. Darin bedeutet V das Potential der Massenverteilung mit der positiven Oberflächendichtigkeit m und U eine gegebene endliche und stetige Funktion auf der Oberfläche. Wir erkennen hier die Schlußweise, die Riemann (1851) zur Grundlage für die Beweise seiner allgemeinen Existenztheoreme gemacht und (1857), unter Bezugnahme auf Gauß, als Dirichletsches Prinzip bezeichnet hat, dieselbe, die auch Lord Kelvin (1847) bei der Lösung der sogenannten zweiten Randwertaufgabe angewandt hat. Die wechselvollen Schicksale dieser Schlußweise, von ihrer Kritik durch Weierstraß bis zu ihrer Wiederbelebung durch Herrn Hilbert sind bekannt.

In einer anscheinend aus den vierziger Jahren des XIX. Jahrhunderts stammenden Handschrift „Bestimmung der Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Functionen einer veränderlichen Größe entwickelt werden" (Fa, vergl. oben S. 89) gibt Gauß (im art. 6) die Definition eines Integrals $\int_{t^0}^{T} f(t)dt$ für eine zwischen t_0 und T eindeutige, endliche und stetige Funktion $f(t)$ als Grenzwert einer Summe und spricht sich dann (in den artt. 7, 8) über die Bedeutung eines solchen Integral weiter wie folgt aus:

„Ist hingegen ft eine vielwerthige Function, so ist erforderlich, daß nach einem Principe bestimmt sei, welcher aus den verschiedenen Werthen der Function für jeden Werth von t zwischen den Grenzen t^0 und T gelten soll. Das Princip, daß die Werthe der Function nach der Stetigkeit zusammenhängen sollen, wird, sobald ft für einen der Werthe t gegeben ist zur Bestimmung des Zuges ausreichen, so lange man nicht auf einen Werth von t kommt, für welchen der betreffende Werth von ft mit einem andern zusammenfällt (also zwei Züge sich kreuzen), in welchem Falle über das fernere Fortschreiten eine anderweitige Bestimmung getroffen werden muß. Übrigens verstehe ich das Fortschreiten nach der Stetigkeit nur so, daß unendlich kleinen Veränderungen von t unendlich kleine Änderungen ft entsprechen, und sehe einen Übergang von reellen Werthen zu imaginären nicht als eine Unterbrechung der Stetigkeit an".

Über den Fall wo $f(t)$ als eindeutige Funktion in einem zwischen t^0 und T gelegenen Werte t' unendlich wird, heißt es weiter:

„Wenn, indem ft' unendlich wird, $\int_{t^0}^{t'-\omega} ft\,dt$ und $\int_{t'+\omega}^{T} ft\,dt$, bei unendlich abnehmendem ω, nicht beide endliche Grenzwerthe

haben, so bildet .... der Werth $t = t'$ eine unübersteigliche Scheidewand, so lange man (wie man bisher immer gethan hat) sich dabei ausschließlich auf reelle Werthe von t beschränkt. Es findet sich hier also eine Lücke in der Integralrechnung .... Die gründliche Abhülfe dieses Mangels ist nur dadurch zu gewinnen, daß man den imaginären Größen völlig gleiche Rechte einräumt, also die Analysis gleichmäßig über das ganze Gebiet der complexen Größen erstreckt. In diesem Gebiete kann man von einem Werthe der veränderlichen Größe t zu einem andern auf unendlich vielen verschiedenen Wegen nach der Stetigkeit gelangen, und so bei der Integration $\int ft\,dt$ solche Werthe von t, für welche ft unendlich groß wird, umgehen. Eine vollständige Abhandlung der aus diesem Gesichtspunkte aufgefaßten Theorie des Integrirens würde einen viel größeren Raum erfordern als hier zulässig ist. Es werden jedoch einige für unsere Hauptuntersuchung nothwendigen Sätze hier entwickelt werden müssen."

Hier bricht die Handschrift ab. Wir erwähnen noch, daß die artt. 1—5 dieser Handschrift Betrachtungen über Analysis situs mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche enthalten, die jedenfalls in der Theorie der Integrale benutzt werden sollten.

Die Bemerkung „wie man bisher immer getan hat" zeigt, daß Gauß zur Zeit, als er diese Aufzeichnung verfaßt hat (also jedenfalls nach 1831) noch keine Kenntnis hatte von Cauchy's Untersuchungen über die Integrale von Funktionen komplexer Variabeln. Daß er diese Untersuchungen aber später kennen gelernt hat, zeigt ein Blättchen des Nachlasses (Fm, Varia analytica), wo unter der Überschrift „Tailors Lehrsatz nach Cauchy's Behandlung" der Cauchysche Integralsatz für den Fall eines Kreises abgeleitet wird[1]).

Das was Gauß über die Integrale mehrdeutiger Funktionen sagt, bestätigt (vergl. oben S. 98ff.), daß er in das Wesen dieser Integrale nicht völlig eingedrungen ist. Denn dadurch, daß er nach dem Einrücken in einen Verzweigungspunkt „über das fernere

1) Auf der letzten Seite dieses Blättchens steht der Riemannsche Integralsatz für das logarithmische Potential in der Form:

$$-2\pi u_0 = \int\left(u\frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds.$$

Gauß hat diesen Satz also entweder vor Riemann selbständig gefunden, oder er hat — was mir, wegen der vollständigen Übereinstimmung mit Riemanns Bezeichnungen (Inauguraldissertation, art. 10, Werke, 2. Aufl., S. 20), wahrscheinlicher dünkt — ihn sich aus Riemanns Inauguraldissertation notiert. Im letzteren Falle würde diese Aufzeichnung aus dem Jahre 1851 herrühren.

Fortschreiten eine anderweitige Bestimmung" für erforderlich hält, beschränkt er sich auf die Betrachtung eines eindeutigen Zweiges der Integralfunktion, statt — wie es z. B. Jacobi 1835[1]) getan hat —, gerade aus dem Fehlen einer solchen Bestimmung die Abhängigkeit des Integralwerts vom Integrationswege zu folgern.

b) Pentagramma mirificum. Drehungen der Kugel. Zusammenfassung.

Die der Zeit nach nächstfolgende Aufzeichnung, die sich auf die Theorie der elliptischen Funktionen bezieht, ist (vergl. die Angabe von Schering, Werke III, S. 495) vor dem 23. Januar 1835 geschrieben und handelt von dem als Pentagramma mirificum bezeichneten sphärischen Fünfeck, dessen Diagonalen Quadranten sind[2]). Die Bestimmung eines solchen Pentagramms hängt mit der Fünfteilung der elliptischen Funktionen zusammen. Auf denselben Gegenstand beziehen sich noch zwei aus dem Jahre 1843 stammende Aufzeichnungen[3]). Herr Fricke spricht die Ansicht aus, daß Gauß die Beziehung zwischen dem Pentagramma und der Fünfteilung der elliptischen Funktionen „auf Anregung von Jacobi's Abhandlung Über die Anwendung der elliptischen Transzendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie (1828) erkannt hat".

Diese Aufzeichnungen von 1843 sind anscheinend die letzten, die Gauß über elliptische Funktionen gemacht hat. Da er 1791 begonnen hat, sich mit der Theorie des agM. zu beschäftigen, so erstreckt sich seine Arbeit an der Theorie dieser Funktionen auf einen Zeitraum von mehr als fünfzig Jahren.

Entspringend aus den beiden Wurzeln des agM. (1791) und der Theorie der lemniskatischen Funktionen (1797) erwächst der Stamm der Theorie der elliptischen Funktionen in den großen Entdeckungen von November 1799 bis Mitte des Jahres 1800 zu seiner vollen Höhe. Mit Hilfe der durch das agM. definierten Perioden wird der sinus lemniscaticus zum sinus lemniscaticus universalissime acceptus ausgebaut, und mit der Einführung

---

1) Vergl. Bibliotheca Mathematica (III) 9, S. 211—226 (Gundelfinger); 11, S. 138—152 (Schlesinger).

2) Handbuch 19, S. 181, 182, gedruckt Werke III, S. 481 ff., artt. [1], [2]. Auf S. 184 des Handbuchs befindet sich das Datum 1835, Januar 23, gedruckt Werke V, S. 609.

3) Handbuch 19, S. 240—251, gedruckt Werke III, S. 484, artt. [3], [5]—[8]; auf S. 249 des Handbuchs, im Druck. art. [7], das Datum 1843 April 30; ferner Werke VIII, S. 106 ff., vergl. die Anmerkungen von Herrn Fricke daselbst S. 112—117.

der vier Thetafunktionen, die als unendliche Reihen und Produkte dargestellt werden, gewinnt Gauß das Instrument, das ihm, im Verein mit seiner Reduktionstheorie der quadratischen Formen, die Herrschaft über die elliptischen Funktionen und die Modulfunktion sichert.

An die Stelle des agM. tritt dann (zu welcher Zeit, läßt sich nicht genau feststellen, jedenfalls vor 1808) die allgemeinere Betrachtung der durch die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ definierten Funktionen, mit der Gauß in die Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einlenkt und die Grundlagen für die funktionentheoretische Behandlung derselben schafft.

In welchem Maße er auch als Vorläufer für die Theorie der automorphen Funktionen angesehen werden muß, zeigt nicht nur seine Konstruktion des Fundamentalbereichs für die Modulfunktion, sondern auch seine Deutung der linearen Substitution

$$t' = \frac{(\alpha + \beta i)t - (\gamma + \delta i)}{(\gamma - \delta i)t + \alpha - \beta i}$$

als Drehung der Kugelfläche in sich selbst, die in zwei, Werke VIII, S. 354—356 abgedruckten, Aufzeichnungen erörtert wird, und das auf einen Fall transzendenter Dreiecksfunktionen, der sich nicht der Modulfunktion unterordnet, bezügliche Polygonnetz, das Werke VIII, S. 104, nach einer Zeichnung auf einem besonderen Blatte, wiedergegeben ist.

Für die Funktionen einer komplexen Variabeln hat Gauß die Mehrdeutigkeit einer solchen Funktion durch ihre Wertänderung bei einem Umlauf (reditus) der Variabeln um einen singulären Punkt erklärt, die Integration in einem Gebiete, wo die Funktion eindeutig ist, beherrscht, die Bedeutung der Analysis situs schlichter ebener Bereiche für die Theorie dieser Integrale gekannt, und den Zusammenhang entdeckt, der zwischen diesen Funktionen und der konformen Abbildung einerseits und der Theorie des logarithmischen Potentials anderseits besteht.

Das oben (S. 89) bereits erwähnte, im Anhang 5. abgedruckte Fragment zeigt uns Gauß auf dem Wege zu den Grundbegriffen der Mengenlehre.

Anhang.

Abdruck einiger Gauss-Handschriften.

1. [Zwei Zettel zur Theorie des agM.[1])]

[Erster Zettel]

Ponendo

$$y = x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^{-5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}x^{-7} \text{ etc.}$$

$$(= \varphi x$$

eruitur

$$xy + (3xx-1)\frac{dy}{dx} + x(xx-1)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Iam ponendo $x = \frac{1}{2}(t+t^{-1})$ erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^3\frac{dy}{dt}$$

Hinc

$$\frac{tt+1}{2t}y + \frac{3t^4+2tt+3}{2tt-2}\frac{dy}{dt}$$
$$+\frac{tt+1}{2t}\left(\frac{tt-1}{2t}\right)^2\left\{\left(\frac{2tt}{tt-1}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{2t}{tt-1}\right)^3\frac{dy}{dt}\right\}$$

sive

$$\frac{tt+1}{2t}y + \frac{3t^4+1}{2tt-2}\frac{dy}{dt} + \frac{t(tt+1)}{2}\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

sive

$$(t^4-1)y + t(3t^4+1)\frac{dy}{dt} + tt(t^4-1)\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Hinc facile deducitur

$$y = 2\left(t^{-1} + \frac{1}{4}t^{-5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}t^{-9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}t^{-13} + \text{etc.}\right)$$

1) Ff. Entstehungszeit spätestens 1799, Nov.-Dez. (vergl. unten).

sive

$$\varphi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = 2t\,\varphi tt$$

Ponendo $x = \frac{1}{p}$ erit

$$y - p(1+pp)\frac{dy}{dp} + pp(1-pp)\frac{d^2y}{dp^2} = 0$$

[Zweiter Zettel]

Wenn $\varphi x = x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-3} + \frac{1.9}{4.16}x^{-5} + \text{etc.}$

so ist bewiesen, daß

$$2x\varphi xx = \varphi\frac{xx+1}{2x} \dots\dots [1]$$

Es sei $\dfrac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\dfrac{xx}{xx-1}}} = \Psi x$

woraus, $\sqrt{\dfrac{xx}{xx-1}} = u$ gesetzt, folgt $\varphi u = \dfrac{1}{\sqrt{uu-1}\,.\,\Psi\sqrt{\dfrac{uu}{uu-1}}}$

dann gibt die Funktionalgleichung [1],

$$\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}\,.\,\Psi\sqrt{\dfrac{x^4}{x^4-1}}} = \frac{1}{\dfrac{xx-1}{2x}\,\Psi\dfrac{xx+1}{xx-1}}, \text{ mithin}$$

$$\Psi\sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}} = \sqrt{\frac{xx-1}{xx+1}}.\,\Psi\frac{xx+1}{xx-1}$$

man setze $\dfrac{xx-1}{xx+1} = tt$, so wird $xx = \dfrac{1+tt}{1-tt}$ und

$$\Psi\frac{1+tt}{2t} = \frac{1}{t}\,\Psi tt$$

Nun ist aber auch $M\dfrac{1+tt}{2t} = \dfrac{1}{t}Mtt$

Macht man daher allgemein $\dfrac{\Psi z}{Mz} = Fz$, so wird

$$F\frac{1+tt}{2t} = Ftt$$

woraus man leicht schließt, daß Fz eine Konstante sein müsse.

Nun ist für $u = \infty$, $\varphi u = \frac{1}{u}$; also $\Psi\sqrt{\frac{uu}{uu-1}}$ oder $\Psi 1 = 1$.

Es ist aber auch $M1 = 1$ folglich die Konstante $= 1$ und daher

$$Mx = \frac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\frac{xx}{xx-1}}}.$$

Also $\frac{1}{Mx}$ der von V freie Theil des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{xx-1}.\sqrt{\left(\frac{xx}{xx-1} - \cos V^2\right)}}$$ oder auch der von V freie Theil

bei

$$\frac{1}{\sqrt{(xx - \cos V^2(xx-1))}} = \frac{1}{\sqrt{(xx \sin V^2 + \cos V^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+(xx-1)\sin V^2)}}$$

und folglich

$$\frac{1}{M\sqrt{(1+y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+y \sin V^2)}}$$ (abiectis partibus angulum V implicantibus)

Übrigens ist es gleichgültig, ob man $\sin V^2$ oder $\cos V^2$ schreibt.

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1.9}{4.16}x^4 \text{ etc.}$$

$$\varphi s = \frac{1}{Mc} = \frac{\text{tang}}{M\frac{1}{c}}$$

0	0
30°	0,728395
45°	0,847213
60°	0,931608
90°	1.

Bemerkungen zu diesen Aufzeichnungen.

Man wird diese Zettel mit den in den „Fragmenten“ abgedruckten Aufzeichnungen [44]—[74], die der Scheda Ac entstammen, in Verbindung zu setzen haben. Die Funktion φx des ersten Zettels stimmt mit Q in [53] der „Fragmente“ überein. Der erste Zettel gibt den Beweis der Formel [1] des zweiten. Dieser letztere ist also der spätere. Er enthält einen Beweis dafür, daß die Reihenentwickelung $1 + \frac{1.1}{2.2}x^2 + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}x^4 + \cdots$ mit dem reziproken Wert

von $M(1, \sqrt{1-x^2})$ übereinstimmt. Interessant ist besonders, daß aus dem Bestehen der Funktionalgleichung $F(tt) = F\left(\frac{1+tt}{2t}\right)$ gefolgert wird, daß $F(z)$ eine Konstante sein müsse [1]. Die Zahlentabelle am Schluß des zweiten Zettels stimmt mit der auf S. 13 der Scheda Ac befindlichen (von der in den „Fragmenten" S. 8 nur ein Auszug abgedruckt ist) für φ und $M \sin\varphi$ überein, nur ist die letztere vollständiger, indem sie die Angaben von 5 zu 5 Grad enthält. Daraus geht hervor, daß die beiden Zettel älter sind als die betreffenden Aufzeichnungen der Scheda Ac.

---

2. [Die Lösung des Umkehrproblems des elliptischen Integrals erster Gattung].

[Handbuch 16 „Den astronomischen Wissenschaften gewidmet November 1801" S. 111—112, wahrscheinlich aus dem Jahre 1825].

[S. 111]

Setzt man

$$1 + 2x\cos\varphi + 2x^4\cos 2\varphi + 2x^9\cos 3\varphi + 2x^{16}\cos 4\varphi + \&c = P,$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = P', \quad \frac{dP'}{d\varphi} = P'', \text{ so wird}$$

$$P'P' - PP''$$

$$= (4xx + 16x^8 + 36x^{18} + 64x^{32} + \&c)(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^4\cos 4\varphi + \&c)$$

$$+ (2x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{9}{2}} + 50x^{\frac{25}{2}} + 98x^{\frac{49}{2}} \cdots)(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + \&c)$$

$$=$$

Ferner $PP = (1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \&c)(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi + \&c)$

$$+ (4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{9}{2}} + 4x^{\frac{25}{2}} + 4x^{\frac{49}{2}} + \&c)(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + \&c)$$

Noch $2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + 2x^{\frac{49}{2}}\cos 7\varphi + \&c = B$ gesetzt

$$BB =$$

$$(2x + 2x^9 + 2x^{25} + 2x^{49} + \&c)(1 + 2x^4\cos 4\varphi + 2x^{16}\cos 8\varphi + 2x^{36}\cos 12\varphi + \&c)$$

$$+ (1 + 2x^4 + 2x^{16} + 2x^{36} + \&c)(2x\cos 2\varphi + 2x^9\cos 6\varphi + 2x^{25}\cos 10\varphi + \&c)$$

oder besser $R = 2x^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}\varphi - 2x^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5}{2}\varphi - 2x^{\frac{49}{4}}\sin\frac{7}{2}\varphi + \&c$

---

1) Vergl. meine Notiz „Über eine Aufgabe von Hermite aus der Theorie der Modulfunktion" in den Berichten des V. internat. Mathematiker-Kongresses zu Cambridge.

gesetzt, wird

$$RR = (2x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{9}{2}}+2x^{\frac{25}{2}}+2x^{\frac{49}{2}}+\&c)(1+2xx\cos 2\varphi+2x^8\cos 4\varphi+\&c)$$
$$-(1+2xx+2x^8+2x^{18}+\&c)(2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi+2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi$$
$$+2x^{\frac{49}{2}}\cos 7\varphi+\&c)$$

und $R'R'-RR'' =$

$$\tfrac{1}{2}(2x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{9}{2}}+50x^{\frac{25}{2}}+98x^{\frac{49}{2}}+\&c)(1+2xx\cos 2\varphi+2x^8\cos 4\varphi$$
$$+2x^{18}\cos 6\varphi+\&c)$$
$$-(4xx+16x^8+36x^{18}+64x^{32}+\&c)(2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi$$
$$+2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi+\&c)$$

Setzt man also

$$1+2xx\cos 2\varphi+2x^8\cos 4\varphi+\&c = p, \qquad 1+2xx+2x^8+\&c = a, \qquad \frac{x\,\partial a}{\partial x} = a'$$

$$2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi+\&c = r, \qquad 2x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{9}{2}}+\&c = b, \qquad \frac{x\,\partial b}{\partial x} = b'$$

so wird

$$P'P'-PP'' = a'p+b'r \qquad PP = ap+br \qquad P^4+R^4 = (aa+bb)(pp+rr)$$
$$R'R'-RR'' = b'p-a'r \qquad RR = bp-ar \qquad = (aa+bb)^{\frac{3}{2}}(1+2x\cos 2\varphi+2x^4\cos 4\varphi+2x^9\cos 6\varphi+\&c)$$

$$P'P'-PP'' = \frac{aa'+bb'}{aa+bb}PP-\frac{ab'-ba'}{aa+bb}RR \qquad aa+bb = (1+2x+2x^4+\&c)^2$$

$$R'R'-RR'' = \frac{ab'-ba'}{aa+bb}PP+\frac{aa'+bb'}{aa+bb}RR \qquad aa'+bb' = (1+2x+2x^4+\&c)(2x+8x^4+\&c)$$

Hier ist noch zu bemerken (wovon jedoch der Beweis tiefer liegt) $ab'-ba' = \tfrac{1}{2}ab(a^4-b^4)$ also

$$\frac{P'P'-PP''}{PP}-\frac{R'R'-RR''}{RR} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{PP}{RR}+\frac{RR}{PP}\right)ab\,(aa-bb)$$

Noch findet man

$$PR' - RP' = \left(x^{\frac{1}{8}} + 3x^{\frac{9}{8}} - 5x^{\frac{25}{8}} - 7x^{\frac{49}{8}} + 9x^{\frac{81}{8}} \cdots\right)\left(x^{\frac{1}{8}} \cos \tfrac{1}{2}\varphi \right.$$
$$\left. - x^{\frac{9}{8}} \cos \tfrac{3}{2}\varphi - x^{\frac{25}{8}} \cos \tfrac{5}{2}\varphi + x^{\frac{49}{8}} \cos \tfrac{7}{2}\varphi + \&c\right)$$

[S. 112.]

Das Quadrat des 2^{n} Factors im andern Theile der vorstehenden Gleichung wird

$$= \tfrac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{25}{4}} + x^{\frac{49}{4}} + \&c\right)(1 - 2x \cos 2\varphi + 2x^4 \cos 4\varphi - 2x^9 \cos 6\varphi + \&c)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \&c)\left(x^{\frac{1}{4}} \cos \varphi + x^{\frac{9}{4}} \cos 3\varphi + x^{\frac{25}{4}} \cos 5\varphi + x^{\frac{49}{4}} \cos 7\varphi\ [+ \&c]\right)$$

Der erste Factor wird $= (aa + bb)\sqrt[4]{\dfrac{(aa - bb)\,ab}{2}}$?

Zusammen wird, reductis reducendis

$$PR' - RP')^2 = \tfrac{1}{4}(aa + bb)(ap - br)(bp + ar)$$
$$= \tfrac{1}{4}((aa - bb)\,PP + 2ab\,RR)(2ab\,PP - (aa - bb)\,RR)$$

Setzt man also

$$\frac{R}{P}\sqrt{\frac{aa - bb}{2ab}} = \sin\theta$$

so wird

$$\partial\varphi = \frac{2\,d\theta}{\sqrt{\{(aa - bb)^2 \cos\theta^2 + (aa + bb)^2 \sin\theta^2\}}}$$

$$\cos\theta = \frac{2x^{\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{2}\varphi + 2x^{\frac{9}{4}} \cos \frac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}} \cos \frac{5}{2}\varphi + \&c}{P}\sqrt{\frac{aa + bb}{2ab}}.$$

---

3. [Zur Theorie der Modulfunktion.]

[Zwei Blätter in Fg, das eine (gelbliches Papier) 4 Seiten, das andere (weißes Papier) 2 Seiten, ersteres anscheinend das frühere, aber beide aus derselben Zeit.]

[Erstes Blatt, gelbliches Papier, Wasserzeichen: F H F 1810.]

Arithmetisch geometrische Mittel.

$$m = \mu(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \text{etc})^2$$
$$n = \mu(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \text{etc})^2$$
$$\sqrt{(mm - nn)} = \mu\left(2x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{9}{4}} + 2x^{\frac{25}{4}} + \text{etc}\right)^2$$

Das AGMittel zwischen m und $\sqrt{(mm-nn)}$ sei $=\lambda$. Man hat dann

$$\lambda = \frac{\pi\mu}{\log\frac{1}{x}} \text{ oder } x = e^{-\frac{\pi\mu}{\lambda}}$$

Für Briggische Logarithmen wird $\lambda = \dfrac{a\mu}{\log\frac{1}{x}}$, wo $\log a = 0{,}1349342$

Auch kann man sich folgender Formel bedienen:

$$x = \frac{mm-nn}{16m'.\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^{IV}}.\,\&c} = \frac{m-n}{8\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^4}\ldots}$$

Beispiel

3,0000000	0,4771213	3,0000000	0,4771213
1,0000000	0,0000000	2,8284270	0,4515450
2,0000000	0,3010300	2,9142135	0,4645214
1,7320508	0,2385606	2,9129510	0,4643332
1,8660254	0,2709175	2,9135822	0,4644273
1,8612098	0,2697953		
1,8636176	0,2703568	0,2703567	9,6989700
1,8636159	0,2703564	0,2709175	0,5716671
1,8636167	0,2703566	0,2706371	9,1273029
		0,3010300	
a	0,1349342		
μ	0,2703566	0,6396307 =	Canon
C.λ . . .	9,5355727		
	9,9408635		
	0,8726970		
x	9,1273030		

Die A.G.Mittel gestalten sich anders, wenn man für ein n', n'', n''' &c. den negativen Werth wählt: doch sind alle Resultate in folgender Form begriffen:

$$\frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda}$$

Schöner Lehrsatz

$$\frac{\frac{2\partial m}{m}-\frac{2\partial n}{n}}{mm-nn}=\frac{\frac{\pi\partial\lambda}{\lambda}-\frac{\pi\partial\mu}{\mu}}{\lambda\mu}$$

[S. 2.]

Integrationsfähig durch eine Reihe wird die vorstehende Gleichung, wenn man sie in folgende Form setzt:

$$\frac{2\mu\mu}{mm-nn}\left(\frac{dm}{m}-\frac{dn}{n}\right)=\left(\pi d\frac{\lambda}{\mu}\right)-\pi d\frac{\mu}{\lambda}$$

Beispiel für einen imaginären Werth des A.G.Mittels.

3,0000000		0,4771213	0
1,0000000		0,0000000	360°
2,0000000		0,3010300	0°
– 1,7320508		0,2385606	180°
0,1339746		9,1270225	0°
	+ 1,8612098i	0,2697953	90°
0,0669873	+ 0,9306049i	9,9698876	85° 52′ 58″,10
0,3530969	+ 0,3530969i	9,6984089	45 0 0
0,2100421	+ 0,6418509i	9,8295254	71 52 46,58
0,2836930	+ 0,6208239i	9,8341482	65 26 29,05
0,2468676	+ 0,6313374i	9,8311572	68 38 36,05
0,2470649	+ 0,6324002i	9,8318368	68 39 37,82
0,2469962½	+ 0,6318688i	9,8314971	68 39 6,95
0,2469962½	+ 0,6318685i	9,8314970	68 39 6,93
0,2469962½	+ 0,6318686½i	9,8314970½	68 39 6,94

$$\frac{1}{(\mu)}=+0{,}5365910-1{,}3728774\,i=\frac{1}{\mu}+\frac{4i}{\lambda}$$

Das Hauptmoment des Beweises des umstehenden Lehrsatzes ist folgendes. Setzt man

$$\frac{m}{n}=a,\quad\frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}=b,\quad\frac{m}{\lambda}=A,\quad\frac{m}{\mu}=B,\ \text{so wird}$$

$$A = 1 + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}a^4 + \frac{1.9.25}{4.16.64}a^6 + \text{etc.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}b^4 + \frac{1.9.25}{4.16.64}b^6 + \text{etc.}$$

$$aA + (3aa-1)\frac{dA}{da} + (a^3 - a)\frac{ddA}{da^2} = 0, \qquad (1)$$

$$bB + (3bb-1)\frac{dB}{db} + (b^3 - [b])\frac{ddB}{db^2} = 0, \text{ woraus}$$

$$aB + (3aa-1)\frac{dB}{da} + (a^3 - a)\frac{ddB}{da^2} = 0, \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, wenn wir $\frac{BdA}{da} - \frac{AdB}{da} = u$ setzen

$$(3aa-1)u + (a^3 - a)\frac{du}{da} = 0 \text{ oder } (a^3 - a)u = \text{Const.}$$

[S. 3.]

Nun wird für $a = 1$, $b = 0$

$$A = \infty,\ (a^3 - a)A = 0;\ B = 1;\ \frac{dA}{da} = \infty,$$

$$(a^3 - a)\frac{\partial A}{\partial a} = -\frac{2}{\pi},\ \frac{dB}{da} = -\frac{1}{2},\ (a^3 - a)u = -\frac{2}{\pi}.$$

Summation einer Reihe, wo die Logarithmen der Glieder eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden.

Es seyn die Logarithmen dreier auf einander folgender Glieder:

$$a - b - c,\ a,\ a + b - c$$

und von einer andern Reihe

$$\alpha - \beta - \gamma,\ \alpha,\ \alpha + \beta - \gamma$$

Ist nun

$$\alpha = a + \frac{bb}{4c} + \frac{1}{2}\log k\pi - \frac{1}{2}\log c$$

$$\beta = i\,.\,180^0.\,\frac{b}{c}$$

$$\gamma = \frac{kk\pi\pi}{c}$$

$\frac{1}{2}\log k\pi = 0{,}0674670.920.5 \qquad k\pi = 1{,}3643763538.418$

$kk\pi\pi = 1{,}86152283563$

$4kk\pi\pi = 7{,}4460913425$

so sind die Summen beider Reihen gleich.

Beispiel.

4,2		
	+4,7	
8,9		−3,6
	+1,1	
10,0		−3,6
	−2,5	
7,5		−3,6
	−6,1	
1,4		

[Es folgt eine logarithmische Rechnung für $a = 10$, $b = -0{,}7$, $c = 1{,}8$, die ergibt:

$\alpha = 1{,}01832497$,

$\beta = -i.70^0$, $\gamma = 1{,}0341793$]

[S. 4.]

Ist

$$\frac{n}{m} = \frac{\mu(1 - 2e^{-M\pi} + 2e^{-4M\pi} - 2e^{-9M\pi} + \cdots)^2}{\mu(1 + 2e^{-M\pi} + 2e^{-4M\pi} + 2e^{-9M\pi} + \cdots)^2}$$

so kann man statt M setzen

$$\frac{1}{2ai + \frac{1}{2bi + \frac{1}{2ci + \frac{1}{2di + \frac{1}{2ei + \text{etc} + \frac{1}{M}}}}}}$$

wo a, b, c, d, e u.s.w. eine beliebige ungerade Menge ganzer reeller Zahlen bedeuten; oder auch

$$\frac{pM + 2qi}{r + 2sMi}$$

wo p, q, r, s beliebige der Bedingung

$$pr + 4qs = 1$$

genüge Leistende Ganze reelle Zahlen sind.

Setzt man $Pe^{-\pi t} = pt$

so ist

1) $p(t + 2ik) = pt$

2) $pt = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot p\frac{1}{t}$

$P(e^{-\pi t}, e^{2\pi u}) = p(t, u)$

so ist

$$e^{-\frac{uu}{4\pi t}} \sqrt{t}.p(t, u) = p\left(\frac{1}{t}, \frac{iu}{t}\right)$$

$$pt^4 = p(t+i)^4 + \left(\frac{1}{2}p\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}p\left(\frac{1}{4}t+i\right)\right)^4$$

$$pt = \frac{1}{2}p\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}p\left(\frac{1}{4}t+i\right)$$

$$pt + p(t+i) = 2p\,4t$$

$$p(t+i) = 2p\,4t - pt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(p\frac{1}{4t} - p\frac{1}{t}\right).$$

$e^{-\pi} = h$ gesetzt ist

$$\sum h^{\alpha nn + 2\beta n + \gamma}$$

$$= \frac{h^{\gamma - \frac{\beta\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \sum h^{\frac{1}{\alpha}nn + \frac{2\beta i}{\alpha}.n}$$

$$2ci + \frac{1}{M} = M' \qquad pM' = \sqrt{M}\cdot pM$$

$$2di + \frac{1}{M'} = M'' \qquad pM'' = \sqrt{M'}\cdot pM'$$

$$2ci + \frac{1}{M''} = M''' \qquad pM''' = \sqrt{M''}\cdot pM''$$

$$2bi + \frac{1}{M'''} = M^{IV} \qquad \text{etc.}$$

$$2ai + \frac{1}{M^{IV}} = M^{V} \qquad \text{oder}$$

etc.

$$pM^{V} = \sqrt{M\,M'\,M''\,M'''\,M^{IV}}\,.\,pM$$

$$pM^{V} = \sqrt{[2bi,\ 2ci,\ 2di,\ 2ei,\ M]}\,.\,pM.$$

[Zweites Blatt]

Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und

$$\frac{\alpha M - \beta i}{\delta + \gamma M i} = N$$

$ac = bb+1, \quad AC = BB+1$

ist hier $M = \dfrac{1+bi}{a}$, $N = \dfrac{1+Bi}{A}$

so geht die Form (a, b, c) in (A, B, C) über durch die Transformation $\begin{matrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{matrix}$

Wir unterscheiden 6 Fälle jenachdem nach dem Modulus 2

α	1	1	1	0	1	0
β	0	1	0	1	1	1
γ	0	0	1	1	1	1
δ	1	1	1	1	0	0
	1	2	3	4	5	6

Es ist dann

	1	2	3	4	5	6
$hpN =$	pM	qM	rM	qM	rM	pM
$hqN =$	qM	pM	pM	rM	pM	rM
$hrN =$	rM	rM	qM	pM	qM	qM

$$h = i^{\alpha}\sqrt{(\delta + \gamma M)}$$

Die Reduction von pM, qM, rM auf die einfachste Form

Es sei $M = \frac{\alpha + \beta i}{\delta - \gamma i}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze reelle Zahlen und Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Factor; man setze

$$\begin{aligned} \alpha\alpha + \beta\beta &= A \\ \alpha\gamma + \beta\delta &= B \\ \gamma\gamma + \delta\delta &= C \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= \sqrt{(AC - BB)} = D \end{aligned}$$

Man suche die einfachste Form des Det. $-DD$, welche der Form (A, B, C) aequivalent ist; sie sei (a, b, c)

Dann lassen sich die Functionen von M auf Functionen von $\frac{D + bi}{a}$ zurückführen. Der Algorithmus ist dieser

$$\frac{D + Bi}{A} = M \qquad DD + BB = AA' \qquad B + B' = hA'$$

$$\frac{D + B'i}{A'} = M' \qquad DD + B'B' = A'A'' \qquad B' + B'' = h'A''$$

$$\frac{D + B''i}{A''} = M'' \qquad DD + B''B'' = A''A'' \qquad B'' + B''' = h''A'''$$

[S. 2]

$$\sqrt{\frac{D + Bi}{A}} \cdot pM = pM' \quad \text{für gerades } h$$
$$= qM' \quad \text{für ungerades } h$$

$$\varepsilon^{h}\sqrt{\frac{D + Bi}{A}}\, qM = rM' \qquad \varepsilon = \sqrt{i}$$

$$\sqrt{\frac{D + Bi}{A}}\, rM = qM' \quad \text{für gerades } h$$
$$= pM' \quad \text{für ungerades } h$$

Wenn man aus h, h', h'' u. s. w. die Transformation von (A, B, A') in (a, b, c) ableitet, so werden deren Elemente (ob sie gerade oder ungerade) entscheiden welche Funktion von $\frac{D+bi}{a}$ mit der gegebenen von M so zusammenhängt, daß letztere in

$$\varepsilon^{H}\sqrt{\frac{D+Bi}{A}\cdot\frac{D+B'i}{A'}\cdot\frac{D+B''i}{A''}\cdots}$$

multipliziert werden muß. Wo M nicht rational ist, mag man $D = -1$ setzen und den Algorithmus ebenso bilden. Nämlich wenn $M = g + hi$ so geht man von der Form $\frac{1}{g}, \frac{h}{g}, \frac{gg+hh}{g}$ (Det. -1) aus und sucht ihre abgeleitete &c.

Es ist

M. Ar.-G. zwischen 1 ... 0,2	0,5208016	log	9,7166723	$= \frac{1}{pM^2}$
1,2 ... 0,8	0,9898721	log	9,9955791	$= \frac{1}{p\frac{1^2}{M}}$
	0,5261302		9,7210932	M

Man sucht

$$p\left(\frac{1}{7}M + \frac{6}{7}i\right) = -0{,}4201578 + 0{,}3006159\,i \qquad M = \operatorname{cotg}\psi$$

$$= q\left(\frac{1}{7}M - \frac{1}{7}i\right) \qquad \psi = 61^{0}\,14'\,59''$$

$$= r\left(\frac{7M}{1+MM} + \frac{7i}{1+MM}\right)\cdot\sqrt{\frac{7(M+i)}{1+MM}} \qquad a = \frac{7}{2}\sin 2\psi \qquad b = 7\sin\psi^{2}$$

$$r(a+bi) = 2A\left(\cos\frac{1}{4}b\pi - i\sin\frac{1}{4}b\pi\right)$$

$$+ 2A^{9}\left(\cos\frac{9}{4}b\pi - i\sin\frac{9}{4}b\pi\right)$$

&c

$$\log A = -\frac{1}{4} k\pi . a$$

$$\log \frac{1}{4} k\pi = 9{,}5328742$$

$a \ldots$ 0,4600640

9,9929382

0,9838711

$A \ldots$ 9,0151289

$2A \ldots$ 9,3171589

0,39602

9,71318

Richtig.

Man hat

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 . \cos\lambda^2)}} = \pi (pt)^2$$

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varphi^2 . \sin\lambda^2)}} = \pi \left(p \frac{1}{t}\right)^2 = \pi t\, (pt)^2$$

$$qt = pt . \sqrt{\cos\lambda}$$

$$rt = pt . \sqrt{\sin\lambda}.$$

---

4. [Berechnung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung (Rektifikation der Ellipse).]

[Mehrere Zettel in Fi.]

[Ein Zettel, rauhes Papier, anscheinend von einem Buchdeckel abgelöst.]

Setzt man

$$\operatorname{tg} T \sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tg} T'$$

$$\operatorname{tg} 2T' \sqrt{\frac{a'}{b'}} = \operatorname{tg} 2T''$$

$$\operatorname{tg} 4T'' \sqrt{\frac{a''}{b''}} = \operatorname{tg} 4T'''$$

u. s. w.

so wird

$$\int \frac{dT}{\sqrt{(aa \sin T^2 + bb \cos T^2)}} = \int \frac{dT'}{\sqrt{(a'a' \sin 2T'^2 + b'b' \cos 2T''^2)}}$$

$$= \int \frac{dT''}{\sqrt{(a''a'' \sin 2T'''^2 + b''b'' \cos 2T'''^2)}}$$

auch ist

$$\frac{\sin 2T}{\sqrt{(aa \sin T^2 + bb \cos T^2)}} = \frac{\sin 2T'}{\sqrt{a'a' \sin 2T'^2 + b'b' \cos 2T'^2)}}$$

[Drei Zettel, gelbliches geschöpftes Papier; zwei dieser Zettel sind, wie das Wasserzeichen, der niederländische Wappenlöwe mit Pfeilbündel und Schwert, zeigt, von demselben Bogen abgerissen.]

[Erster Zettel]:

$$a = \mu(1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \text{etc.})^2 = \mu f x$$
$$b = \mu(1 - 2xx + 2x^8 + 2x^{18} - \text{etc.})^2 = \mu f i x$$
$$c = \mu(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{25}{4}} + \text{etc.})^2 \qquad = \mu \ldots$$
$$aa - bb = 16cc$$
$$a + b = 2a', \quad ab = b'b', \quad cc = a'c', \quad a - b = 8c' \quad \&\text{c.}$$

x ist die Grenze von $\frac{c}{a}$, $\sqrt{\left(\frac{c'}{a'}\right)}$, $\sqrt[4]{\frac{c''}{a''}}$, $\sqrt[8]{\frac{c'''}{a'''}} \cdots$

Ferner ist das ar. geom. Mittel zwischen a und $4c$

$$= -\frac{\mu\pi}{2\log x} = \nu.$$

Es ist also

$$\log x = -\frac{1}{2}\frac{\mu\pi}{\nu}. \quad \text{Log}\frac{k\pi}{2} = 9{,}8339041884.$$

Setzt man $\sqrt{(aa \sin T^2 + bb \cos T^2)} = \Delta$

$$\int \frac{dT}{\Delta} = \frac{\theta}{\mu}$$

so erhält man θ durch folgenden Algorithmus

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} T\sqrt{\frac{a}{b}} &= \operatorname{tg} T' \\ \operatorname{tg} 2T'\sqrt{\frac{a'}{b'}} &= \operatorname{tg} 2T'' \\ \operatorname{tg} 4T''\sqrt{\frac{a''}{b''}} &= [\operatorname{tg}] 4T''' \\ \operatorname{tg} 8T'''\sqrt{\frac{a'''}{b'''}} &= [\operatorname{tg}] 8T^{\text{IV}} \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \text{Dann ist } \theta = T^{\infty}.$$

Man hat ferner

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}T = \frac{x^{\frac{1}{4}} \sin\tfrac{1}{2}\theta - x^{\frac{9}{4}} \sin\tfrac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}} \sin\tfrac{5}{2}\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{4}} \cos\tfrac{1}{2}\theta + x^{\frac{9}{4}} \cos\tfrac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}} \cos\tfrac{5}{2}\theta + \text{etc.}}$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{x^{\frac{1}{2}} \sin\theta - x^{\frac{9}{2}} \sin 3\theta + x^{\frac{25}{2}} \sin 5\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{2}} \cos\theta + x^{\frac{9}{2}} \cos 3\theta + x^{\frac{25}{2}} \cos 5\theta + \text{etc.}}$$

$$\operatorname{tg} 2T'' = \frac{x \sin 2\theta - x^{9} \sin 6\theta + x^{25} \sin 10\theta - \text{etc.}}{x \cos 2\theta + x^{9} \cos 6\theta + x^{25} \cos 10\theta + \text{etc.}}$$

[S. 2]

Eine independente Rechnung ist folgende

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\ \operatorname{tg} T &= \operatorname{tg} U \\
\operatorname{tg} T' &= \sqrt{\operatorname{tg} T \,.\, \operatorname{tg} U}, & U' &= \tfrac{1}{2}(T+U) \\
\operatorname{tg} 2T'' &= \sqrt{\operatorname{tg} 2T' \operatorname{tg} 2U'}, & U'' &= \tfrac{1}{2}(T'+U') \\
\operatorname{tg} 4T''' &= \sqrt{\operatorname{tg} 4T'' \operatorname{tg} 4U''}, & U''' &= \tfrac{1}{2}(T''+U'')
\end{aligned}$$

u. s. w.

Dann ist: $T^{\infty} = U^{\infty} = \theta$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{(aa \sin T^2 + bb \cos T^2)}\, dT \\
&= \frac{\theta}{\mu}\,(a'a' - 2(a''a'' - b''b'') - (4a'''a''' - b'''b''') \ldots) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(a-b) \sin 2U' - \tfrac{1}{2}(a'-b') \sin 4U'' \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(a''-b'') \sin 8U'' - \tfrac{1}{2}(a'''-b''') \sin 16U^{\mathrm{IV}} \ldots
\end{aligned}$$

[Zweiter Zettel.]

Zur Rectification der Ellipse

Es sei

$$\int \sqrt{(aa \cos T^2 + bb \sin T^2)}\, dT = W.$$

Man bilde die Reihe der arithm. geom. Mittel

a, b	$aa - bb = 16cc$	$cc = a'c'$
a', b'	$a'a' - b'b' = 16c'c'$	$c'c' = a''c''$
a'', b''	$a''a'' - b''b'' = 16c''c''$	$c''c'' = a'''c'''$
&c	&c	&c.
⋮		
α		

Man hat dann ferner zu setzen

$$\begin{aligned}
\frac{4 \sin T}{a} &= p & cp &= \sin 2u & p' &= \frac{p}{\cos u^2} \\
\frac{4 \sin T'}{a'} &= p' & c'p' &= \sin 2u' & p'' &= \frac{p'}{\cos u'^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{4\sin T''}{a''} = p'' \quad c''p'' = \sin 2u'' \qquad \&c.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Dann ist, den letzten Wert von $T = \Theta$ gesetzt,

$$W = \frac{\vartheta}{\alpha}\{a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{IV}c^{IV}\ldots\}$$

$$+ 8c'\cos T\sin T' + 16c''\cos T'\sin T'' + 32c'''\cos T''\sin T'''\cdots$$

$$= \frac{\Theta}{\alpha}(a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{IV}c^{IV}\ldots)$$

$$+ 2a'p'\cos T + 4a''p''\cos T' + 8a'''p'''\cos T''\ldots$$

salv. factore const.

$a = 302{,}78000$	2,4811272	c ... 0,7886597
$b = 301{,}78000$	2,4796904	c' ... 9,0969100 − 10
$a' = 302{,}28000$	2,4804094	c'' ... 5,7134110 − 10
$b' = 302{,}27944$	2,4804086	c''' ... 8,9464130 − 20
$\alpha = 302{,}27977$	2,4804090	

Factor von Θ..	2,4804098
$\frac{1}{2}\pi$	0,1961199
Erdquadrant	2,6765297
	7,0000000
Factor Const.	4,3234703
	2,4811272
a	6,8045975

Also die Länge des Bogens

$$= \frac{\Theta}{90^0}\cdot 10000000^m + 21060{,}580\cos T\sin T'$$
$$+ \quad 17{,}418\cos T'\sin T''$$

[S. 2.]

Die Winkel finden sich

$$\sin 2u = g\sin T \qquad \sin T' = \frac{h\sin T}{\cos u^2}$$

g ... 8,9095925	h ... 9,9992822
g' ... 7,2185606	h' ... 9,9999996
g'' ... 3,8350620	h'' 0

z. B. 51. 31. 48 = φ
0,09986
00144
38.33.46 = T

sin T 9,79475
8,90959
9,99928
9,79403
28
sin T' 9,79431
$T' = 38.31.0$

Man führe noch ein

$$a \operatorname{tg} U = b \operatorname{tg} U$$
$$a' \operatorname{tg} U' = b' \operatorname{tg} T'$$
$$a'' \operatorname{tg} U'' = b'' \operatorname{tg} T''$$

Dann ist:

$$\sin T' = \frac{\sin \frac{1}{2}(T+U)}{\cos \frac{1}{2}(T-U)}$$

$$\cos U' = \frac{a \sin T'}{a' \operatorname{tg} T} = \frac{b \sin T'}{a' \operatorname{tg} U} = \frac{b' \sin T'}{a' \sqrt{\operatorname{tg} T \operatorname{tg} U}}$$

$$\cos T' = \frac{\sin U'}{\sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}} \qquad b' \cos T' = \frac{a \sin U'}{\operatorname{tg} T}$$

$$b' \cos T' = \frac{b \sin U'}{\operatorname{tg} U}$$

[S. 3.]

$$\frac{\cos(T+U)}{\cos T \cos U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\cos T'^2}$$

$$\frac{\cos(T+U)}{\sin T \sin U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\sin U'^2}$$

$$\frac{2\cos(T+U)}{\sqrt{\sin 2T . \sin 2U}} = \frac{\cos(T'+U') . \cos(T'-U')}{\cos T' . \sin U'}$$

[3. Zettel. Enthält zwei Beispiele und die Wiederholung von Formeln, die sich auf den andern Zetteln ebenfalls finden.]

---

5. Grundbegriffe der Lehre von den Reihen[1]).

1. Der Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Größen kann im weiteren Sinne des Wortes eine Reihe genannt werden; indeß würde diese Ausdehnung des Begriffs wenig Nutzen haben und man beschränkt daher in der höheren Mathematik den Ausdruck Reihe auf den Inbegriff solcher Größen, die, insofern man jeder derselben ihre eigene Stelle anweiset, d. i. die erste, zweite, dritte Größe u. s. f. unterscheidet, alle nach einem Princip bestimmt werden. Der wesentliche Charakter einer Reihe ist also,

1) [Manuskript von 3 Quartblättern in Fa; auf der letzten Seite Rechnungen zur Osterformel.]

daß für jeden Ort in derselben die entsprechende Größe (das Glied der Reihe) sofort völlig bestimmt ist, und es daher als möglich angesehen wird, sobald man das Princip nach welchem die Reihe gebildet wird (ihr Gesetz) kennt, sie soweit man will fortzusetzen. Den Ort eines jeden Gliedes bezeichnet man durch eine Zahl, die der Index desselben heißt, so daß 1 der Index des ersten Gliedes ist, 2 der des zweiten u. s. f.

2. Der hier gegebene Begriff einer Reihe ist von weiterem Umfange als der gewöhnliche, da man sie durch den Inbegriff der Werthe einer Funktion Einer veränderlichen Größe erklärt, welche dieselbe erhält, indem man diese veränderliche Größe nach und nach = 1, 2, 3. u. s. f. setzt, wenn man anders nicht auch den Ausdruck Function in einer ausgedehnteren Bedeutung nehmen will, als bisher geschehen ist. Denn nach dieser Erklärung wäre z. B. die Reihe der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 u. s. f. oder jede daraus abgeleitete wie $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{121}$ u. s. f. nicht unter den Reihen enthalten, welches dem Sprachgebrauche weniger gemäß ist. Zum Unterschiede kann man solche Reihen, wo jedes Glied durch eine analytische Function des Index dargestellt wird, analytische Reihen nennen, so wie man die Function selbst, allgemein vorgestellt, das allgemeine Glied der Reihe zu nennen pflegt.

3. Ist eine Reihe a', a'', a''' u. s. f. .... $[R]$, in welcher für jeden endlichen Index das entsprechende Glied einen endlichen reellen Werth erhält, so beschaffen, das in ihr, so weit man sie auch fortsetzt, kein Glied vorkommt, das größer*) als eine gegebene Größe λ wäre, so kann man λ eine obere Grenze für die Reihe nennen (limes supra seriem, une limite en plus); ist hingegen keine Größe groß genug, um nach diesem Begriffe eine obere Grenze genannt werden zu können, oder mit anderen Worten, kann man in der Reihe zu so großen Größen als man will oder zu größern gelangen wenn man sie nur weit genug fortsetzt, so sagt man die Reihe habe keine obere Grenze. Es ist klar, daß wenn λ eine obere Grenze der Reihe $[R]$ ist, jede Größe, welche größer als λ ist, gleichfalls eine obere Grenze der Reihe sein werde, und im Fall nicht schon λ selbst die kleinste obere Grenze ist,

---

*) Die Wörter größer und kleiner werden hier allemal, wo nicht das Gegentheil erinnert wird, mit Rücksicht auf die Zeichen verstanden, so daß 0 und jede positive Größe größer als jede negative, und von zwei negativen Größen diejenige die größere genannt wird, die ohne Rücksicht auf das Zeichen die kleinere wäre. Ebenso sind die Ausdrücke zunehmen und abnehmen zu verstehen.

wird es noch kleinere als λ geben; nun ist aber von selbst klar, daß es kleinere Größen als λ gebe, die nicht mehr obere Grenzen der Reihe genannt werden können; läßt man demnach λ durch alle Zwischengrößen stetig abnehmen, so muß man nothwendig auf eine kleinste obere Grenze L' kommen, die also die Eigenschaft haben wird, daß kein Glied der Reihe $[R]$ größer als L' ist, wohl aber in dieser Reihe, wenn sie nur weit genug fortgesetzt wird, Glieder vorkommen können, die größer sind, als jede andere Größe, die kleiner als L' ist.

Ganz auf ähnliche Weise kann μ eine untere Grenze (une limite en moins) der Reihe $[R]$ heißen, wenn in derselben kein Glied vorkommen kann, das kleiner als μ wäre, woraus von selbst erhellet, was Reihen sind, die keine untere Grenze haben. Bei jeder Reihe, die untere Grenzen hat, wird es eine größte untere Grenze M' geben, so daß jede größere Größe als M' nicht mehr untere Grenze der Reihe heißen kann. — Da wir diese kleinsten oberen und größten unteren Grenzen allein brauchen, so wollen wir dieselben in der Folge schlechthin die obere, und die untere Grenze nennen und also den vorigen allgemeinen Begriff einer obern und untern Grenze, welchen wir bloß zur Ableitung des gegenwärtigen gebraucht haben, ganz bei Seite setzen.

Übrigens sieht man leicht ein, daß es zwei verschiedene Arten gebe, wie eine Größe L' die obere Grenze einer Reihe sein könne; entweder nemlich, wenn es in der Reihe wirklich ein Glied (oder mehrere) gibt, da[s] der L' gleich ist, die übrigen aber alle kleiner sind, oder, wenn zwar kein der Größe L' gleiches Glied in der Reihe vorkommen kann, aber doch, wenn $[R]$ weit genug fortgesetzt wird, Glieder, die so wenig als man will von L' abweichen [vorkommen]. Ganz auf dieselbe Art verhält es sich mit den unteren Grenzen.

Auf diese Weise gibt es vier verschiedene Arten von Reihen:

I. Reihen, die weder eine obere noch eine untere Grenze haben, z. B. $1, -2, +3, -4, +5$ u. s. f.

II. Reihen, die keine obere aber eine untere Grenze haben wie $1, 2, 3, 4$ u. s. f., wovon die untere Grenze 1.

III. Reihen, die keine untere aber eine obere Grenze haben, wie $-1, -2, -3$ u. s. f.

IV. Reihen, die sowohl eine obere als eine untere Grenze haben. Diese beiden Grenzen werden immer ungleich sein, wenn nicht alle Glieder der Reihe einander gleich sind. Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ u. s. f. wo die obere Grenze 1, die untere $\frac{1}{2}$.

Die letztere Art von Reihen ist hier für uns die wichtigste.

4. Wenn die Reihe a', a'', a''' u. s. f. die obere Grenze L' hat, so sieht man leicht, daß dieselbe auch mit Weglassung des ersten Gliedes, oder die Reihe a'', a''' u. s. f. eine obere Grenze L'' haben müße, und zwar wird L'' kleiner als L' sein, wenn $a' = L'$ und die folgenden Glieder alle wenigstens um eine bestimmte Größe kleiner sind; sonst wird sein $L'' = L'$, in keinem Falle aber $L'' > L'$. Auf gleiche Art wird die Reihe a''', a^{IV} u. s. f. die obere Grenze L''' haben, die Reihe a^{IV}, a^{V} u. s. f. die obere Grenze L^{IV} u. s. f., und so werden alle diese obern Grenzen eine neue Reihe bilden L', L'', L''', L^{IV} u. s. f. in welcher kein Glied kleiner[1]) als das vorhergehende sein kann. So leitet man aus der ursprünglichen Reihe -1, -2, -3, u. s. f. die Reihe -1, -2, -3 u. s. f. als obere Grenzen Reihe ab, die mit jener selbst überein kommt; aus der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ u. s. f. diese 1, 1, 1 u. s. f. wo alle Glieder 1 sind; aus der Reihe $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64} \cdot -\frac{3}{128}$ u. s. f., welche aus Entwickelung des Bruches $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}xx}$ entsteht*), diese $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \frac{23}{1024}$ u. s. f. Auf gleiche Art werden, wenn die Reihe a', a'', a''', a^{IV} u. s. f. eine untere Grenze M' hat, auch die Reihen a'', a''' u. s. f., a''', a^{IV} u. s. f., a^{IV}, a^{V} u. s. f. u. s. f. untere Grenzen M'', M''', M^{IV} u. s. f. haben, und diese werden eine neue Reihe M', M'', M''', M^{IV} u. s. f. bilden, in welcher kein Glied kleiner sein kann als das vorhergehende.

Wenn beide Umstände sich vereinigen, daß die ursprüngliche Reihe sowohl eine obere als eine untere Grenze hat, oder zur IVten Gattung gehört, so kann in [der] Reihe L', L'', L''' u. s. f. kein Glied vorkommen, das kleiner als irgend ein Glied der Reihe M', M'', M''' u. s. f. wäre. Denn gesetzt es wäre $L' < M^{m}$, so würde wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet die kleiner als 1 und m (oder auch der kleinsten von beiden gleich) ist, sein $L^{n} \leqq L'$, $M^{n} \geqq M^{m}$ und folglich $L^{n} < M^{n}$, welches widersprechend ist, da L^{n} die obere, M^{n} die untere Grenze von Einer und derselben Reihe a^{n}, a^{n+1}, a^{n+2} etc. bedeuten. — Hieraus folgt nun leicht, daß die

1) [Es muß heißen: größer] Schl.

*) Die Gründe, worauf die Formation dieser Reihen beruhet, werden anderswo vorgetragen werden.

Reihe L', L'', L''' u. s. f. eine untere, die Reihe M', M'', M''' u. s. f. aber eine obere Grenze haben werde; jene wollen wir durch L, diese [durch] M bezeichnen*), und man begreift leicht, daß L nicht kleiner als M sein könne, sondern entweder $L > M$ oder $L = M$ sein müße. L nennen wir die letzte obere Grenze der ursprünglichen Reihe [R], M die letzte untere derselben. Zugleich erhellet, daß L, M auch die letzten beiderseitigen Grenzen der Reihen a'', a''', a^{IV} u. s. f.; a''', a^{IV} u. s. f. u. s. f. sein werden, oder daß man bei Bestimmung der letzten Grenzen einer Reihe von ihren Anfangsgliedern so viele weglassen kann, als man will.

5. Erklärung. Wenn in einer Reihe der vierten Art die letzte obere Grenze und die letzte untere einander gleich sind, so nennt man sie die absolute Grenze der Reihe.

6. Lehrsatz. Wenn a, a', a'' etc. eine Reihe ist, die die absolute Grenze A hat; b, b', b'', b''' etc. eine Reihe, deren absolute Grenze B, so hat die Reihe $a+b$, $a'+b'$, $a''+b''$ etc. die absolute Grenze $A+B$.

*) Die erstere Reihe wird auch eine obere Grenze L', die zweite eine untere M' haben, auf die aber nicht weiter Rücksicht genommen zu werden braucht.

Bemerkung zu dem vorstehenden Fragment.

In diesem aus den Jahren 1800—1801 stammenden Aufsatz hat Gauß die Bedingung für die Existenz des Grenzwerts (Limes) einer abzählbaren Menge als ganz speziellen Fall mit Hilfe der stets existierenden letzten oberen und unteren Grenzen hergeleitet. Vgl. z. B. Pasch, Mathem. Annalen 30 (1887), S. 132 ff., wo jedoch die Abzählbarkeit der betrachteten Menge nicht vorausgesetzt wird.

Verzeichnis der im Text wiedergegebenen Auszüge aus Gaußschen Handschriften.

Inhaltsverzeichnis.
